運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

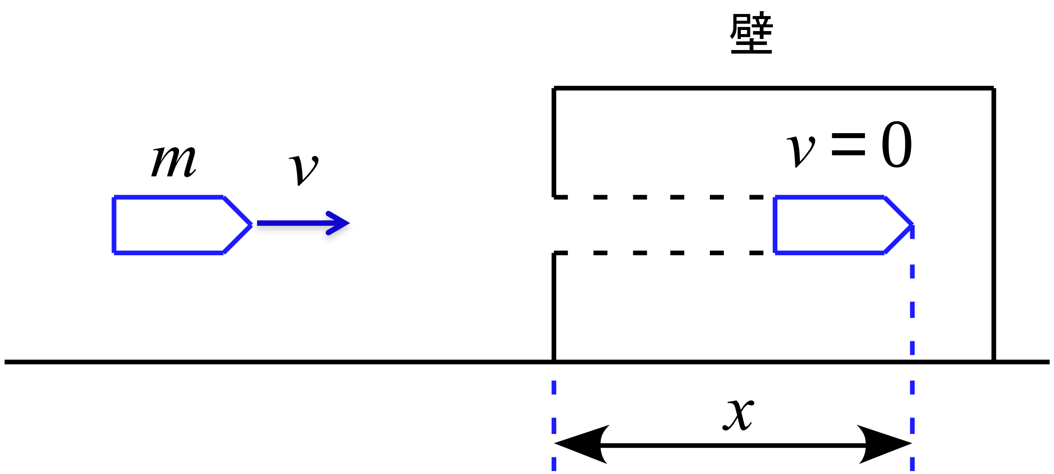
エネルギー

ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという

仕事をする能力＝エネルギー

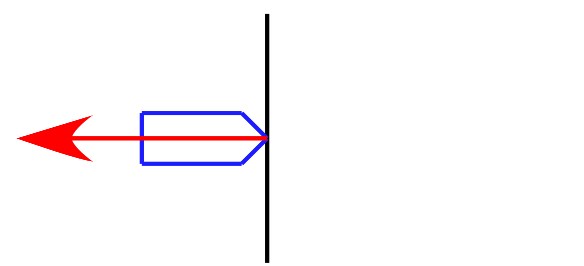
例

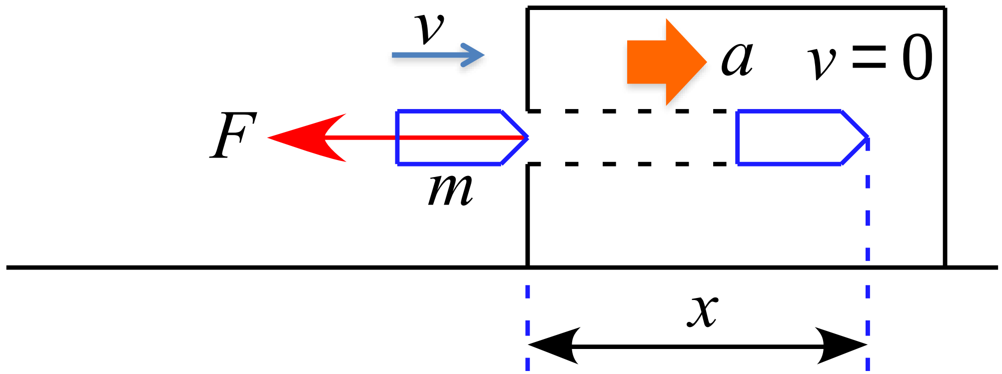
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





水平方向の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=-F$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx=\int(-F)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt=\int(-F)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int(-F)\,dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_0^x -F dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_v^0 = \left[-Fx\right]_0^x$$

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx + F\cdot 0$$

エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m\cdot v^2 = -Fx$$

最後の運動能力　最初の運動能力　弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$ [J = kg m^2 / s^2]

次元

$$[M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

重力加速度を g とし, 空気抵抗は無視できるものとするとき, 質量 m の物体を自由落下させた場合について考えよう。物体を離した位置を原点 O にとり鉛直下方を y 軸の正とする。図 4.37 のように, $y=0$ から $y=h(>0)$ まで落下した際に, 重力によって物体がなされた仕事 W は,

$$W = \int_0^h \boxed{}\, dy = \boxed{}$$

である。空欄に m, g, h を用いた式を書き込め。

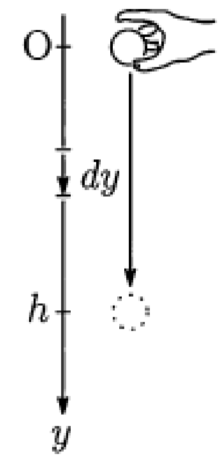


図 4.37: 重力のする仕事

エネルギー～自由落下

自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int mgdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int mgdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int mgdx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_A}^{v_B} = \left[mgx\right]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = mgh - mg\cdot 0$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh$$

エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

基準から力Fで $x=0$ から$x=h$ まで持ち上げたとする

運動方程式は

$$ma = F - mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int (F - mg)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int (F - mg)dx$$

$$\boxed{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt} = \boxed{\int (F - mg)dx}$$

運動エネルギーの変化

外力の仕事

エネルギー～位置エネルギー

準静的に持ち上げたとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \int_0^h (F - mg)\,dx$$

$$0 = \int_0^h F\,dx + \int_0^h (-mg)\,dx$$

$$\int_0^h mg\,dx = \int_0^h F\,dx$$

$$\left[mgx\right]_0^h = \int_0^h F\,dx$$

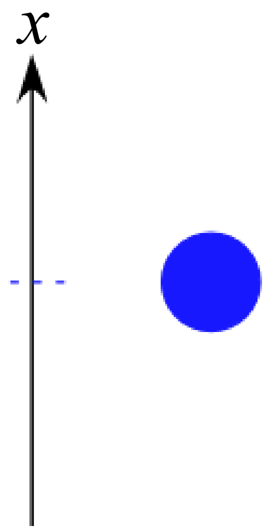
$$\boxed{mgh} = \boxed{\int_0^h F\,dx}$$

重力による
位置エネルギー

持ち上げた
仕事

エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-mgx\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + mgx$ は時間に対して

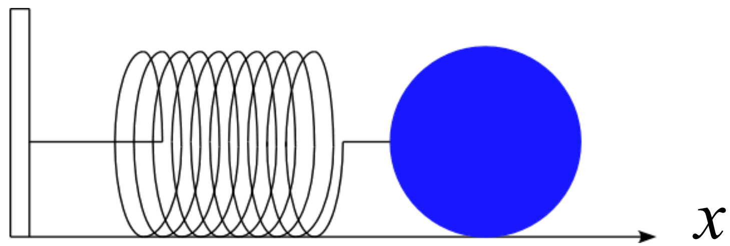
変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = 一定$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

バネの単振動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=-kx$$

と表すことができる

この両辺に $v=\frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt}=-kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2}\right)=0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2$は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}kx^2=\text{一定}$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$
$$x(t_1) = 0 \qquad x(t_2) = x$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2} = \boxed{\int_0^x Fdx}$$

エネルギーの変化量

$x=0$ から x まで
物体に働く力 F がした仕事

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v=\dfrac{dx}{dt}$ をかける → 単位時間あたりの変位をかけた

$$mv\frac{dv}{dt}=F\frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する → 最初から最後まで時間に対して和を取る

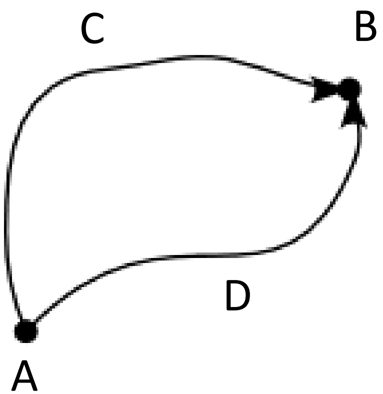
$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}F\frac{dx}{dt}dt$$

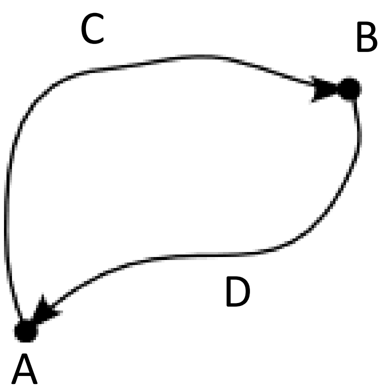
最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路





点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える

ここでの運動が保存力による運動とすると

点A－C－点Bの経路を通り、
そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A－D－点Bの経路を通り、同じ道を通って
点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

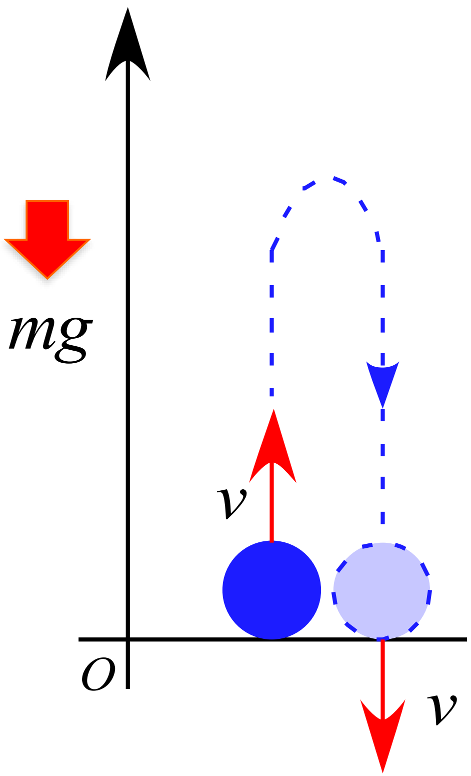
よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える



鉛直投げ上げ運動

この運動における仕事は

$$W=\int_0^0 Fdx=\int_0^0(-mg)\,dx=0$$

元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる

↓

保存力