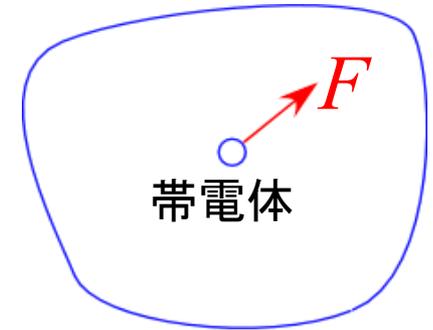


電場（電界）

ある任意の空間に、帯電体を持ってくる
 この帯電体にクーロン力（静電気力）が働く状態であれば、
 「この空間に電場（電界）が存在する」

任意の空間



電場の有無は電荷を持ってくれば判別できる

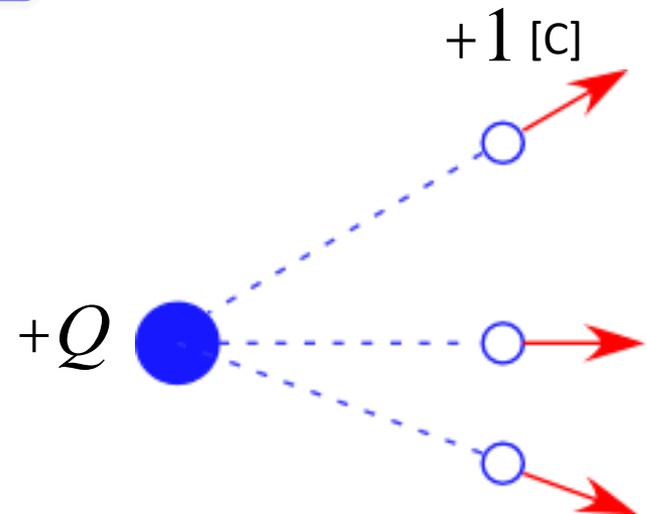
電場があるかどうか試しに、
 試験電荷 $+1$ [C] を置いてみる

単位正電荷

ある空間に $+Q$ [C] 電荷があるとする
 すると、 $+Q$ [C] の電荷による斥力が働く
 つまり、この試験電荷にクーロン力が
 働いているのでこの空間には「電場」が
 存在していることになる

考え方を変えると

$+Q$ [C] の電荷の存在によって空間が変化し力を受ける



電場(電界)

試験電荷1個に着目して
クーロン力を考えると

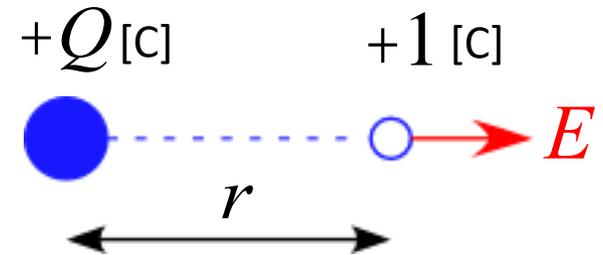
$$F = k \frac{Qq}{r^2} = k \frac{Q \cdot 1}{r^2} = k \frac{Q}{r^2}$$

この F は $+1$ [C] 当たりのクーロン力と考えられ、
これが電場 E である

任意の $+q$ [C] 電荷を持ってくれば

$$F = qE$$

となり、クーロン力と同じになります。



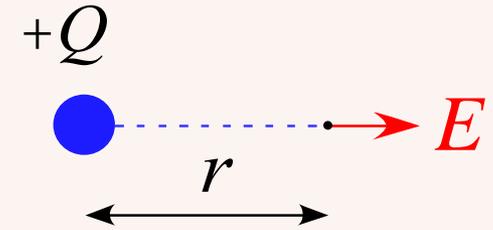
電場（電界）

定義

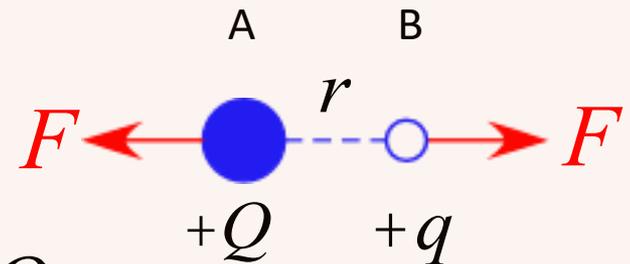
電場は $+1$ [C] に働く力で定義される

点電荷 $+Q$ [C] から r [m] だけ離れた電場 E の大きさは

$$E = k \frac{Q}{r^2} \quad [\text{N/C}]$$



クーロンの法則



$$F = k \frac{Qq}{r^2} \quad [\text{N}]$$

電場～電気力線

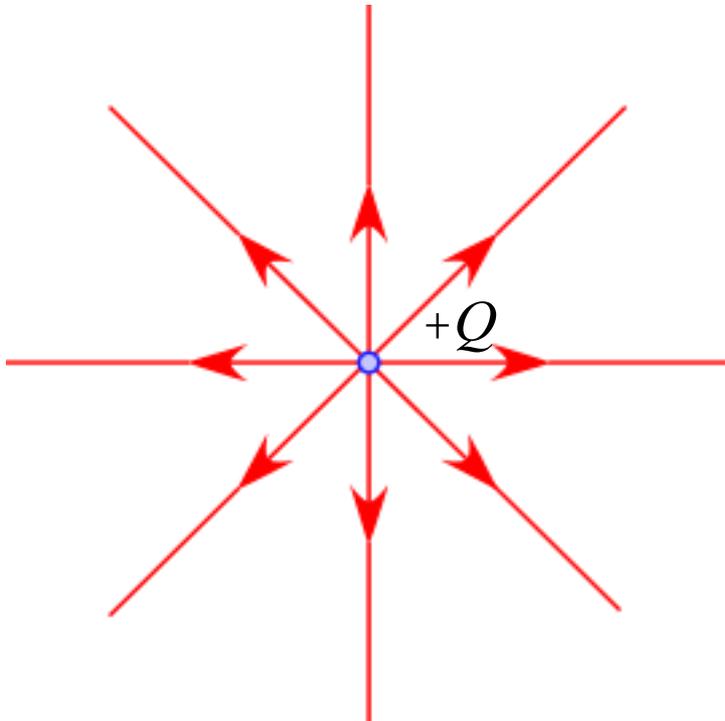
電気力線

電場の様子を視覚的に表す方法

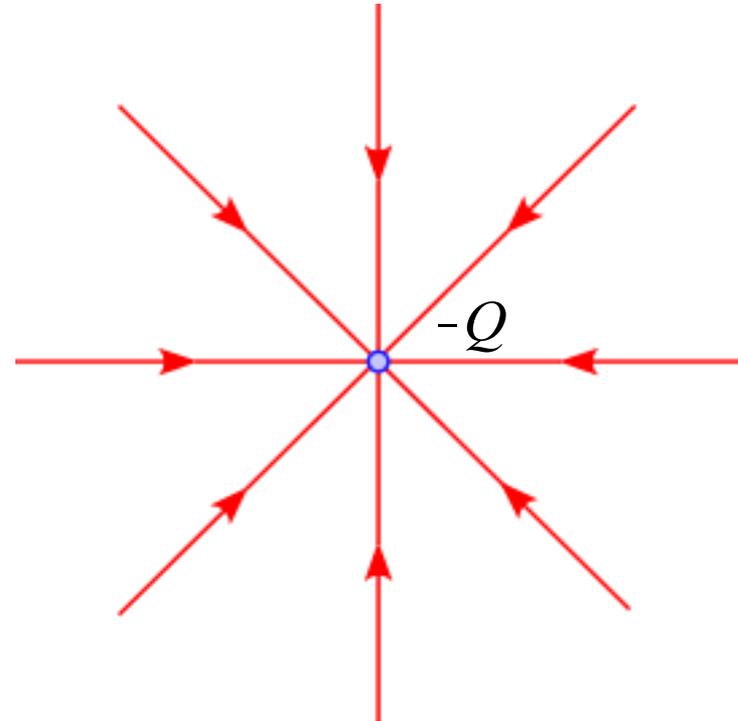
試験電荷が静電気力を受けて移動する道筋

+ Q の電荷の存在によって空間が変化する

点電荷 + Q [C] が存在

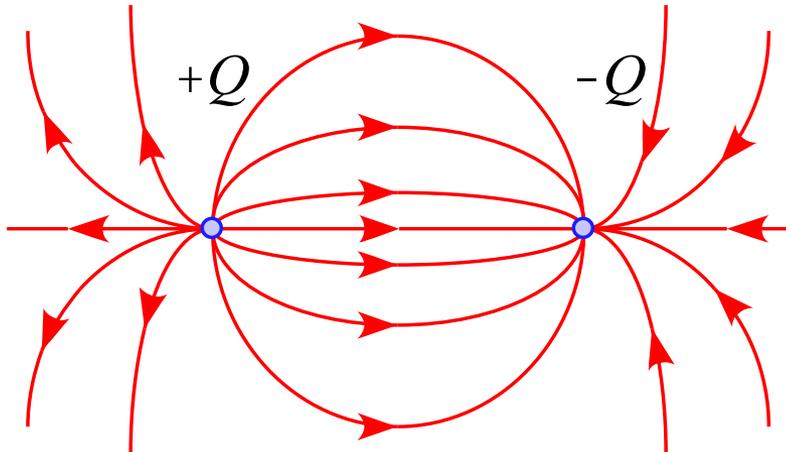


点電荷 - Q [C] が存在

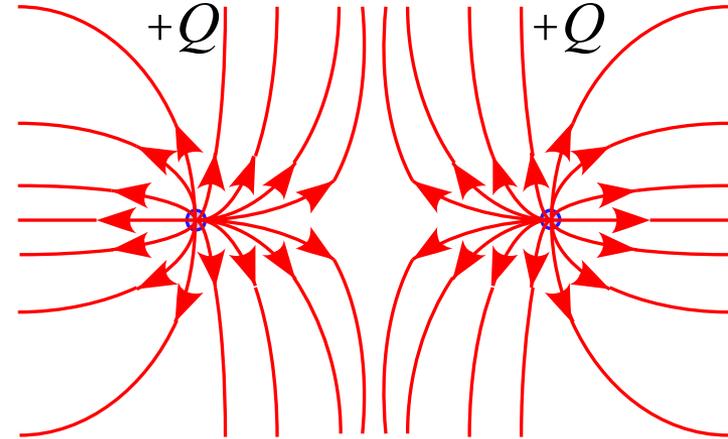


電場～電気力線

点電荷 $+Q$ [C] と $-Q$ [C] が存在



点電荷 $+Q$ [C] と $+Q$ [C] が存在



電気力線の性質

- ・電気力線は正電荷から始まり、負電荷で終了する(途中で消えない)
- ・電荷が1個しかない場合は、無限遠方まで続いている
- ・電気力線の各点の接線は、その点の電場の向きを示している
- ・電気力線の密集地では、電場の大きさが大きい
- ・電気力線自体は短くなろうとする
- ・電気力線は交差しない

電場～静電エネルギー

電場中の電荷には静電気力(クーロン力)が働く

静電気力による位置エネルギー

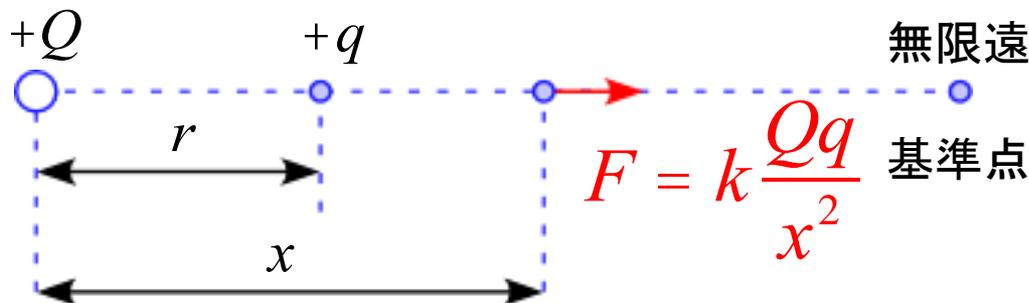


静電エネルギー

点電荷 Q から距離 r の位置にある点電荷 q がもつ静電エネルギー

$$U = k \frac{Qq}{r} \quad [\text{J}]$$

但し、 U の基準は $U = 0$ となる無限遠方 ($r = \infty$) である



無限遠からクーロン力に
逆らって移動させる

静電エネルギー～電位

電位

試験電荷 $+1$ [C] がもつ静電エネルギー



単位電荷当たりの位置エネルギー

即ち、

静電エネルギー U 、着目している電荷 q とすると

電位 V は

$$V = \frac{U}{q}$$

$+1$ [C] の電荷を、静電気力に逆らって
基準点から考えている点まで運ぶのに要する仕事

となる

$+1$ [C] の電荷に 1 [J] の仕事をして、基準点からある場所まで移動させたとき、
そのある場所の電位を 1 [V] とする。

静電エネルギー～電位

点電荷の場合

$$V = \frac{U}{q} = k \frac{Qq}{r} \cdot \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r}$$

となる

これは、無限遠を基準とした、

Q [C] の電荷から r [m] 離れた点での電位 V [V] を表している

電位～等電位面

等電位面

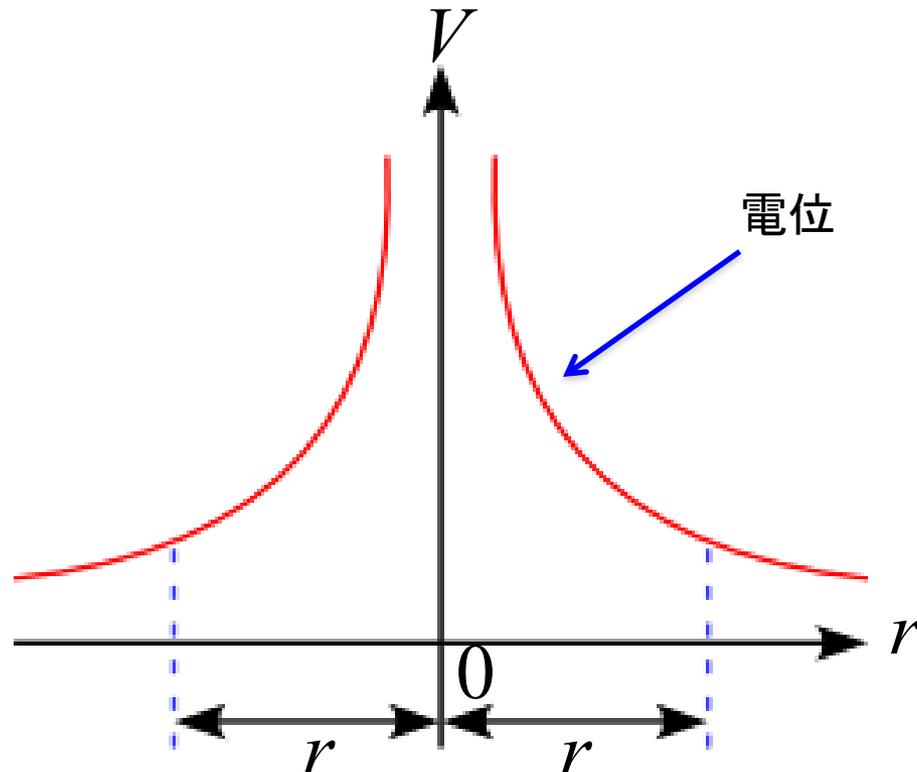
電位が等しい平面、曲面

→ 単位電荷当たりの位置エネルギー

点電荷 $+Q$ が1つ存在しているとする
電位 V は

$$V = \frac{U}{q} = k \frac{Q}{r}$$

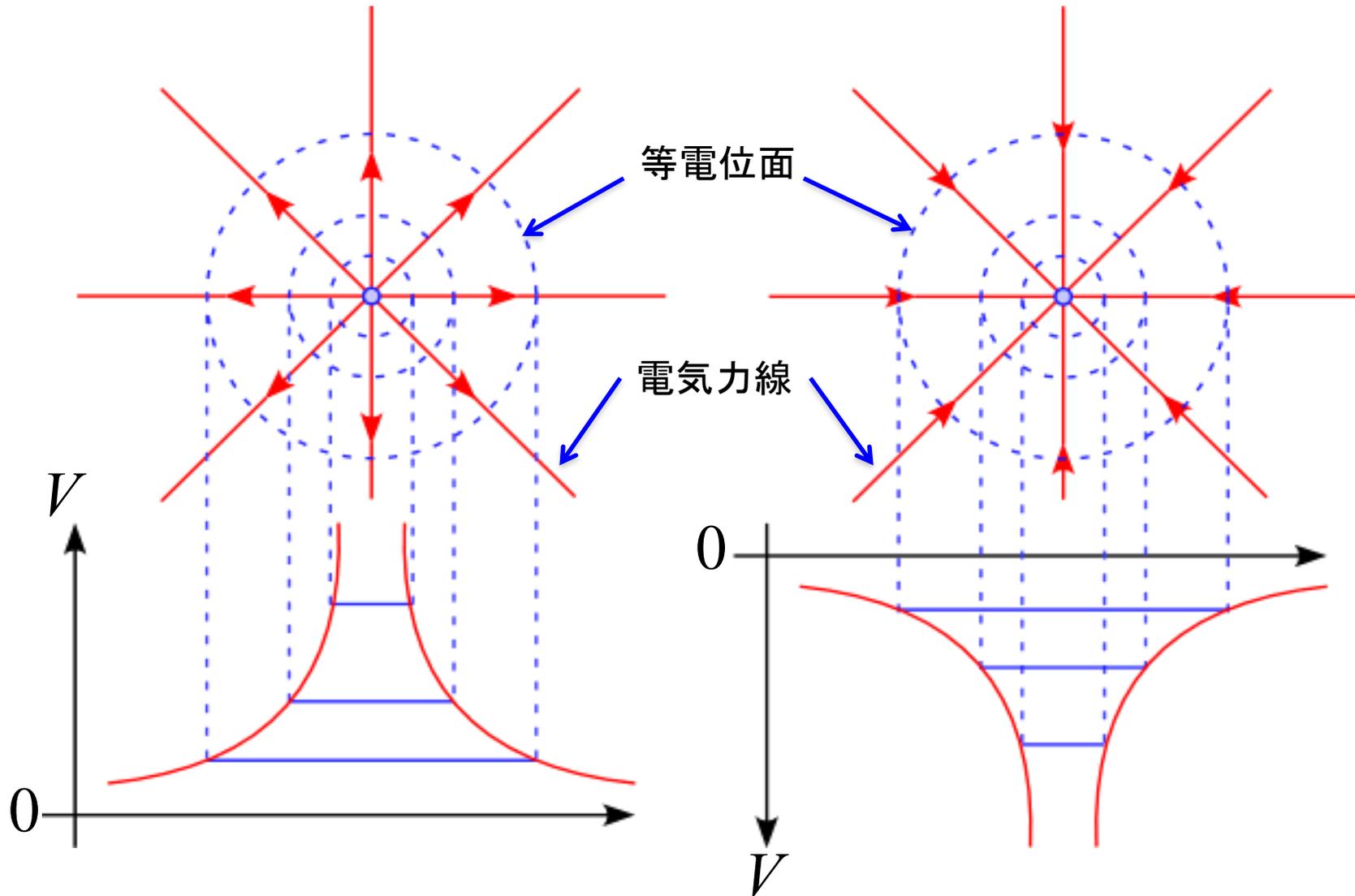
と表せる



電位～等電位面

点電荷 $+Q$ [C] が存在

点電荷 $-Q$ [C] が存在



(参考)

クーロン力～ベクトル

クーロン力のベクトル表示

図のように2つの点電荷があるとする

AB間の距離は

$$|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$$

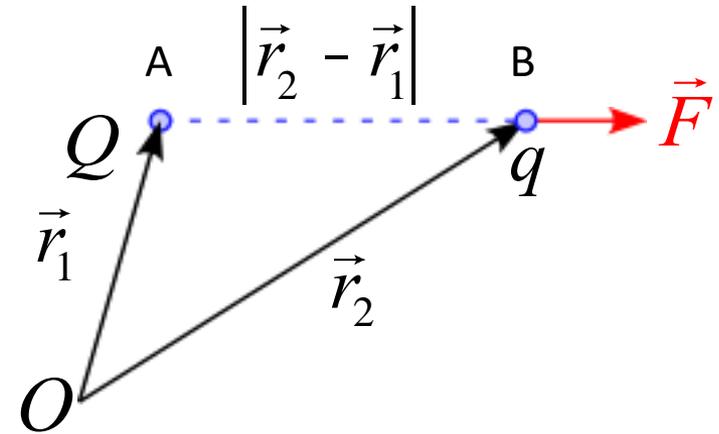
であるから、
クーロン力 \vec{F} の向きを表す単位ベクトル \vec{i} は

$$\vec{i} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

となるので

$$\vec{F} = k \frac{Qq}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

と表せる



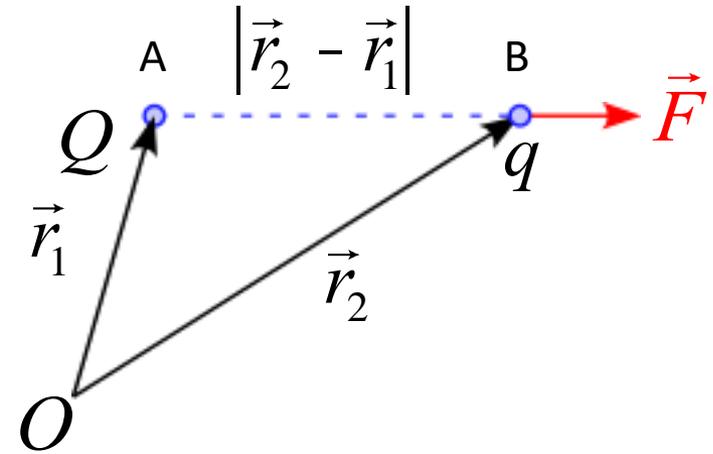
(参考)

電場～ベクトル

電場 \vec{E} は
 単位電荷に働くクーロン力なので
 Aの点電荷 Q が、Bの位置につくる電場は

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{\vec{F}}{q} \\ &= k \frac{Q}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\end{aligned}$$

と表せる



クーロン力～静電エネルギー

図において、点電荷 q をクーロン力に逆らってBからCまで運ぶのに必要な仕事を考える

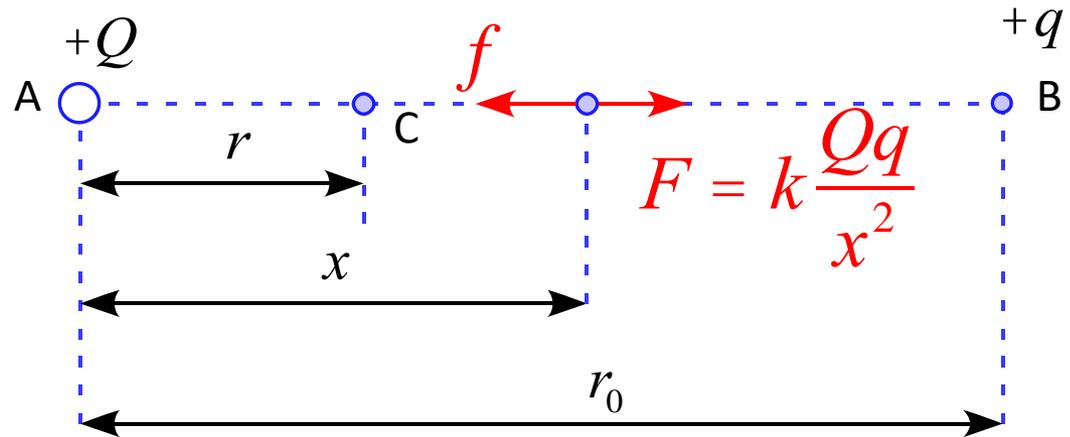
Aから距離 x の地点の力は

$$F = k \frac{Qq}{x^2}$$

よって運動方程式は

$$ma = k \frac{Qq}{x^2} - f$$

$$m \frac{dv}{dt} = k \frac{Qq}{x^2} - f$$



両辺を x で積分すると

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int \left(k \frac{Qq}{x^2} - f \right) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int \left(k \frac{Qq}{x^2} - f \right) dx$$

クーロン力～静電エネルギー

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int k \frac{Qq}{x^2} dx + \int (-f) dx$$

$$t = 0 \text{ で } x = r_0, v = 0$$

準静的過程

$$t = t' \text{ で } x = r, v = 0$$

$$\left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_0^0 = \left[-k \frac{Qq}{x} \right]_{r_0}^r - \int_{r_0}^r f dx$$

$$0 = -kQq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) - \int_{r_0}^r f dx$$

$$kQq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) = - \int_{r_0}^r f dx$$

クーロン力～静電エネルギー

ここで、基準点Bを無限遠とすると

$$kQq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = - \int_{r_0}^r f dx$$

$$k \frac{Qq}{r} = - \int_{r_0}^r f dx$$

$$U = W_{\text{手}} = k \frac{Qq}{r}$$

となる

(参考)

クーロン力～静電エネルギー

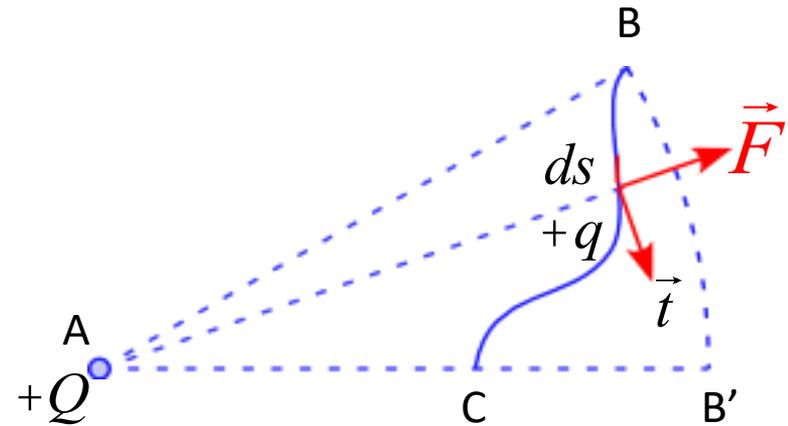
A点の点電荷 Q がつくる電場の中を、B点から点電荷 q を任意の経路を経てC点まで運ぶ仕事を考える

短い区間 ds を移動するときに必要な仕事は

$$dW = -\vec{F} \cdot ds\vec{t}$$

よって求める仕事は

$$\begin{aligned} W &= -\int_{BC} (\vec{F} \cdot \vec{t}) ds \\ &= -q \int_{BC} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds \end{aligned}$$



ここで、A点を中心とする半径ABの円を考え、ACの延長線上の点をB' とすると経路BB'は移動方向と力の向きが垂直なので仕事は0であるから

$$W = -q \int_{BC} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds = -q \int_{B'C} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds$$

となる

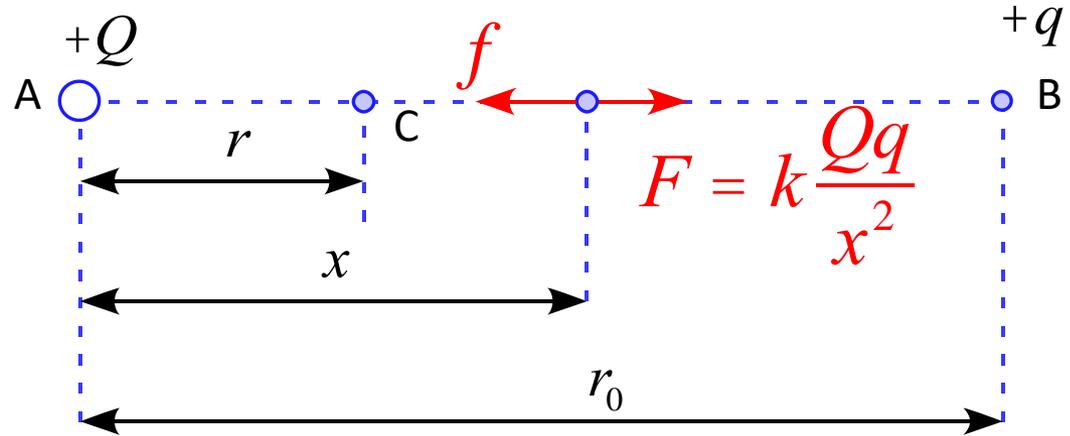
(参考)

クーロン力～静電ポテンシャル

これは図の様に簡単に考えられるので
以前の計算と同様に

$$W_{\text{手}} = kQq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right)$$

となる



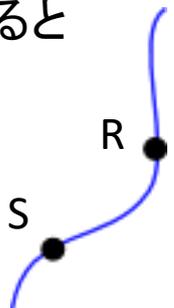
電位の定義から電位 (静電ポテンシャル) を f とおくと

$$\phi = \frac{W}{q} = - \int_{BC} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds$$

ある任意の点R、点Sを考え、それぞれの静電ポテンシャルを f_R, f_S とすると
点Sに対する点Rの静電ポテンシャルは

$$\phi_R - \phi_S = - \int_{RS} (\vec{E} \cdot \vec{t}) ds$$

となる



(参考)

クーロン力～静電ポテンシャル

ここで、RS間の距離が微小の場合

$$\phi_R - \phi_S = -(\vec{E} \cdot \vec{t}) \Delta s$$

$$\vec{E} \cdot \vec{t} = - \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\phi_R - \phi_S}{\Delta s}$$

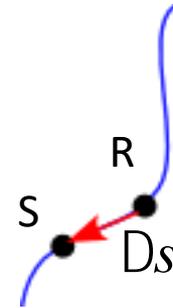
\vec{RS} 方向の電場の成分

これを3次元空間に拡張すると

電場の x 成分は $\vec{E} \cdot \vec{i}$ となるので

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{i} = - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\phi(x + \Delta x, y, z) - \phi(x, y, z)}{\Delta x}$$

$$= - \frac{\nabla \phi(x, y, z)}{\nabla x}$$



(参考)

クーロン力～静電ポテンシャル

同様に、電場の y, z 成分は $\vec{E} \cdot \vec{j}, \vec{E} \cdot \vec{k}$ となるので

$$\vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial y} \quad \vec{E}(x, y, z) \cdot \vec{k} = -\frac{\partial \phi(x, y, z)}{\partial z}$$

よって

$$\vec{E}(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}, -\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}, -\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} \right)$$

従って、

$$E(\vec{r}) = \left(-\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x}, -\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y}, -\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z} \right)$$

$$= -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r})$$

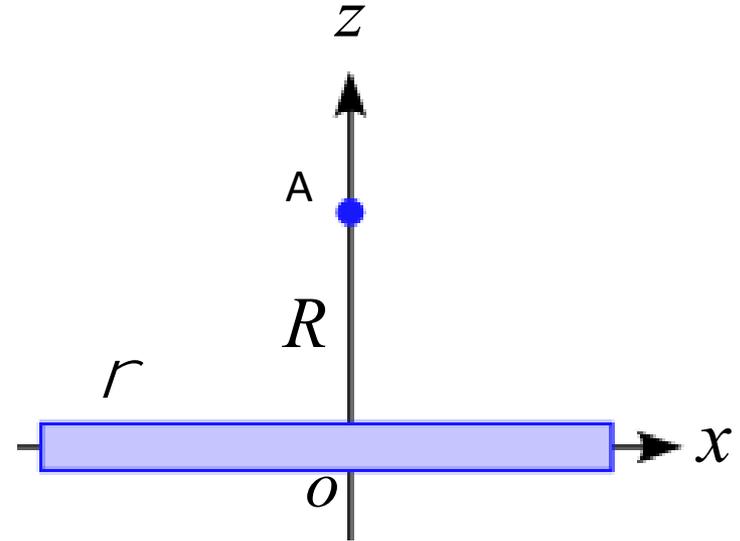
∇f
grad f
 f の「勾配」

クーロンの法則～線電荷

単位長さあたりの電気量(線密度)が ρ である無限に長い直線上の電荷がある。

直線から距離 R にある点Aでの電場の大きさを求めよ。

但し、線の太さは無視できるものとする。



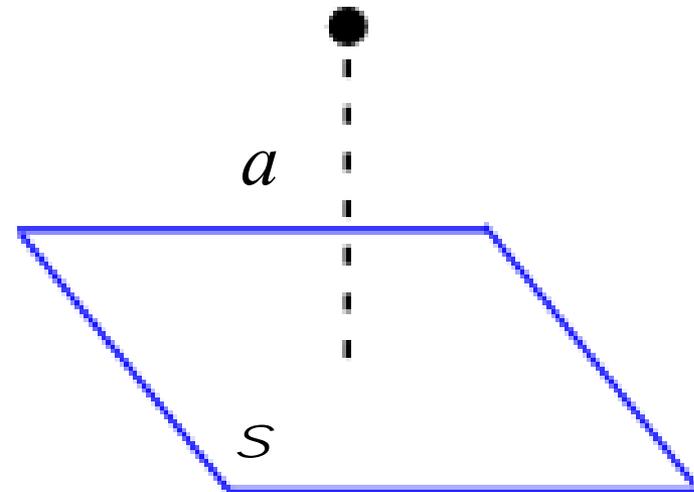
クーロンの法則～面電荷

無限に広い平面がある。

この平面上に面密度 S で一様に電荷が分布しているとする。

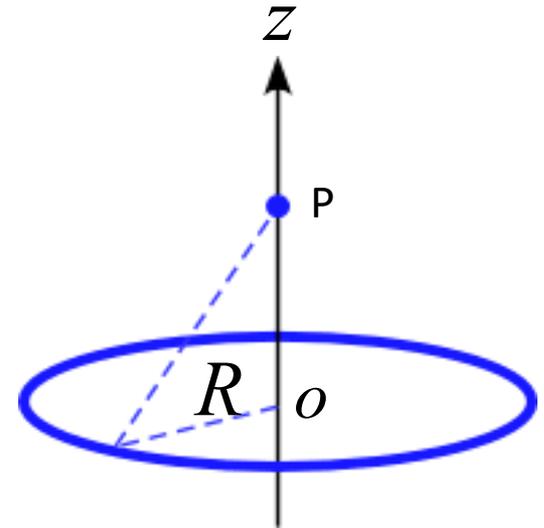
この平面から距離 a だけ離れた点での電場の大きさを求めよ。

但し、真空誘電率は ϵ_0 とする。



クーロンの法則～リング状電荷

図のような z 軸を中心軸にもつ半径 R のリング状の電荷がある。
単位長さあたりの電荷量(線密度)が λ である場合、
 z 軸上の点 P での電場の大きさを求めよ。



クーロンの法則～周辺のまとめ

クーロン力
(静電気力)

$$F = k \frac{Qq}{r^2}$$

$$\text{N} \cdot \text{m}^2 / \text{C}^2 \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} = [\text{N}]$$

$$\times \frac{1}{q}$$

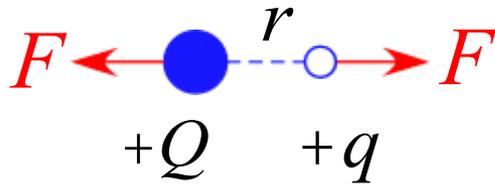


電場

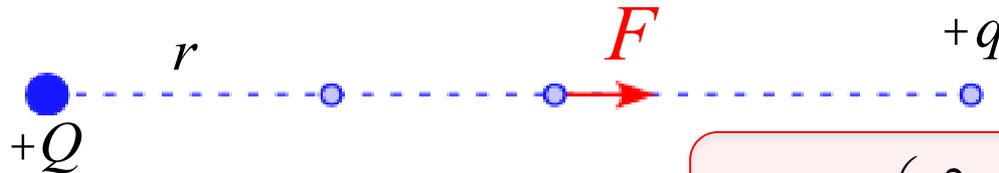
+1 [C] 当たりのクーロン力

$$E = \frac{F}{q} = k \frac{Qq}{r^2} \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r^2}$$

$$\frac{\text{N}}{\text{C}} = [\text{N/C}]$$



仕事(力の距離積分)



静電エネルギー

F に逆らってする仕事

$$U = W = -\int F dx = -\int_{r_0}^r \frac{Qq}{r^2} dx$$

$$= kQq \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} \right) \quad r_0 \rightarrow \infty \quad \xrightarrow{\text{無限遠基準}} \quad = k \frac{Qq}{r}$$

$$\times \frac{1}{q}$$



電位: V, f

+1 [C] 当たりの静電エネルギー

+1 [C] の電荷に 1 [J] の仕事を 1 [V]

$$V = \frac{U}{q} = k \frac{Qq}{r} \frac{1}{q} = k \frac{Q}{r}$$

$$E(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r})$$