2017講義ノート
一般物理学 (力学)
理学部・生物学科

Introduction

物理 (Physics)

扱う範囲

非常に小さい

クオーク
quark

$\sim 10^{-18}$ [m]

45 桁

非常に大きい

宇宙
universe

$\sim 10^{27}$ [m]

分野

古典物理学 (マクロな世界)

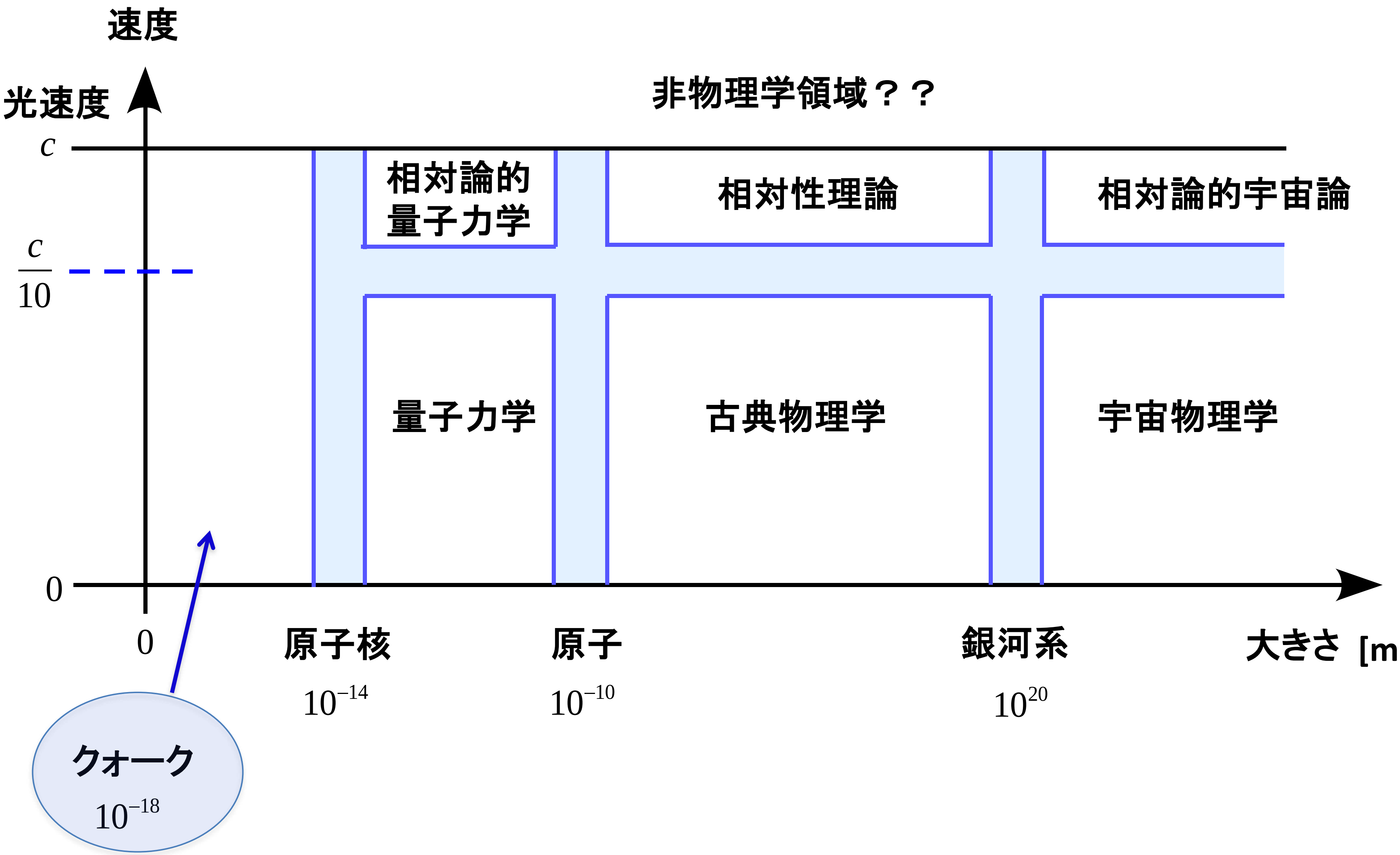
ニュートン力学
解析力学
古典電磁気学
古典熱力学

量子力学が発達

現代物理学 (ミクロな世界)

量子力学
量子統計力学
特殊相対性理論
一般相対性理論
その他、専門分野

Introduction



物理量～単位系

物理量　MKS単位系　(参考)

Length :長さ	Time :時間	Mass :質量
m	sec	kg
[L]	[T]	[M]

長さ: 1 m
光が真空中で1/299792458 s の間に進む距離
時間: 1s
133Cs原子が吸収する電磁波の周期の9192631770倍
質量: 1kg
パリの国際度量衡局に保管されている
白金イリジウム合金円柱の質量

国際単位系の基本単位

物理量	単位記号	名称
長さ	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒（second）
電流	A	アンペア
熱力学的温度	K	ケルビン
物質量	mol	モル
光度	cd	カンデラ
平面角	rad	ラジアン
立体角	sr	ステラジアン

国際単位系(SI)
国際度量衡委員会が基本量の標準を定めた単位系

次元解析～誘導単位

次元解析

次元：物理的性質を表している

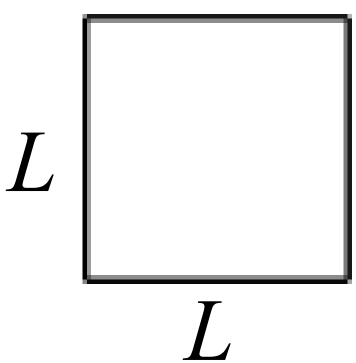
式の導出などの検証の手段になる

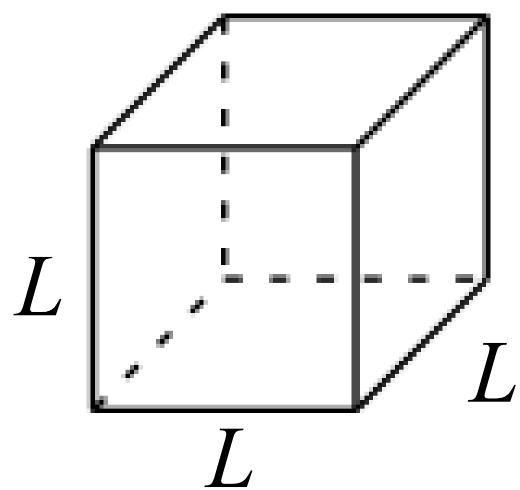
計算をしていて、何かオカシイ？
と思ったら、次元解析をするとよい

例

物理量	関係式	単位記号	次元
面積 (Square)	$S = L \times L$	m^2	$[L^2]$
体積 (Volume)	$V = L \times L \times L$	m^3	$[L^3]$
密度 (Density)	$r = m / V$	g / cm^3	$[M / L^3]$

← CGS 単位系





次元解析～誘導単位

物理量	関係式	単位記号	次元
速度、速さ (Velocity , Speed)	$v =$	m / s	[LT^{-1}]
加速度 (Acceleration)	$a =$	m / s^2	[LT^{-2}]
力 (Force)	$f =$	kg・m / s^2 ＝ N	[LMT^{-2}]
仕事 (Work)	$W =$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
運動エネルギー (Kinetic energy)	$K =$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
力積 (Impulse)	$I =$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]
運動量 (Momentum)	$p =$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]

接頭語

単位の10の整数乗倍を表すために接頭語を用いる

例

10^3 m=1 km

k は10^3を示している

国際単位系における接頭語

接頭語	記号	ベキ
ペタ (peta)	P	10^{15}
テラ (tera , terra)	T	10^{12}
ギガ (giga)	G	10^{9}
メガ (mega)	M	10^{6}
キロ (kilo)	k	10^{3}
ヘクト (hecto)	h	10^{2}
デカ (deka , deca)	da	10^{1}
デシ (deci)	d	10^{-1}
センチ (centi)	c	10^{-2}
ミリ (milli)	m	10^{-3}
マイクロ (micro)	μ	10^{-6}
ナノ (nano)	n	10^{-9}
ピコ (pico)	p	10^{-12}
フェムト (femto)	f	10^{-15}

番外編

オングストローム
(angstrom)

Å $=10^{-10}$

例

1 km = m
= m

1 cm = m

100 cm = m
= m

時間微分と時間積分

例題

x_0, v_0, a_0 をそれぞれ定数とし、C を積分定数とする。次の条件を満たす関数 $x(t), v(t)$ について、時間微分や時間積分を行い、下記空欄に x_0, v_0, a_0 のいずれか、または、定数を書き込め。

(1) $x(t) = x_0 + v_0 t \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = \boxed{}$

(2) $v(t) = v_0 + a_0 t \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dv(t)}{dt} = \boxed{}$

(3) $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a_0 t^2$

$$\Longrightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \boxed{} + \boxed{}\, t$$

(4) $\dfrac{dv(t)}{dt} = a_0$

$$\Longrightarrow \quad v(t) = \int \boxed{}\, dt = \boxed{}\, t + C$$

n を自然数, k を定数とし, $f(t)$, $g(t)$ をそれぞれ t の関数とする。変数 t に関する微分を “**時間微分**” といい,

I. $\dfrac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$

II. $\dfrac{d}{dt} \{k f(t)\} = k \dfrac{df(t)}{dt}$

III. $\dfrac{d}{dt} \{f(t) + g(t)\} = \dfrac{df(t)}{dt} + \dfrac{dg(t)}{dt}$

が成り立つ。また, 変数 t に関する積分を “**時間積分**” といい,

IV. $\displaystyle\int t^n \, dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$

V. $\displaystyle\int \{k f(t)\}\, dt = k \int f(t)\, dt$

VI. $\displaystyle\int \{f(t) + g(t)\}\, dt = \int f(t)\, dt + \int g(t)\, dt$

が成り立つ (C は積分定数である)。

(5) $$\frac{dx(t)}{dt} = v_0$$

$$\Longrightarrow \quad x(t) = \int \boxed{}\, dt = \boxed{}\, t + C$$

(6) $$\frac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0 t$$

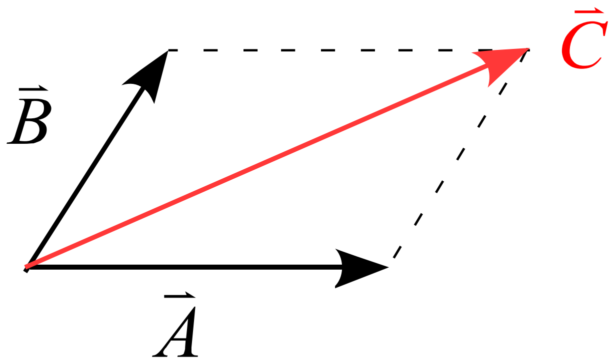
$$\Longrightarrow \quad x(t) = \int \left(\boxed{} + \boxed{}\, t \right) dt$$

$$= \boxed{}\, t + \frac{1}{\boxed{}} a_0 t^2 + C$$

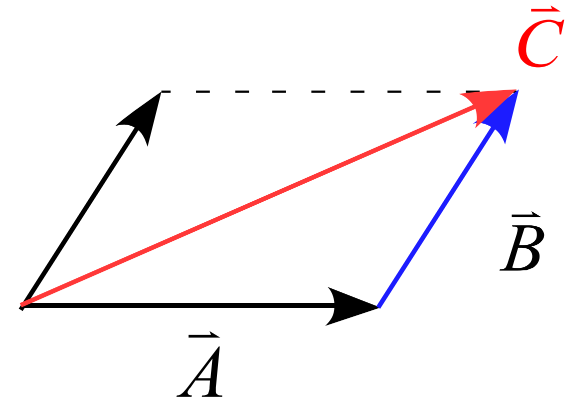
ベクトル

ベクトル　大きさ + 向き

ベクトルの和　$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$

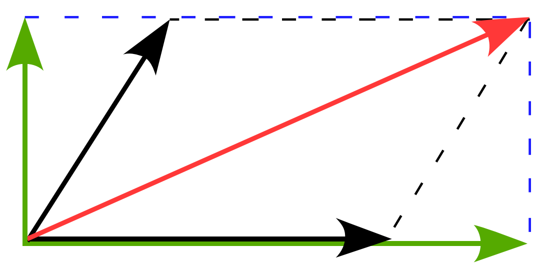


平行四辺形を作る



$\vec{B}$を平行移動して考える

ベクトルの分解



ベクトルの分解の仕方はたくさんある

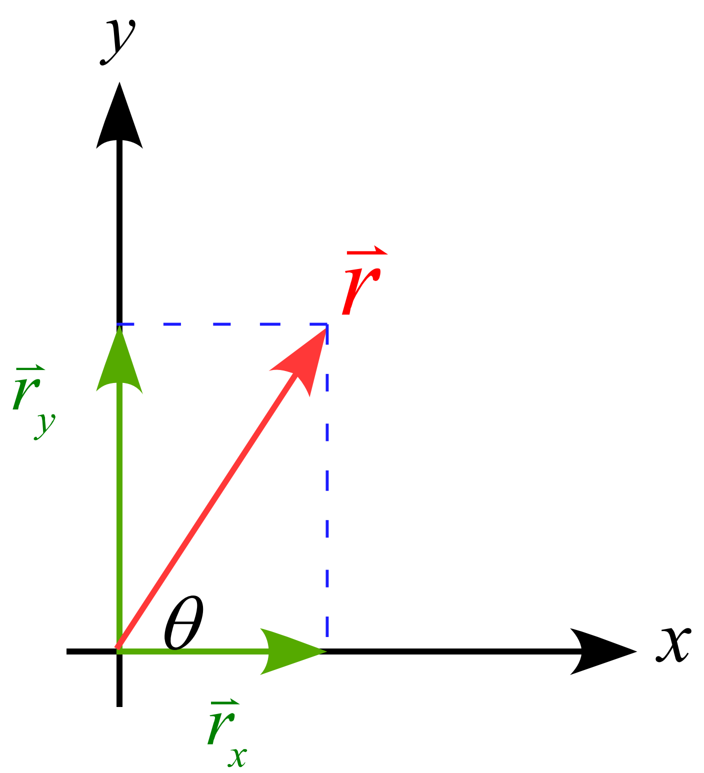
合成して元に戻ればOK

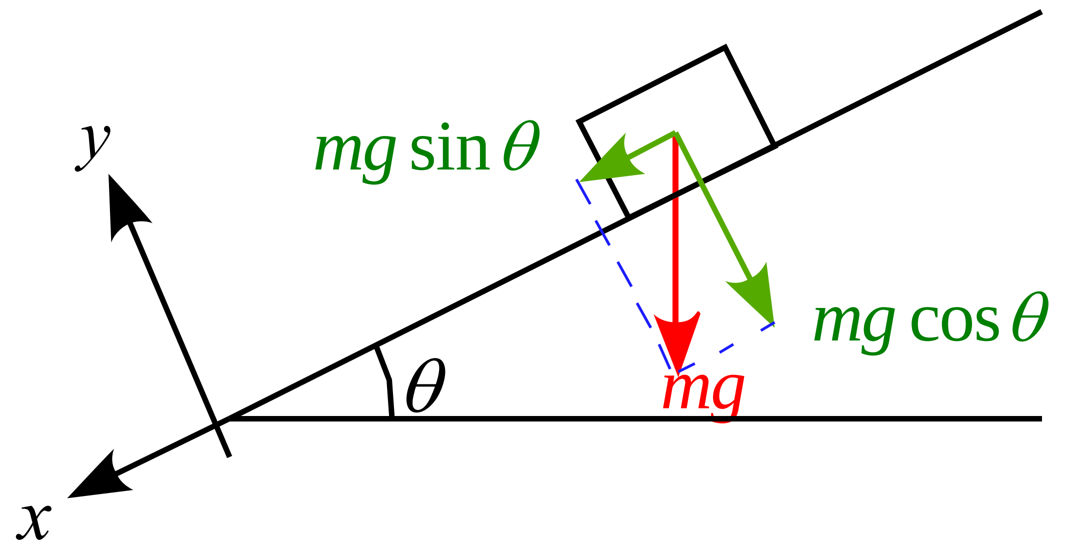
ベクトル

ベクトルの分解

速度ベクトルの分解
力の分解

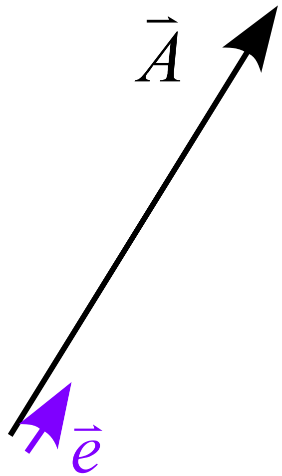
ベクトルの分解を分解して考えるケースは多い





ベクトル

単位ベクトル　大きさが 1 であるベクトル

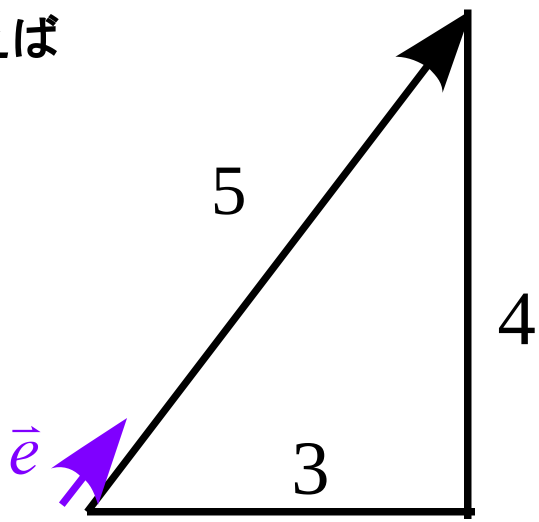


$\vec{A}$ の大きさは $|\vec{A}|$ と表す

向きは同じ、大きさは 1

$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

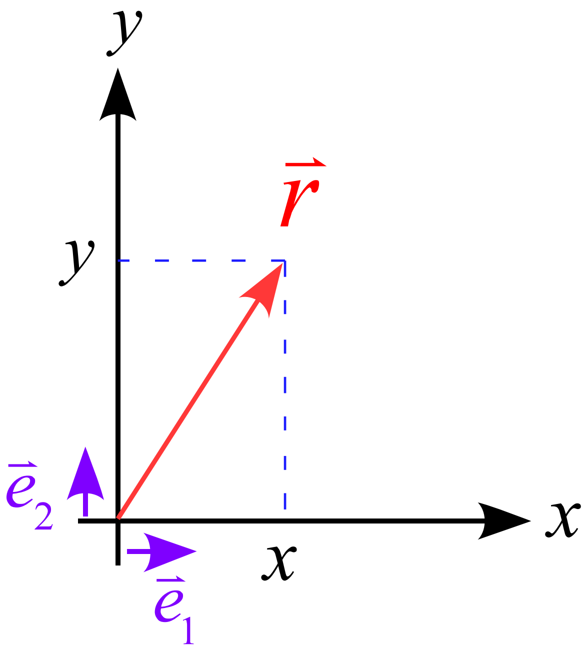
例えば



$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(3,4)}{|5|} = \frac{1}{5}(3,4)$$

ベクトル

単位ベクトル **2次元 直交座標**



$$\vec{r} = (x, y) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

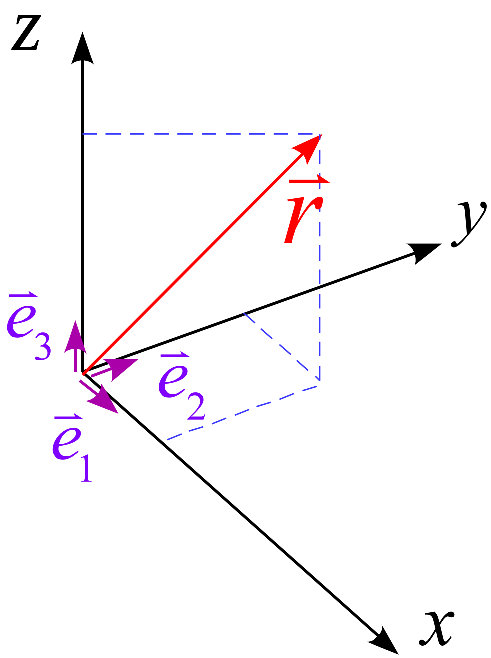
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ベクトル

単位ベクトル　**3次元 直交座標**



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

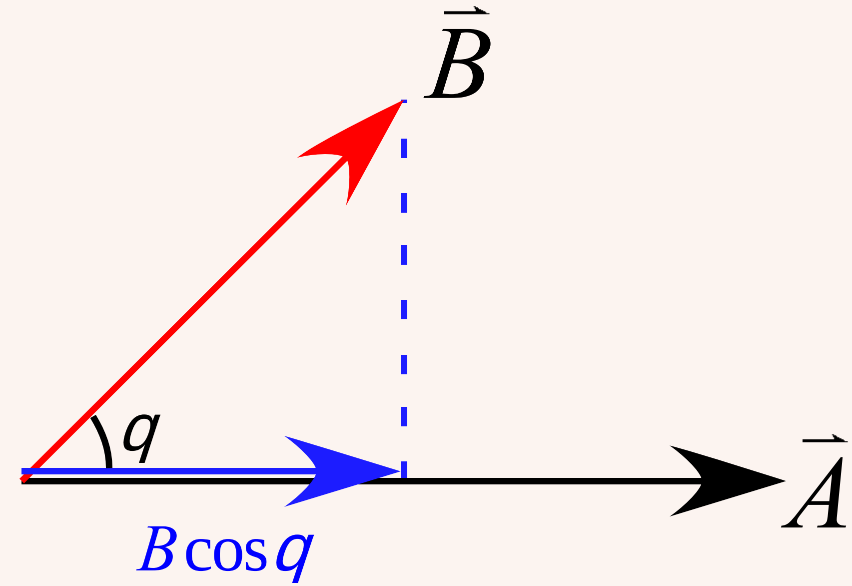
$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ベクトル～内積

ベクトルの内積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



これを3次元の直交座標系を考える

ベクトルの成分を

$$\vec{A}=\left(A_x,A_y,A_z\right)\quad\vec{B}=\left(B_x,B_y,B_z\right)$$

とし、それぞれの単位ベクトルを $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ とすると

ベクトル～内積

ベクトルはそれぞれ

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

となるので、ベクトルの内積は

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)$$

$$= A_x\vec{i}\cdot B_x\vec{i} + A_x\vec{i}\cdot B_y\vec{j} + A_x\vec{i}\cdot B_z\vec{k} +$$

$$A_y\vec{j}\cdot B_x\vec{i} + A_y\vec{j}\cdot B_y\vec{j} + A_y\vec{j}\cdot B_z\vec{k} +$$

$$A_z\vec{k}\cdot B_x\vec{i} + A_z\vec{k}\cdot B_y\vec{j} + A_z\vec{k}\cdot B_z\vec{k}$$

ベクトル～内積

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

が成立するので

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

となる

任意の2元

$$A=\left(A_1,A_2,\cdots A_n\right)$$

$$B=\left(B_1,B_2,\cdots B_n\right)$$

に対し

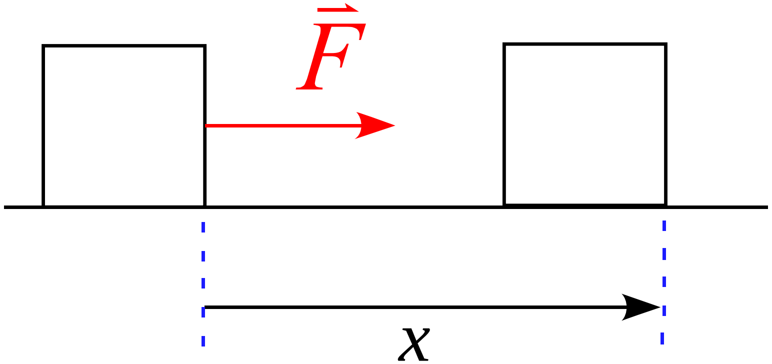
$$A\cdot B=\sum_{i=1}^{n}A_iB_i$$

それぞれの成分どうしをかけたものの和

ベクトル～内積

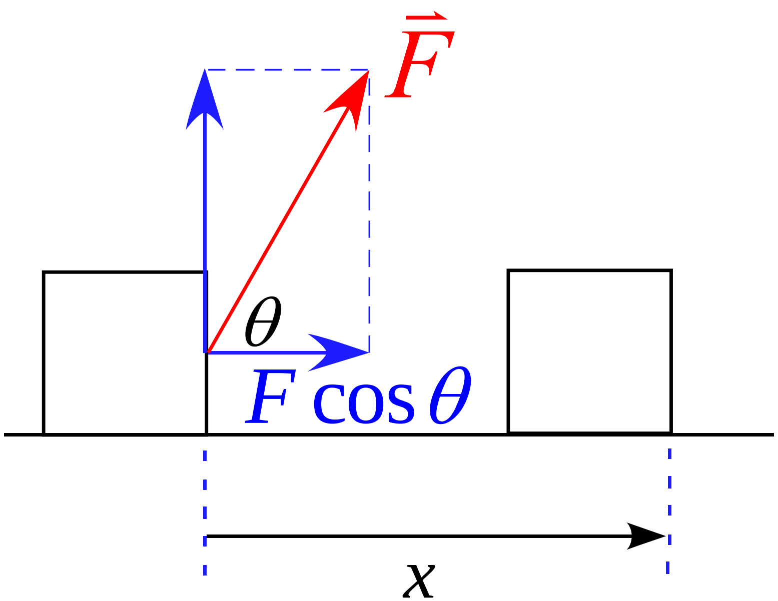
力学で何に使うのか？

仕事を考えるときに使う



仕事＝力×移動距離

$$W = F \times x$$

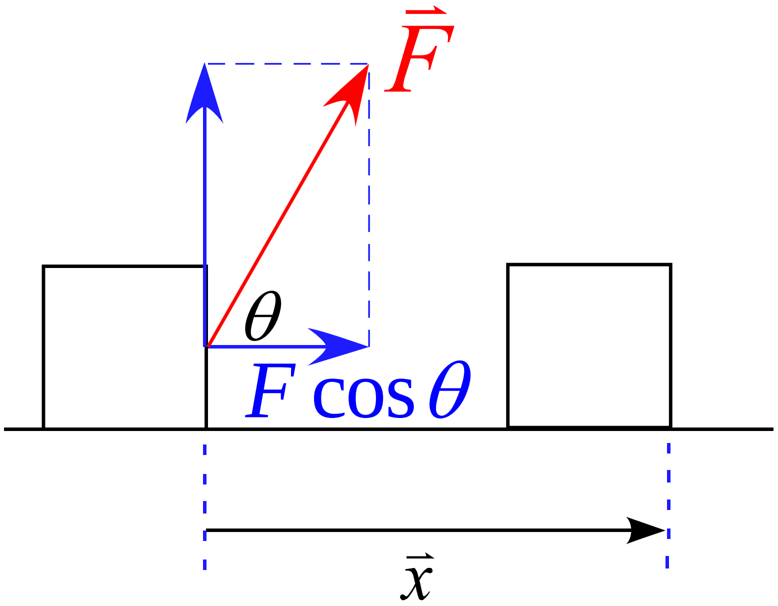


$$W = F\cos\theta \times x$$
$$= Fx\cos\theta$$

ベクトル～内積

一般化したい

力も変位もベクトルだから
ベクトルを用いて表したい



$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$
$$= |\vec{F}||\vec{x}|\cos\theta$$

力と変位が平行の場合は

$$\cos 0 = 1$$

なので $W = |\vec{F}||\vec{x}|$

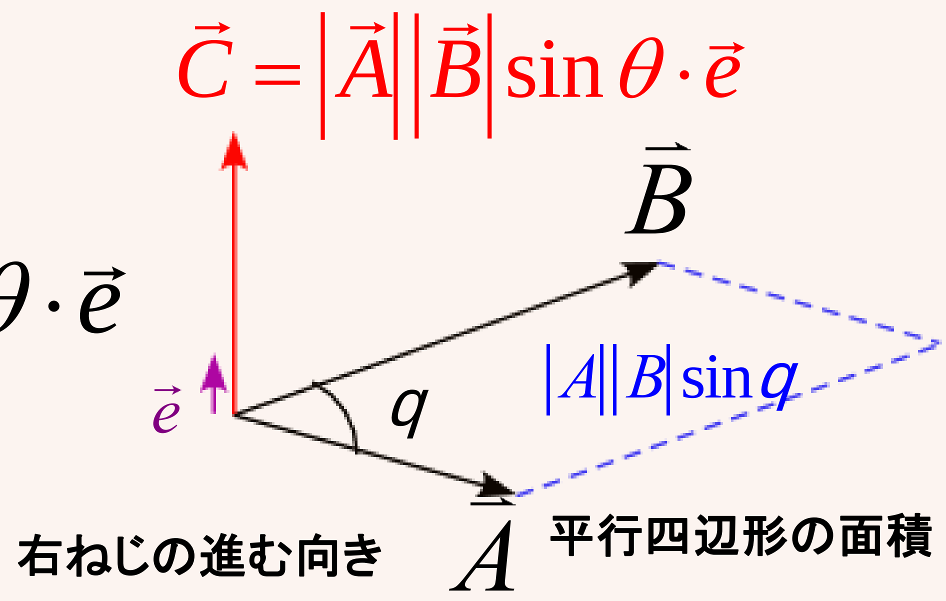
ベクトル～外積

ベクトルの外積

$$\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\cdot\vec{e}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$



内積のときと同様に成分で考えてみると

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)\times\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)$$

$$=$$

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

が成立するので

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_yB_z-A_zB_y\\A_zB_x-A_xB_z\\A_xB_y-A_yB_x\end{pmatrix}$$

となる

回転運動 (角運動量・力のモーメント)

電磁気学

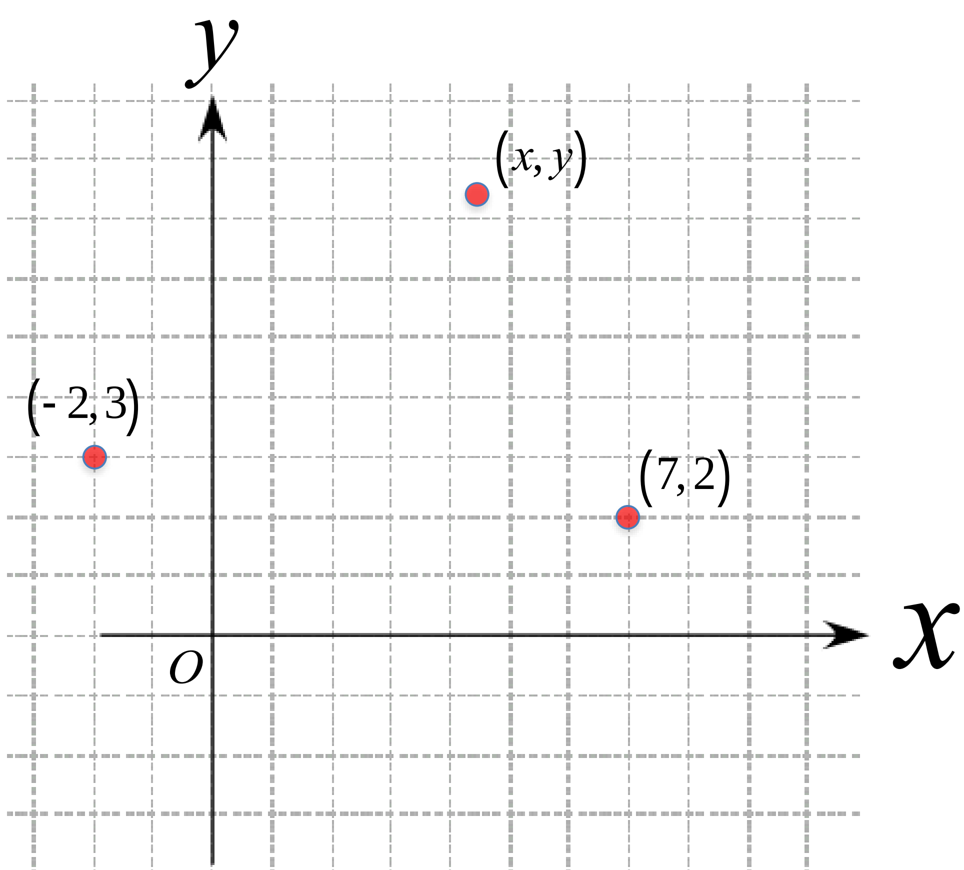
などで使う

ベクトル～座標系

空間内の位置を特定するための座標系は3数の要素で構成される
1.基準点 O(原点)
2.適当な尺度で標識を目盛った1組の座標軸　(x, y – 2次元)
3.原点及び座標軸に対して空間内の点をどのように表記するかという約束

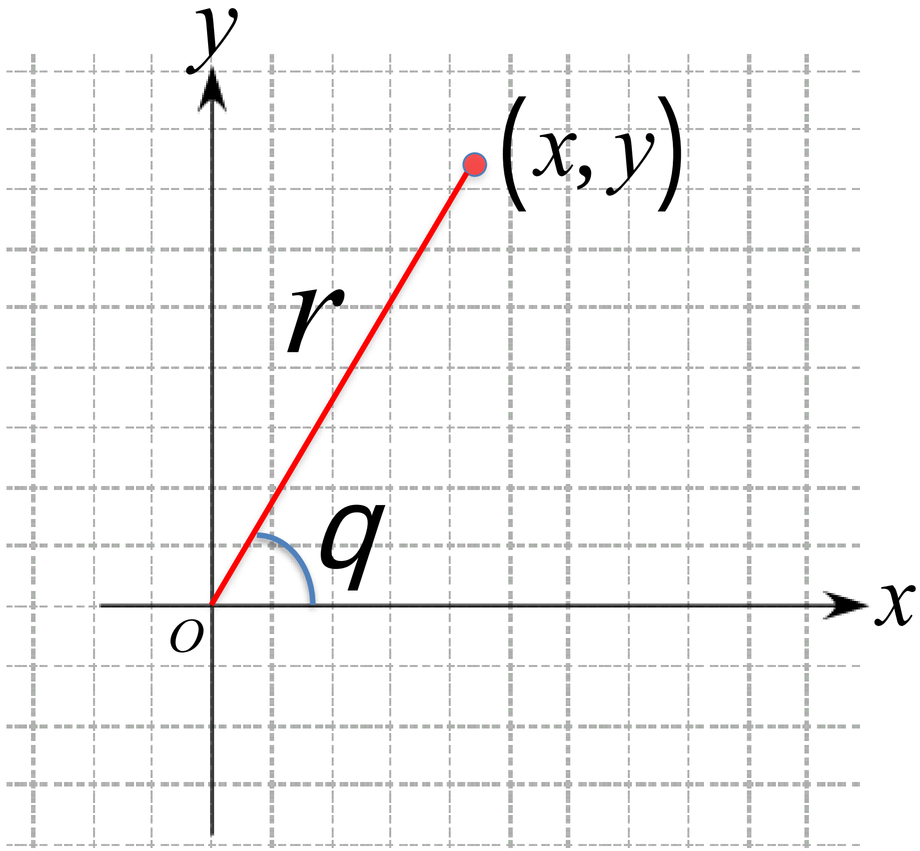
座標系
・デカルト座標系 (直角座標系)
・極座標系

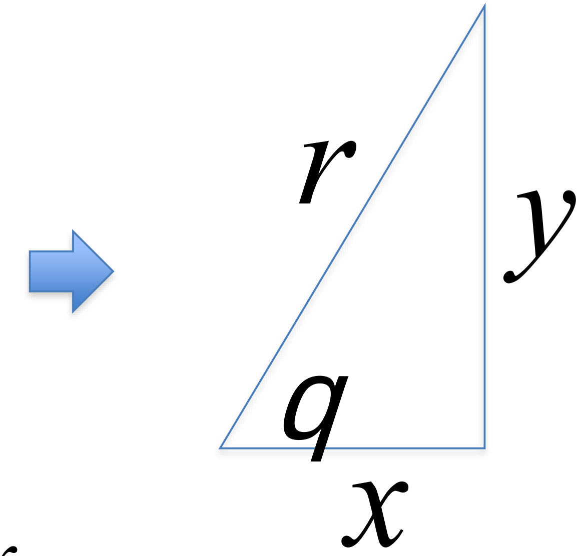
例 (2次元)
直角座標系



座標系～極座標系

例 (2次元)
極座標系





直角座標系で表すと

$$x = r\cos q$$

$$y = r\sin q$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin q = \frac{y}{r}$$

$$\cos q = \frac{x}{r}$$

$$\tan q = \frac{y}{x}$$

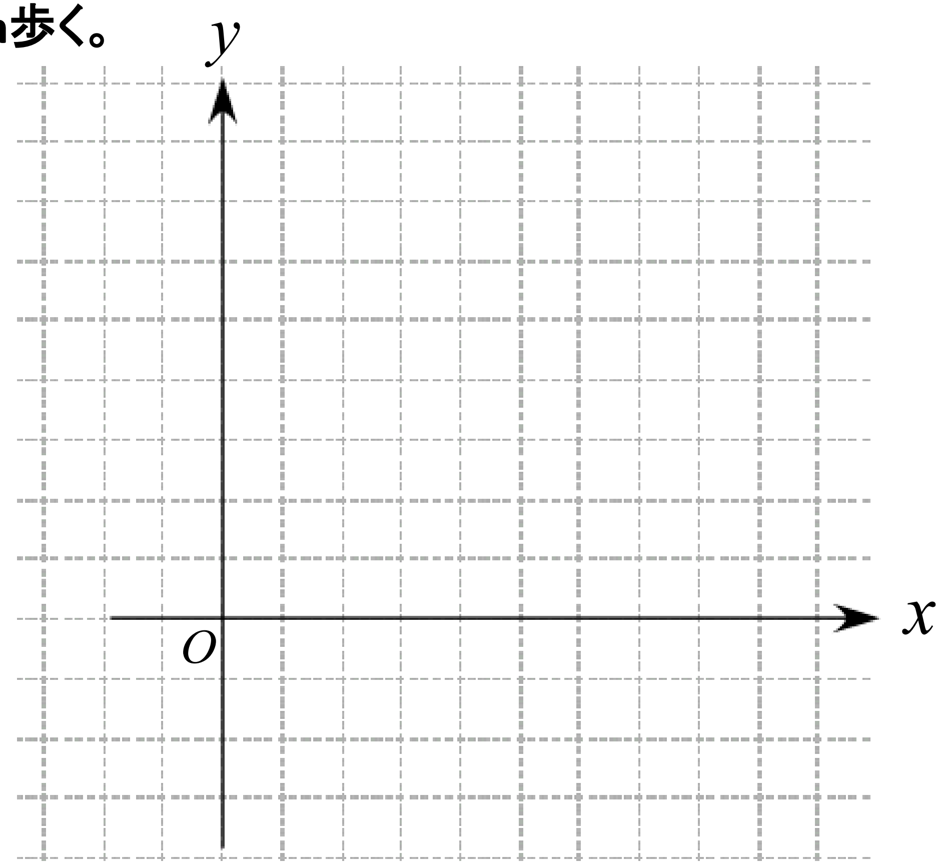
ベクトルとスカラー

ベクトルとスカラー

ベクトル : 大きさと向き (変位、速度)
スカラー : 大きさのみ (距離、速さ)

例題

ある歩行者が東に7km及び北に4km歩く。
合成変位を作図し、大きさを求めよ。
(1目盛は1km)



位置ベクトル

位置

観測者 O に対する（ O を始点とする）

物体 P の位置ベクトル

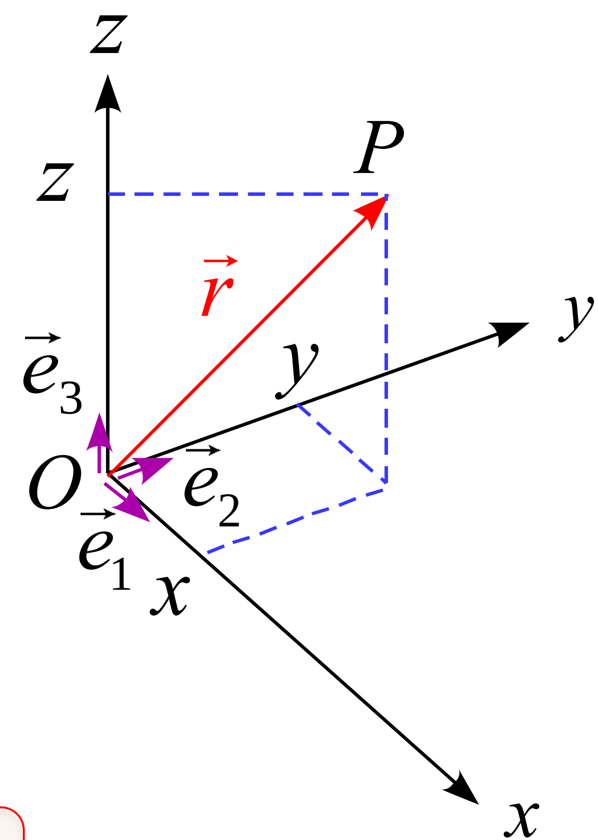
$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

この座標系は、観測者 O に対する

相対座標系となる

3次元の運動を考えるときは

このベクトルが時刻 t の関数として追跡する



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

単位ベクトル

$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$

位置ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{r} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

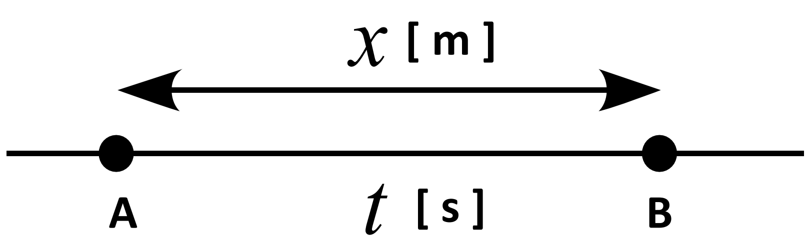
速度・加速度～速さ

物理では・・・時間変化が重要

例えば

物が動く・・・ 速さ、速度 加速度 が知りたい

平均の速さ：　目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか
「平均するとどの程度の速さでず～っと走り続けたのと同じか」



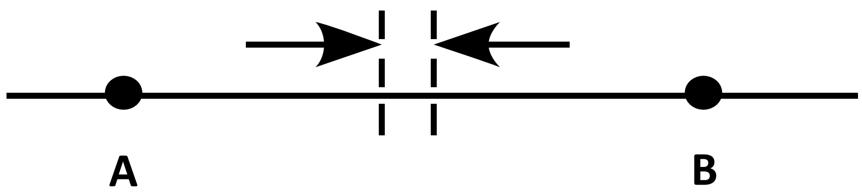
平均の速さ

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \quad [\mathrm{m/s}]$$

速さ

瞬間の速さ　:ある時点での「スピード」のこと

Dx [m] (極めて短い距離)



Dt [s] (極めて短い時間)

瞬間の速さ

$$v = \frac{Dx}{Dt}$$ [m / s]

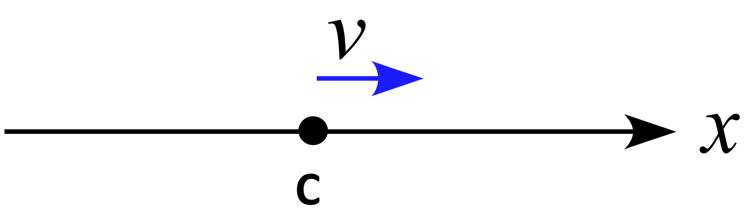
速さ～速度

速度＝速さ＋向き ←ベクトル

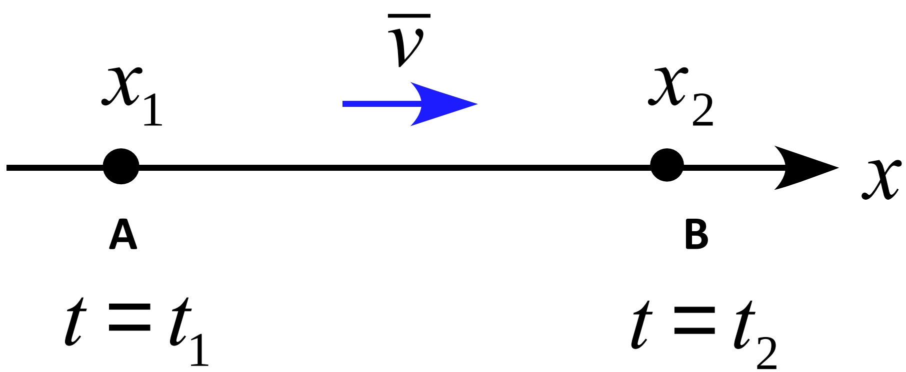
物理学では
大きさも向きも大事

例

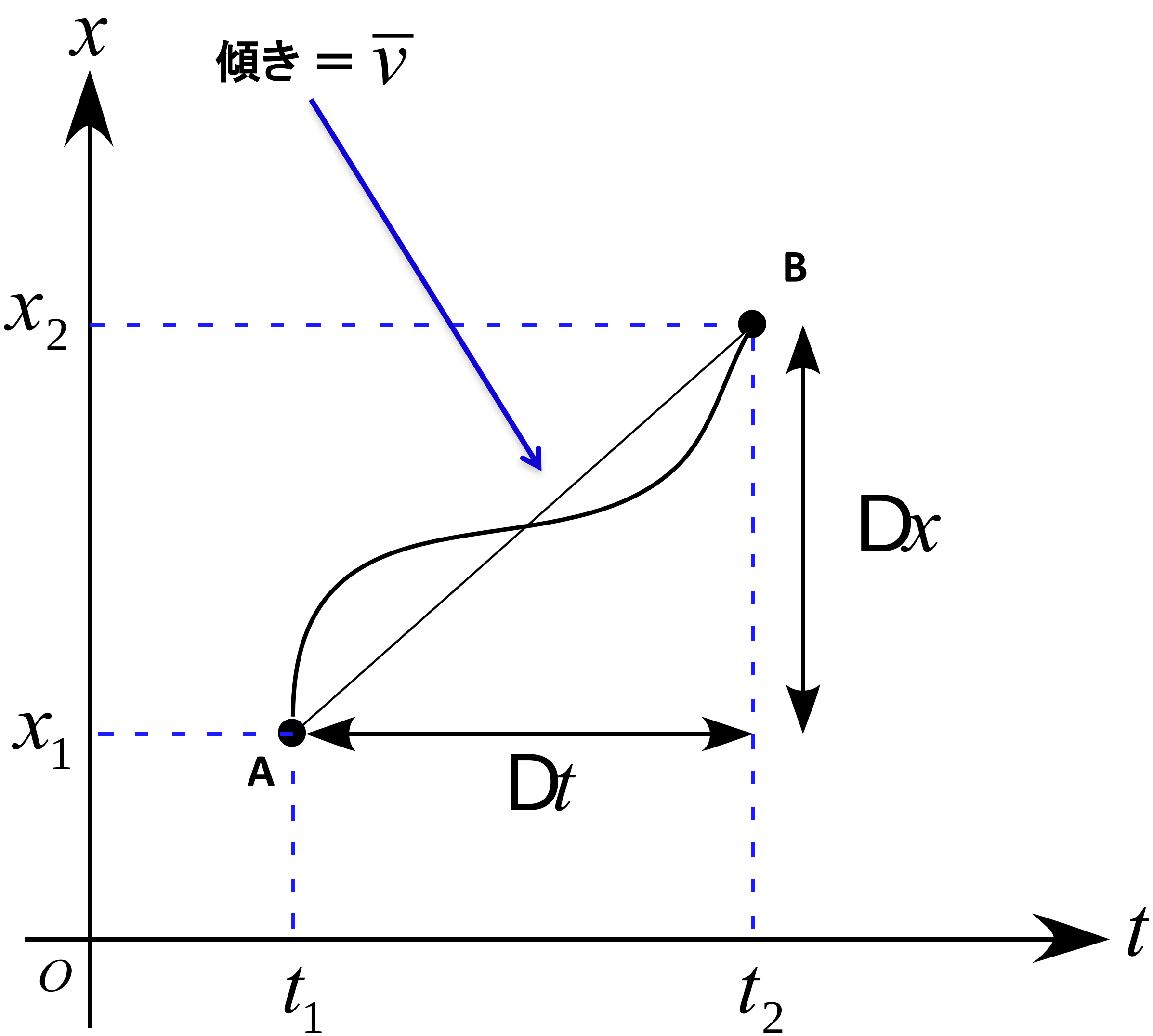
5 [m/s]の速さで走っている（どっち向きかわからない）
5 [m/s]の速度で走っている（ある特定の向きに走っている = 向きが決まっている）



平均速度 : 時間tに対する変位xの変化



質点の位置－時間の関係



平均速度

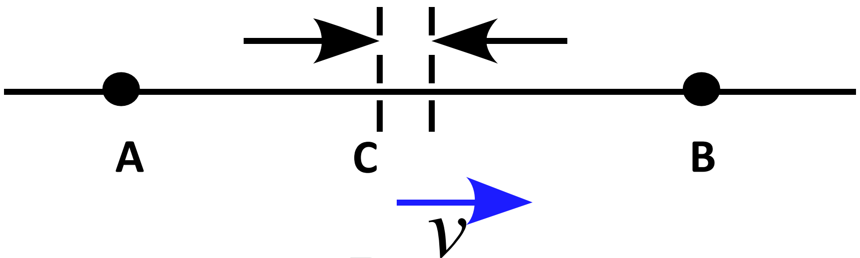
平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

瞬間速度

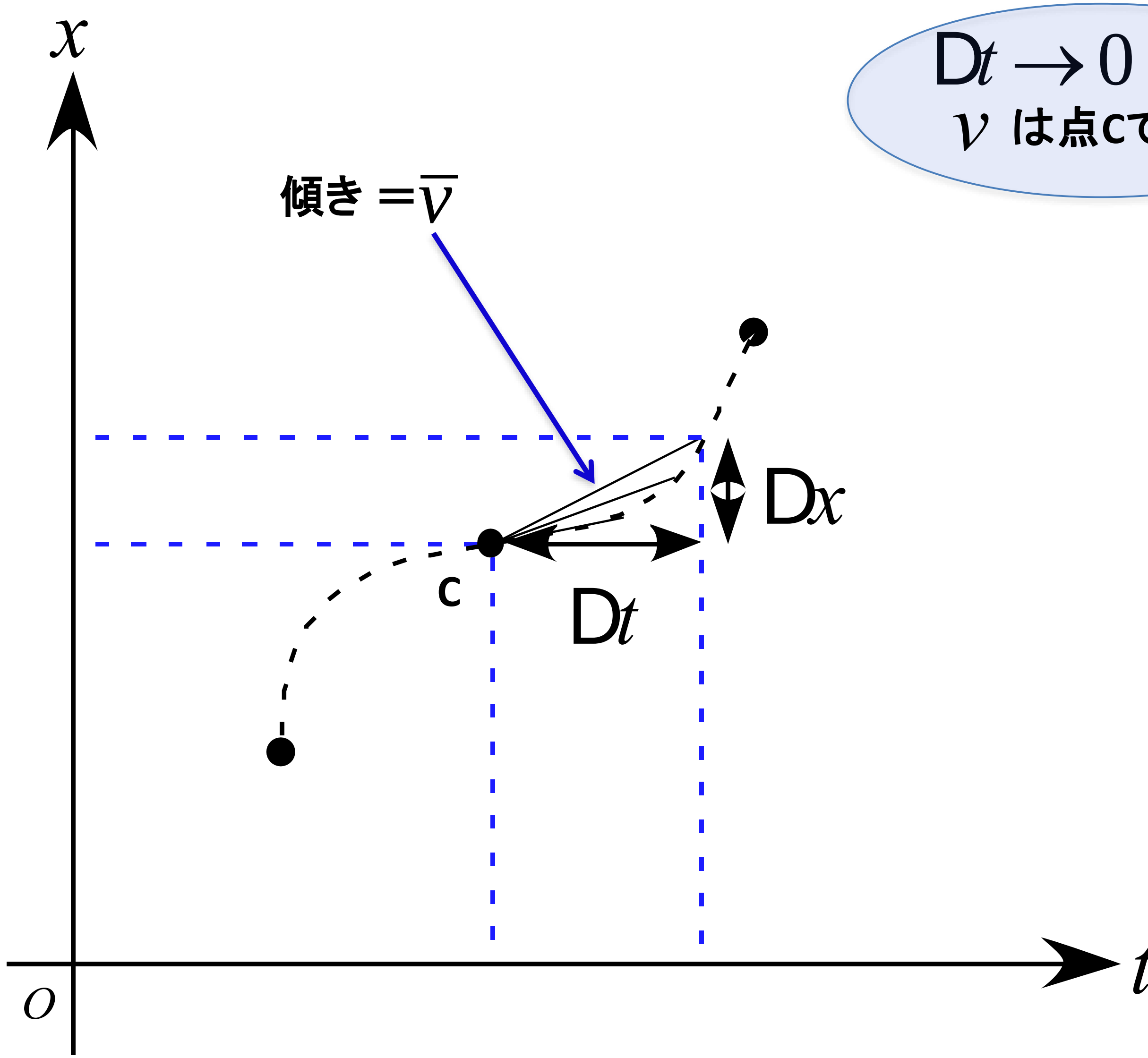
瞬間速度

Dx [m] (極めて短い距離)

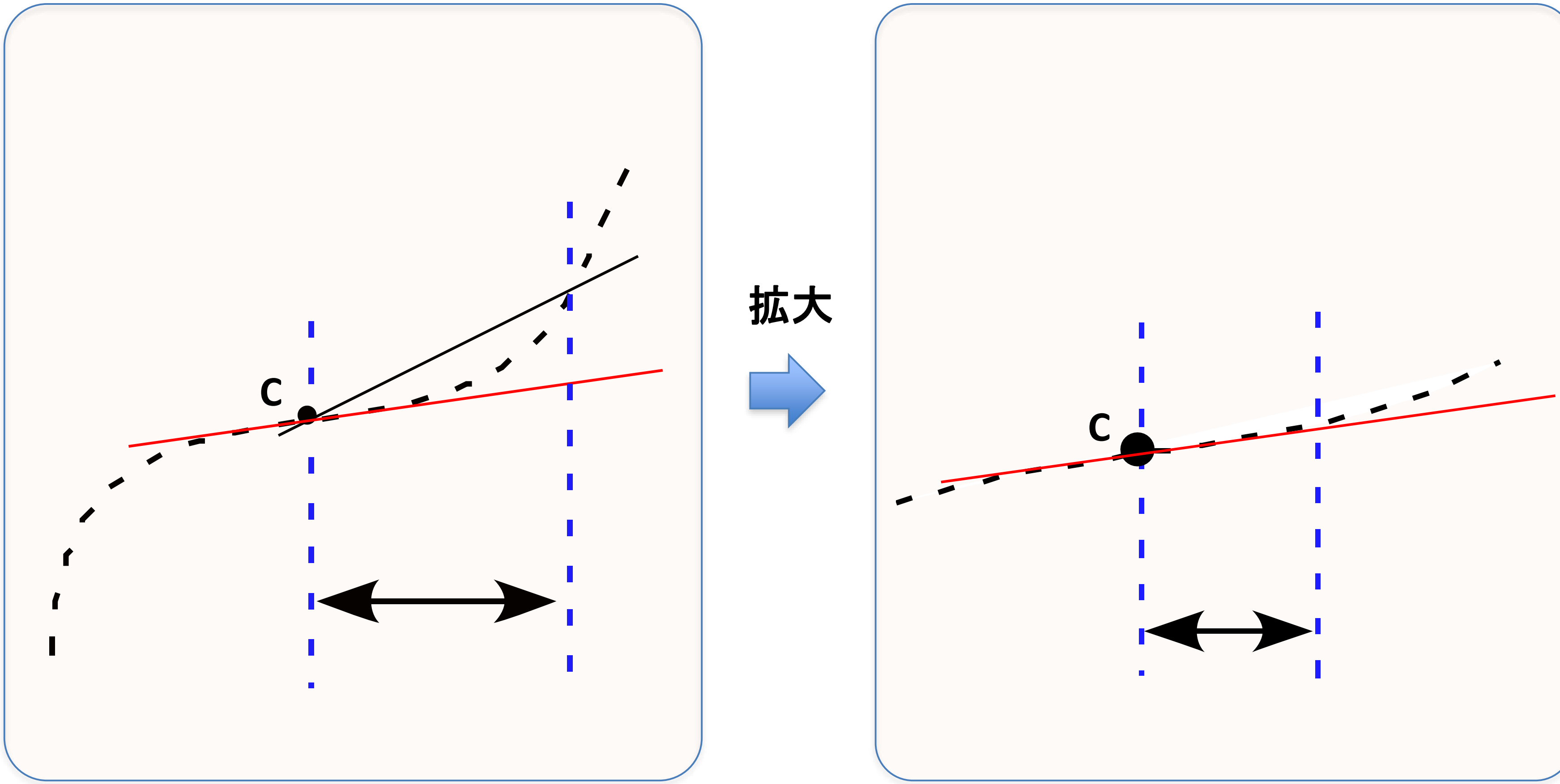


Dt [s] (極めて短い時間)

質点の位置－時間の関係



Dt → 0 で
v は点cでの接線



$Dt \rightarrow 0$ で

v は点Cでの接線

速度～瞬間速度

瞬間速度

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overbrace{\boxed{x(t+\Delta t)-x(t)}}^{\text{変位}}}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

速度～例題

例題

x軸に沿って運動する質点 $t_1=1$[s]のとき $x_1=14$ [m]の位置にあり、

$t_2=3$[s]のとき $x_2=4$ [m]の位置にある。

この時間における変位と平均速度を求めよ。

加速度

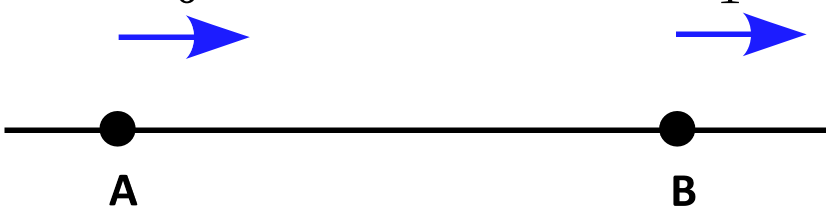
加速度:どれくらいの時間をかけて、どれくらい速度が変化するかの度合い

時間に対する速度変化率

平均加速度

$\Delta v =$

v_0 v_1



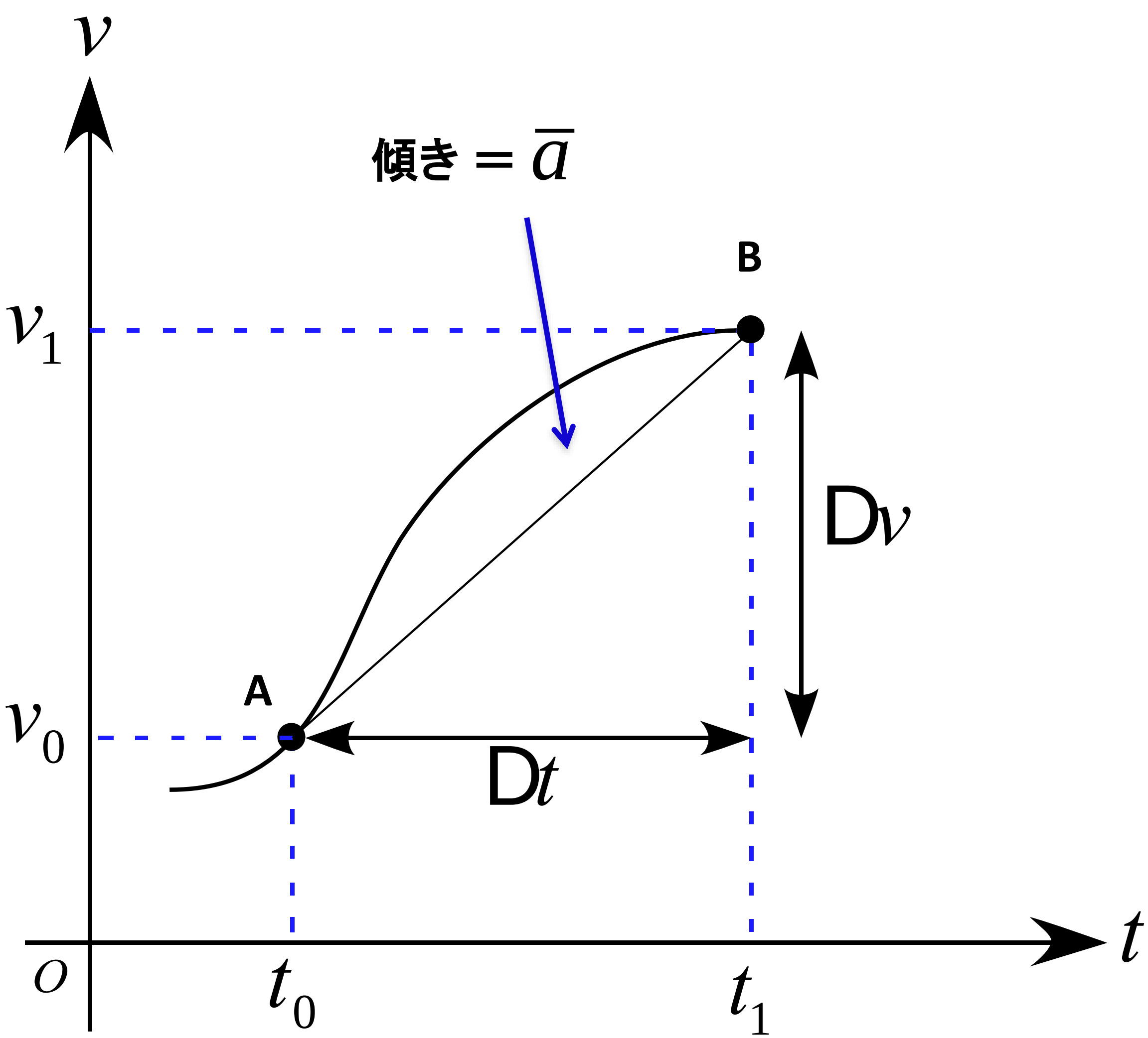
$t = t_0$ $t = t_1$

$\Delta t =$

平均加速度

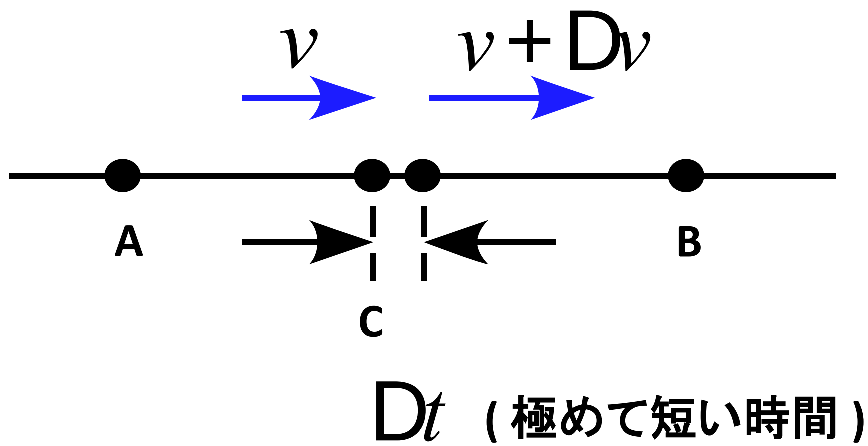
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

質点の速度－時間の関係

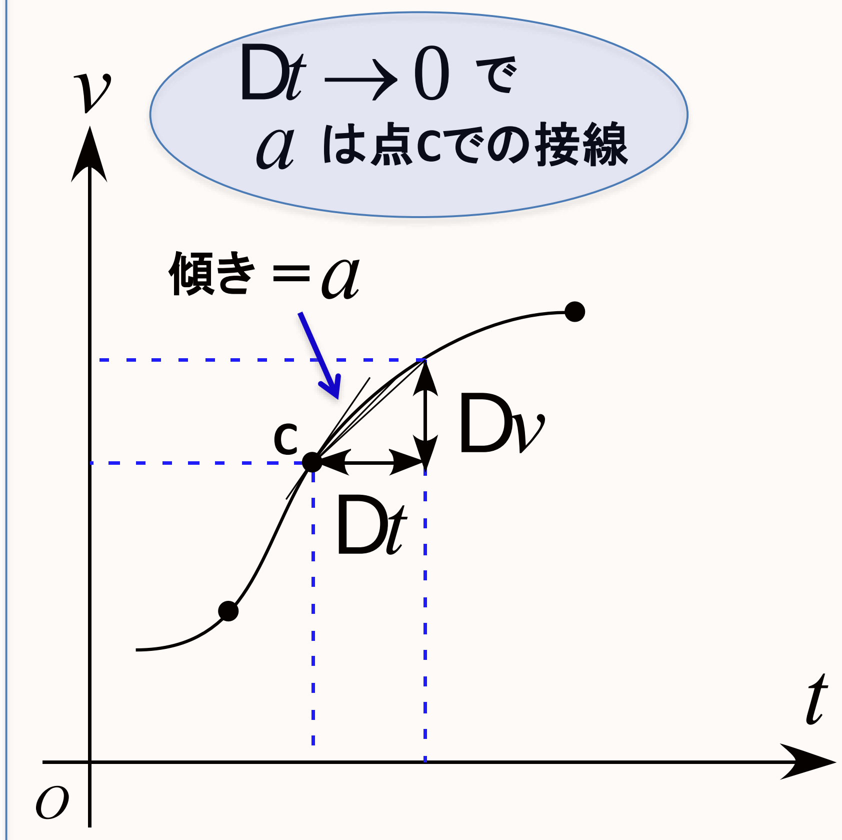


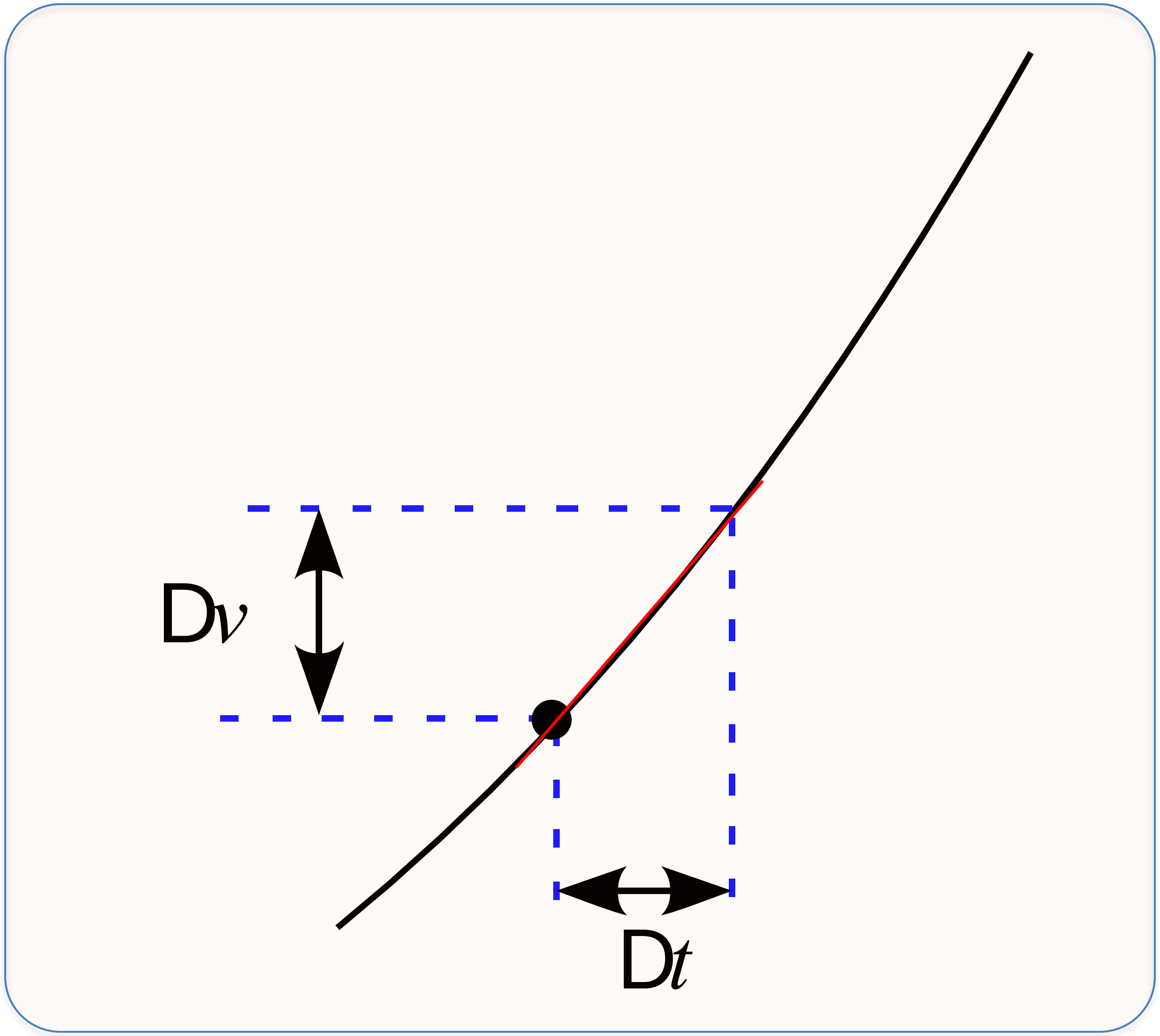
加速度～瞬間加速度

瞬間の加速度　(単に「加速度」)



質点の速度－時間の関係




Dv
Dt

瞬間加速度

瞬間加速度

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{(v + \Delta v) - v}^{\text{速度変化}}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

v は t の関数であると考えると

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2回微分する

加速度

それぞれ何を意味するか考えよう

$a > 0$	$a < 0$
加速する	減速する（ブレーキをかける） 逆向きに走っているという意味ではない

加速度～例題

例題

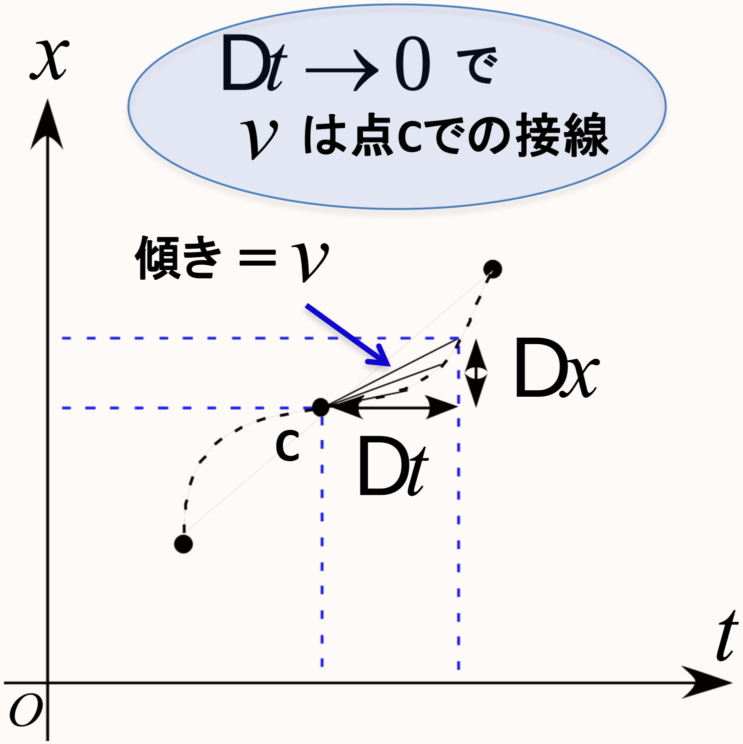
x軸に沿って運動する質点が $v=5+10t$ [m / s] に従って運動する。
この質点は$t=0$ [s]における位置は 20 [m] である。

1. 加速度を時間 t の関数として表せ。
2. $t=0$における質点の速度を求めよ。
3. 位置を t の関数として表せ。

速度～まとめ

速度

質点の位置－時間の関係



変位の時間変化率

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

変位 x を時間 t で微分したもの

加速度～まとめ

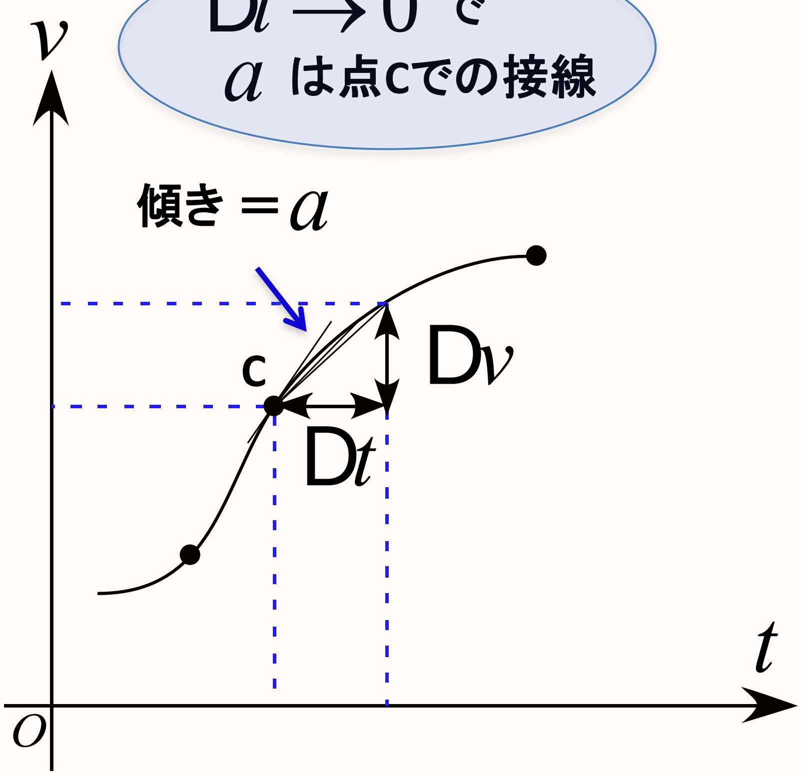
加速度

速度の時間変化率

質点の速度－時間の関係

$\Delta t \to 0$ で

a は点cでの接線



$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

速度 v を時間 t で微分したもの

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_3$$

と表すことができる

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

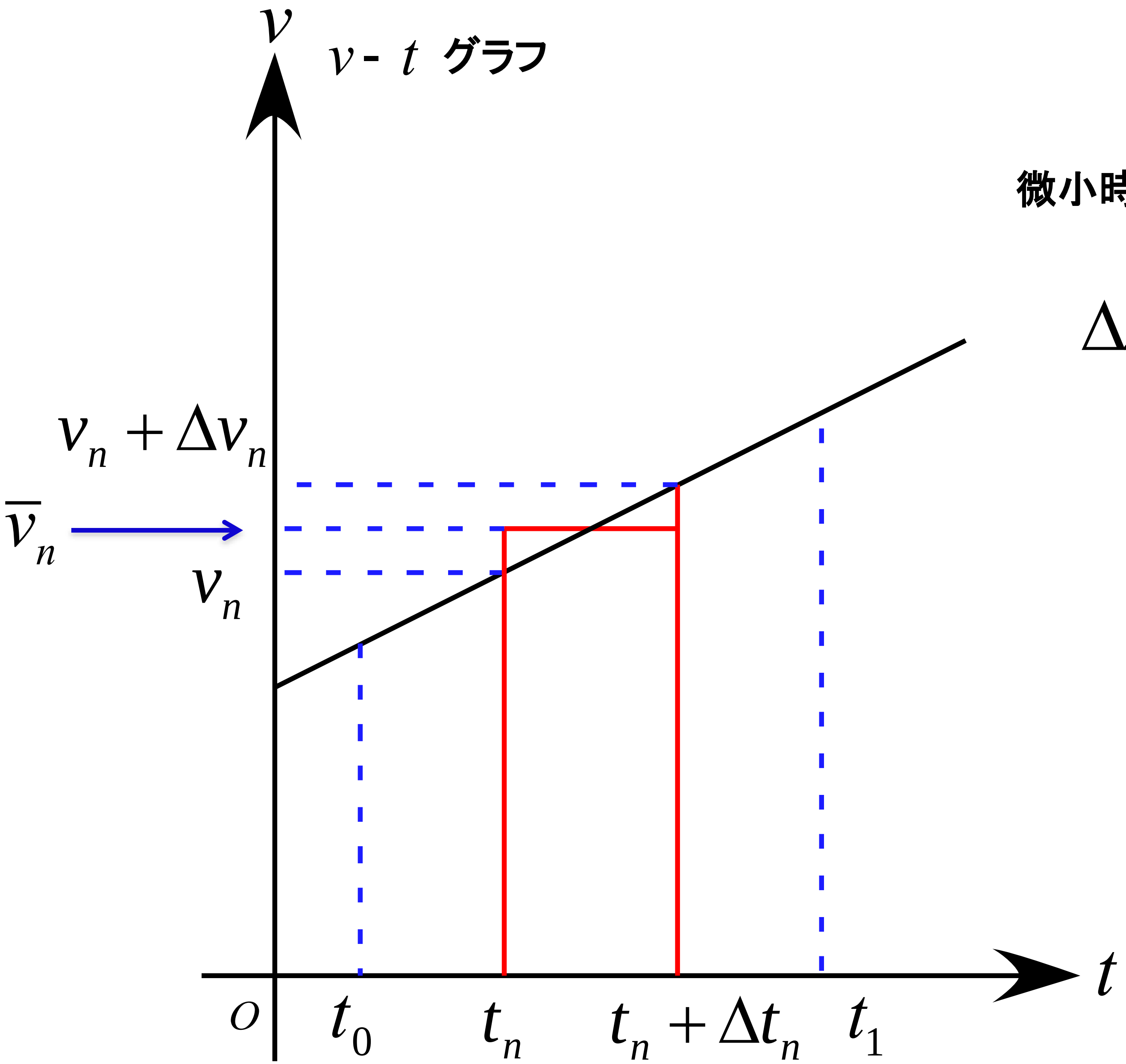
変位ベクトルの時間変化率

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

速度ベクトルの時間変化率

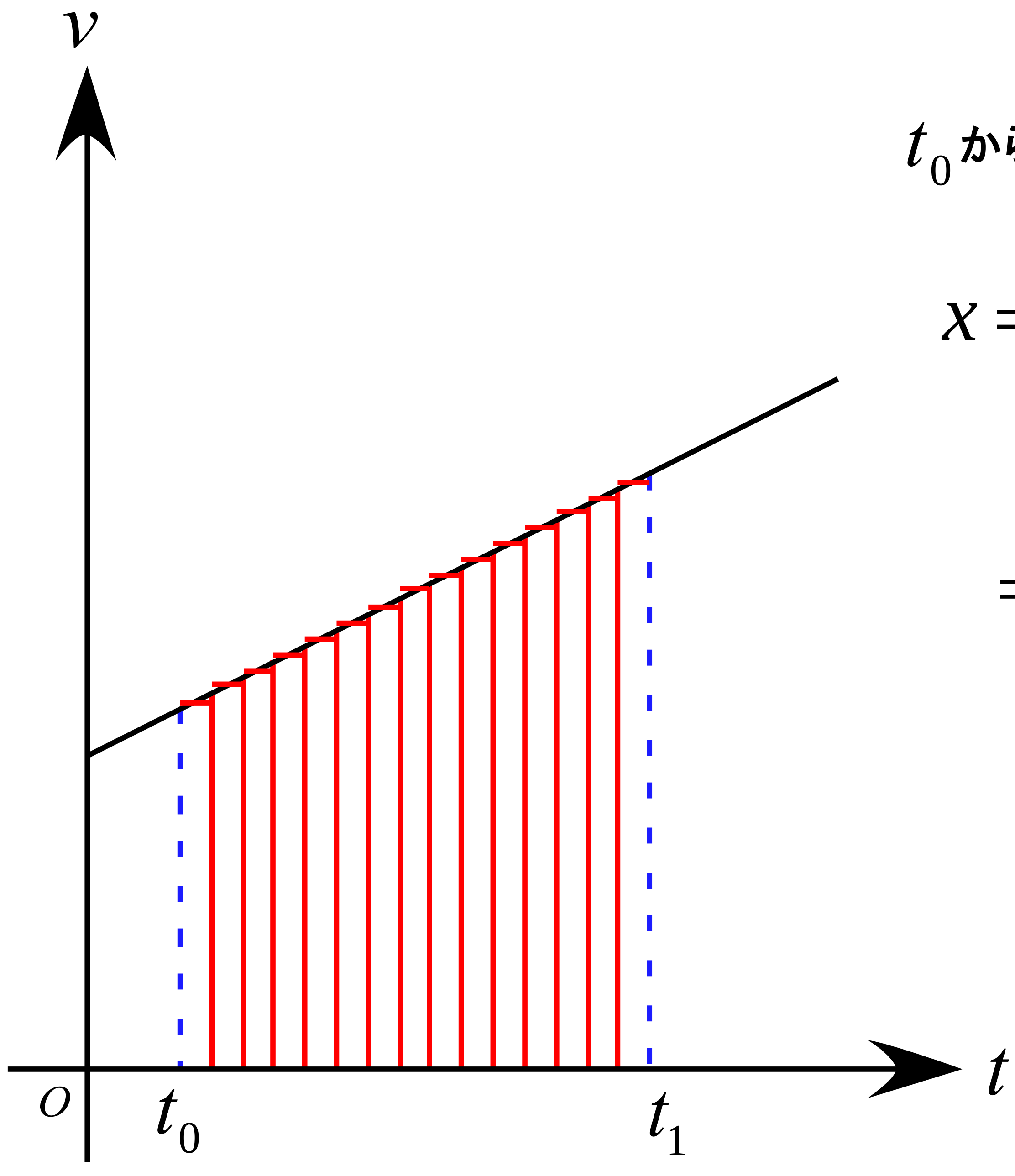
となる

変位とv - tグラフの面積



微小時間 Dt_n における変位は

$$\Delta x_n = \overline{v}_n \cdot \Delta t_n$$

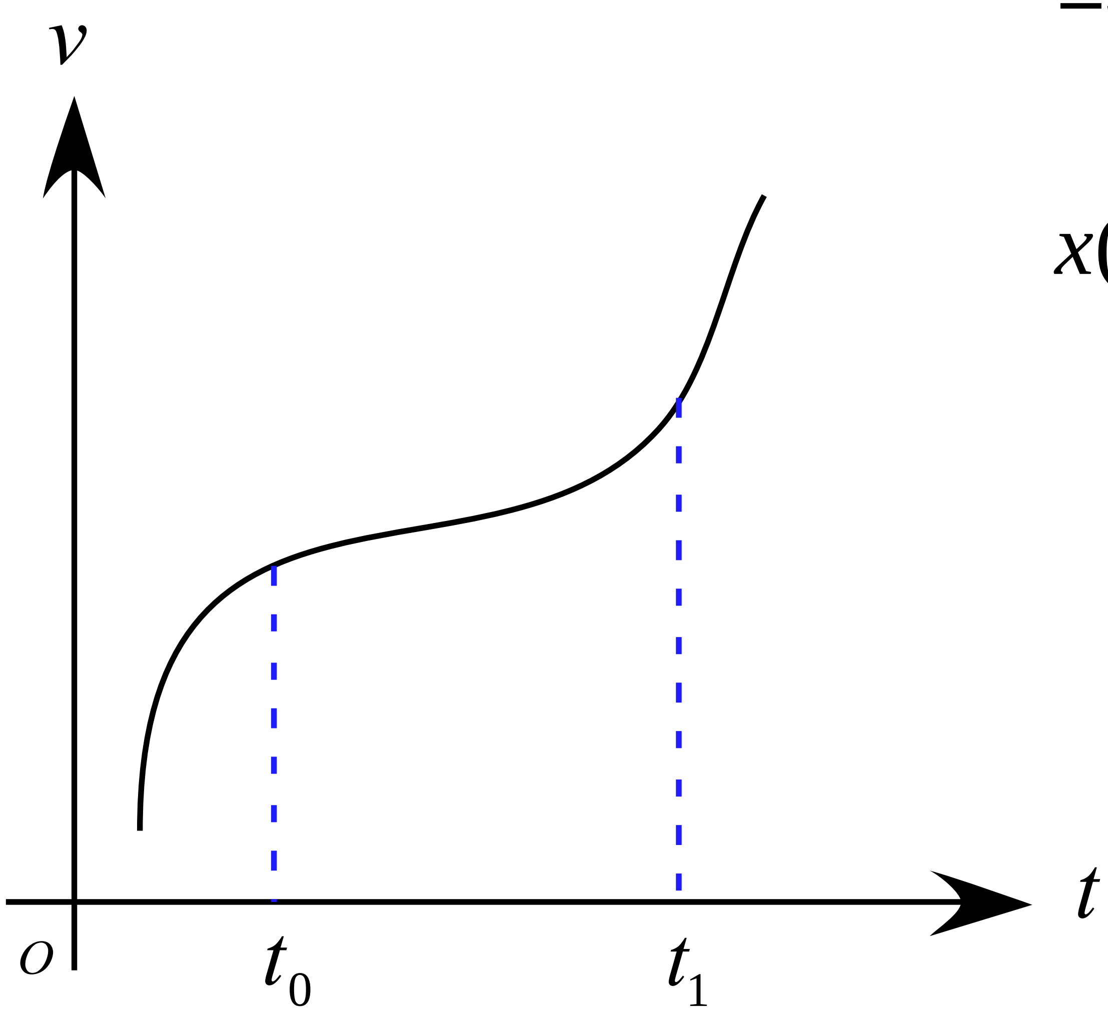


t_0 から t_1 まで合計する

$$x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n \bar{v}_n \cdot \Delta t_n$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt$$

v - t グラフ



一般的に

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

変位～速度～加速度

変位

x

微分 → / ← 積分

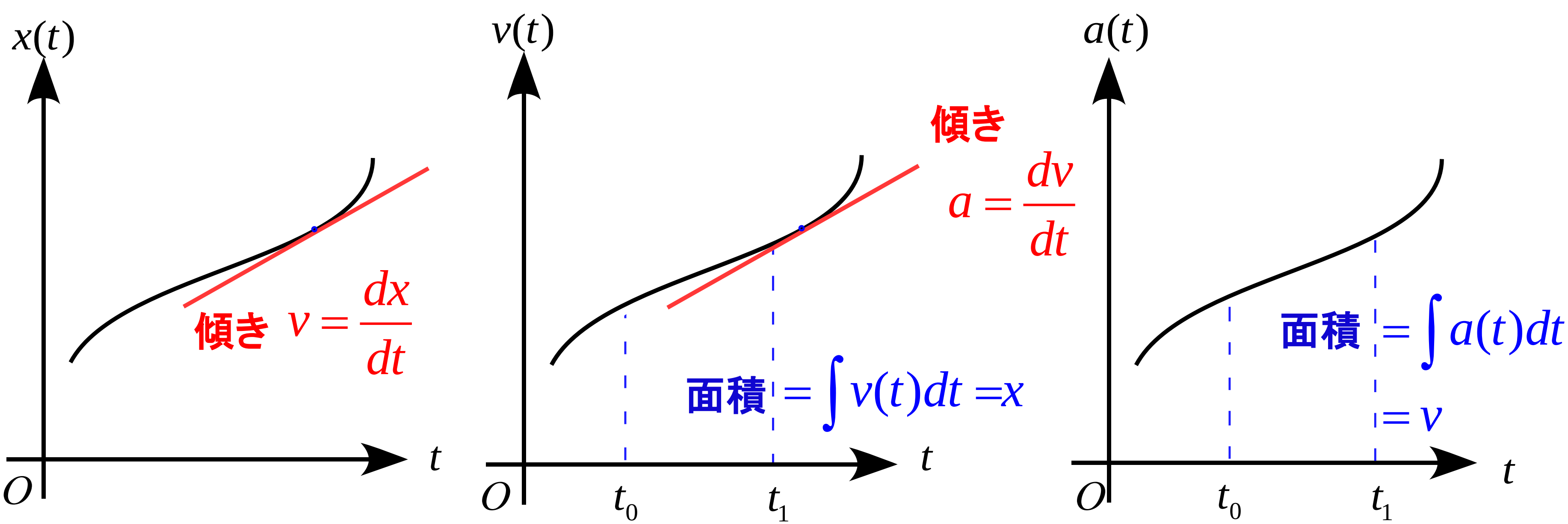
速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

微分 → / ← 積分

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$



等速度運動

等速度 (等速直線運動)

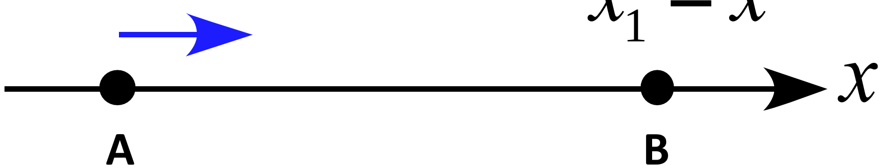
速さ
向き

一定 (constant)

$$v = v_0$$

$$x_0 = 0$$

$$x_1 = x$$



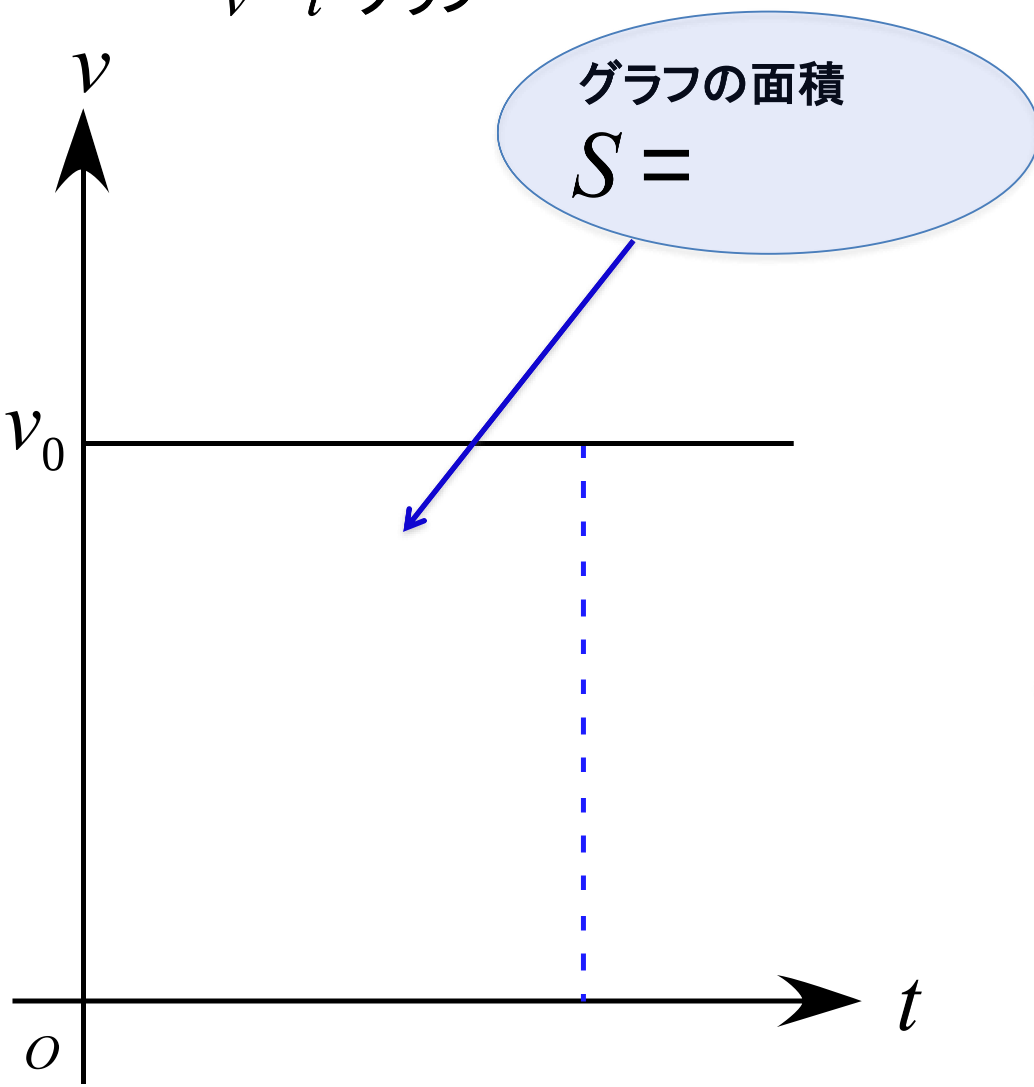
$$t_0 = 0 \qquad t_1 = t$$

$$v = v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - 0}{t - 0} = \frac{x}{t}$$

$$x = v_0 t$$

距離 = 速さ × 時間

v - t グラフ



変位 = v - t グラフの面積

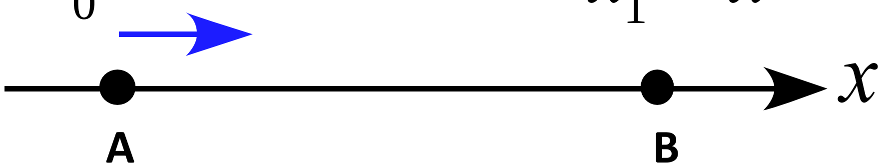
等加速度運動

等加速度

一定の加速度で直線運動

$v_0 = v_0$　　　　$v_1 = v$

$x_0 = 0$　　　　$x_1 = x$

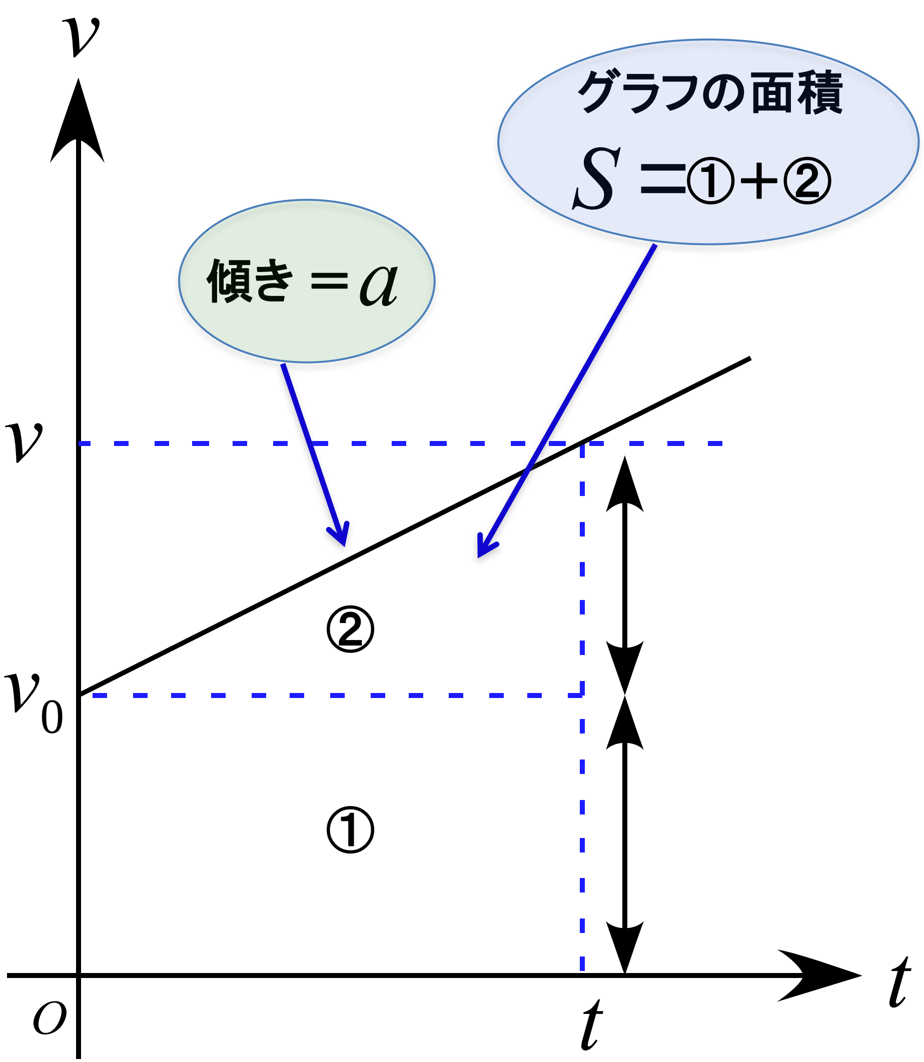


$t_0 = 0$　　　　$t_1 = t$

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\boxed{v = v_0 + at}$$

v - t グラフ



v - t グラフの面積

S =①+②

変位 = v - t グラフの面積

等加速度運動

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

t を消去

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

(参考)

平均速度

$$\overline{v} = \frac{v_0 + v}{2}$$

(a が一定の場合)

変位

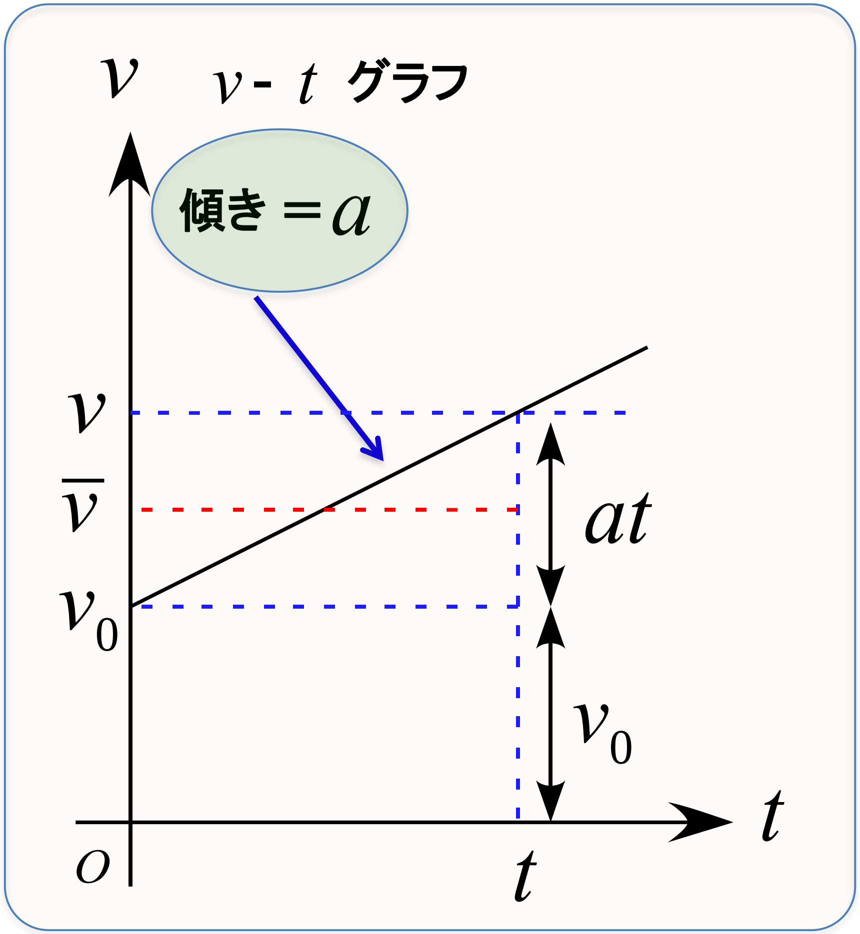
$$\Delta x = \overline{v}\Delta t$$

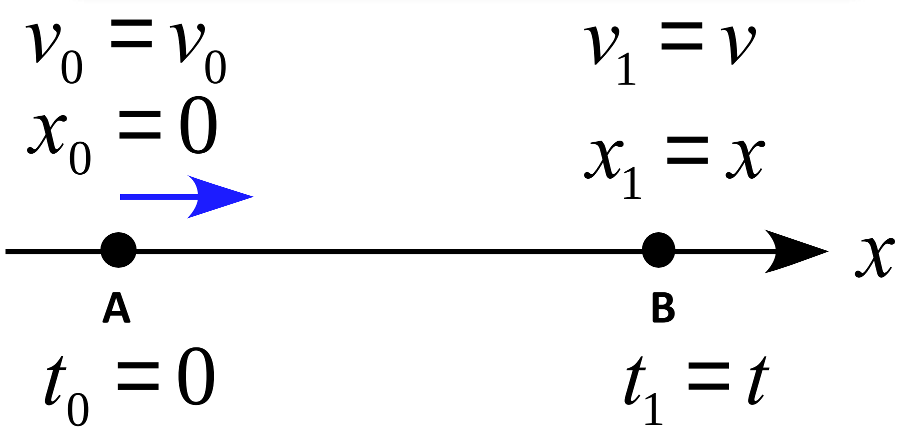
$$x - 0 = \frac{1}{2}(v + v_0)(t - 0)$$

$$x = \frac{1}{2}(v + v_0)t$$

$$x = \frac{1}{2}(v_0 + at + v_0)t$$

$$\boxed{x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$





等加速度運動

例題

等加速度運動の速度と変位の式

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

から、

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

を導け。

例題

等速度運動と等加速度運動の変位と加速度を定義式から導け。
(但し、初期条件は $t=0$ で $x=0$ とする。)

等速度運動 : $v=v_0$

等加速度運動 : $v=v_0+at$