例題

質量mの物体を地表から初速度 v_0 で鉛直投げ上げする運動を考える。
以下の問いに答えよ。

(1) 運動中に物体に作用する力を書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

(3) 運動方程式から速度 $v(t)$ を導け。

(4) 運動方程式から変位 $x(t)$ を導け。

(5) 最高点の位置 x_{max}を求めよ。

(6) 再び地表に戻ってくる時刻 t_1 を求めよ。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

仕事とエネルギーの関係

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を、xで積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int \boxed{m\frac{dv}{dt}} vdt = \int Fdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int Fdx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

力 Fが一定であるとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

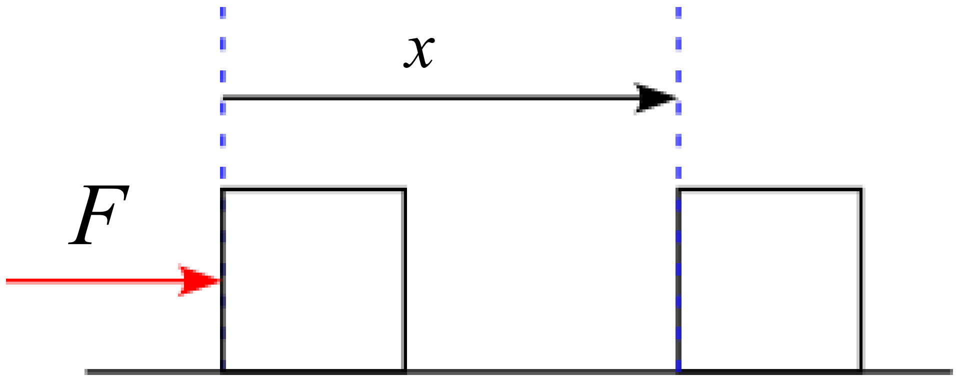
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事とエネルギー

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き

物体に力を加えて、
物体を移動させる事



運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

定義

力 Fが物体にした仕事W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

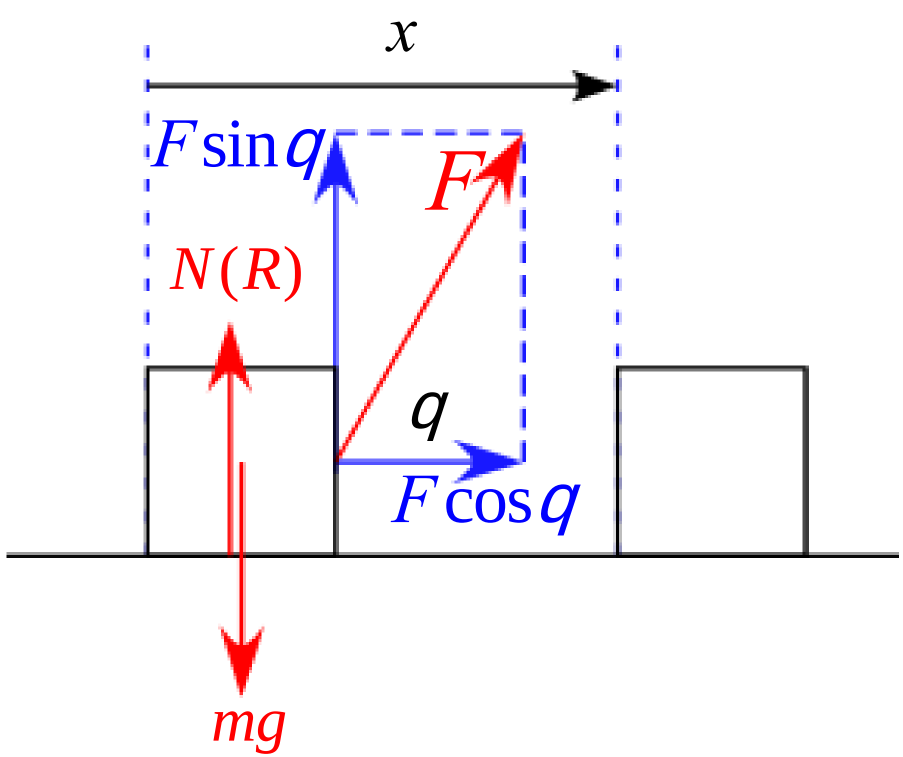
と定義される。

「力Fが物体に仕事 Wをした」
「物体は力 Fに仕事Wをされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]}[L] = \frac{[L^2M]}{[T^2]}$$

斜め上に引っ張る



運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta$$

移動方向の力だけが仕事をする

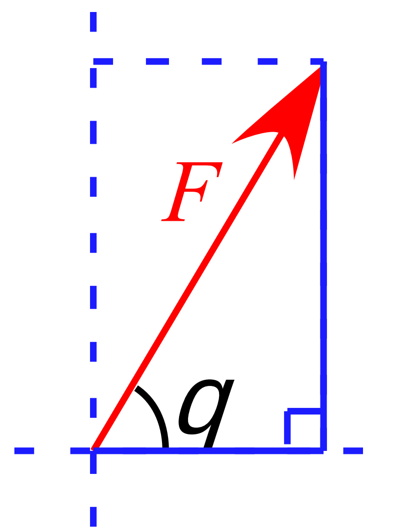
$$W = F\cos\theta \cdot x$$

物体に作用する力

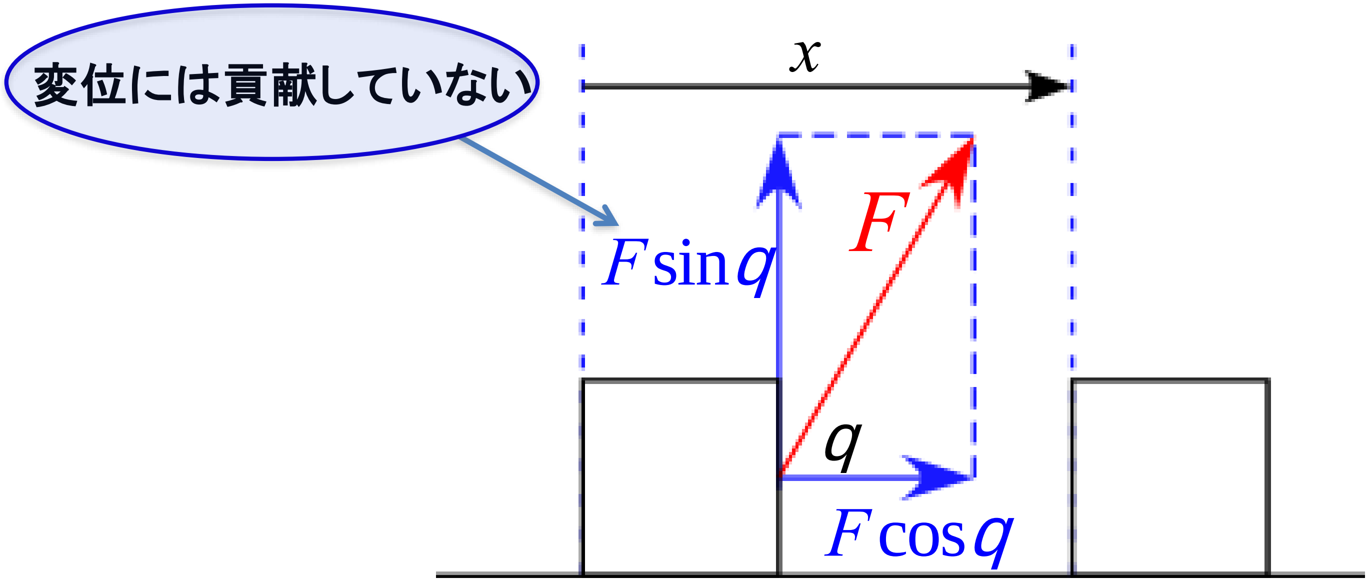
場の力：重力 mg
接触力：張力 F
垂直抗力 $N(R)$

仕事をしていない

垂直抗力：N
場の力：重力 mg
Fの y 成分：$F\sin q$



斜め上に引っ張る場合



力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

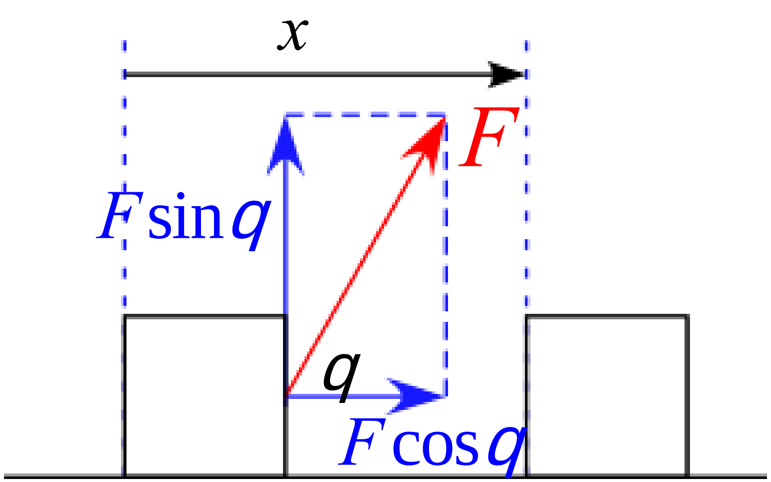
$$W = F\cos\theta \cdot x = Fx\cos\theta$$

仕事

作用した力×距離

- 力の向きと移動方向が同じ場合 : $W = Fx$
- 力の向きと移動方向が q の角をなす場合 : $W = Fx\cos q$

斜め上に引っ張る場合



運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta$$

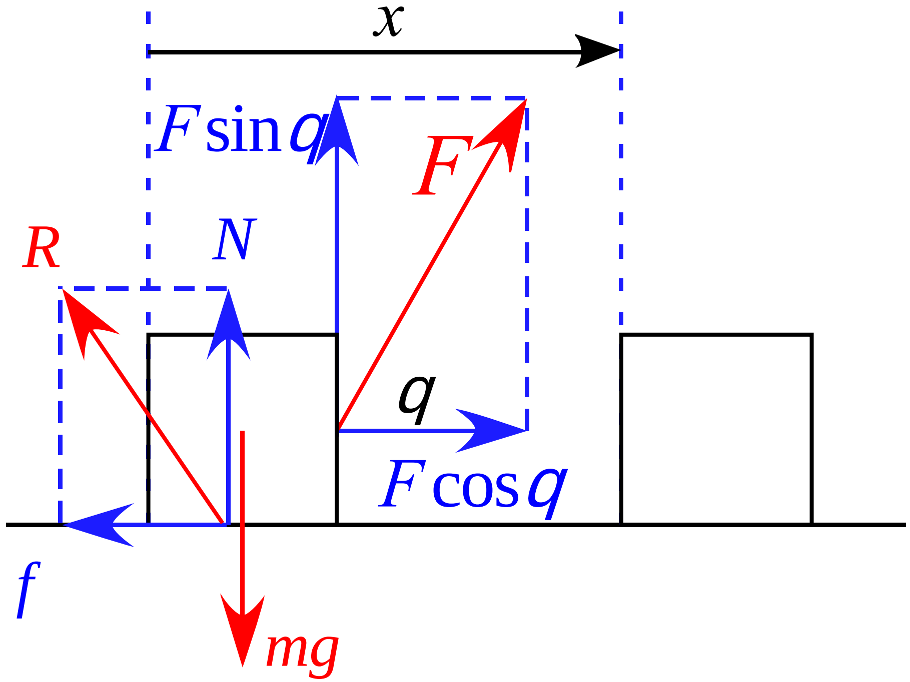
$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} F\cos dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[F\cos\theta x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\cos\theta\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事～摩擦力

斜め上に引っ張る＋摩擦力を考慮する場合



物体に作用する力

場の力：重力 mg

接触力：張力 F

抗力 R

仕事をしていない

垂直抗力：N

場の力：重力 mg

Fのy成分：$F\sin q$

移動方向の力だけが仕事をする

摩擦力 f は右向きに移動することに対して邪魔をしている

負の仕事

正の仕事：$W_1 = F\cos\theta \cdot x$

負の仕事：$W_2 = -f \cdot x$

仕事～摩擦力

斜め上に引っ張る＋摩擦力を考慮する場合

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta - f$$

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} \left(F\cos - f\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[F\cos\theta x - fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

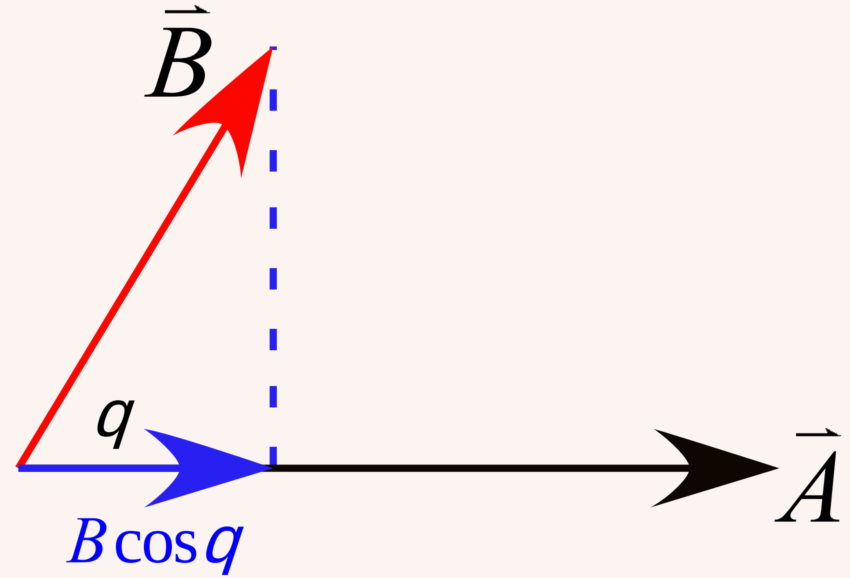
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\cos\theta\left(x_2 - x_1\right) - f\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

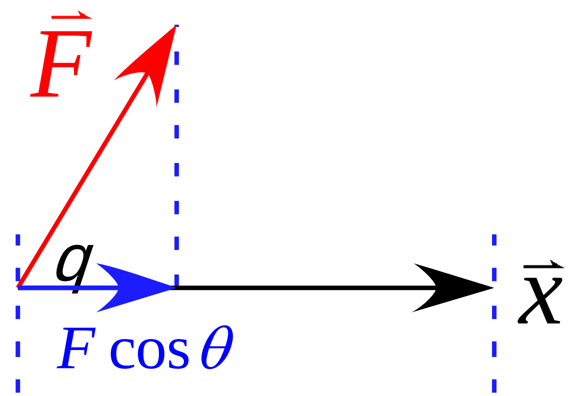


これを仕事に応用すると

$$\vec{F}\cdot\vec{x} = Fx\cos\theta$$

つまり、

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$



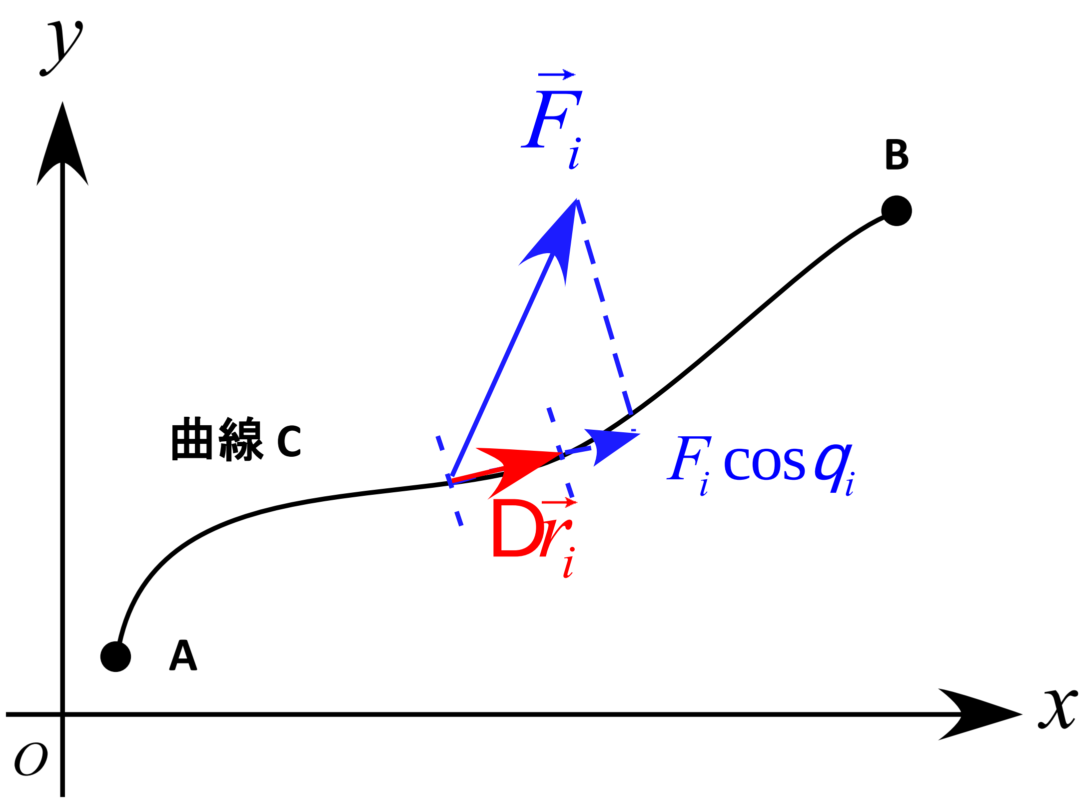
仕事～線積分

微小距離 $\Delta\vec{r}_i$ だけ移動したとすると

$$\Delta W_i = F \cdot \Delta r_i \cos\theta_i$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i$$

となる。



（参考）

$\Delta\vec{r}_i$ を限りなく小さくすると

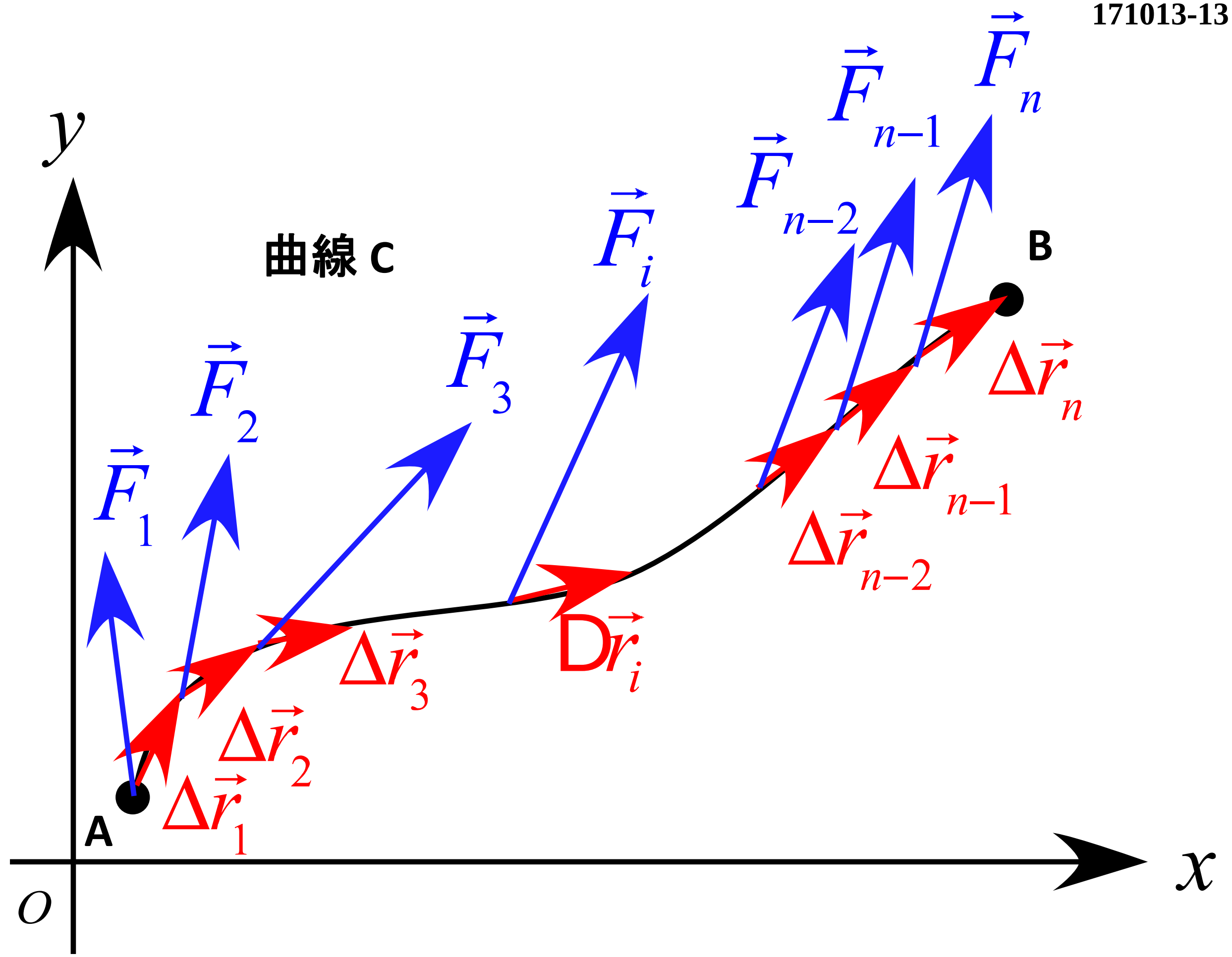
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

これを区間で積分すると

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

となる。

線積分



「仕事」は「力の距離積分」で計算することができる

仕事率

定義

仕事率：単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t}$$

国際単位：ワット　[W =J / S]

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L]\frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$