2016講義ノート
物理学基礎 (力学)
工学部・機械工学科

Introduction

物理 (Physics)

扱う範囲

非常に小さい

クオーク

quark

～10^{-18} [m]

45 桁

非常に大きい

宇宙

universe

～10^{27} [m]

分野

古典物理学 (マクロな世界)

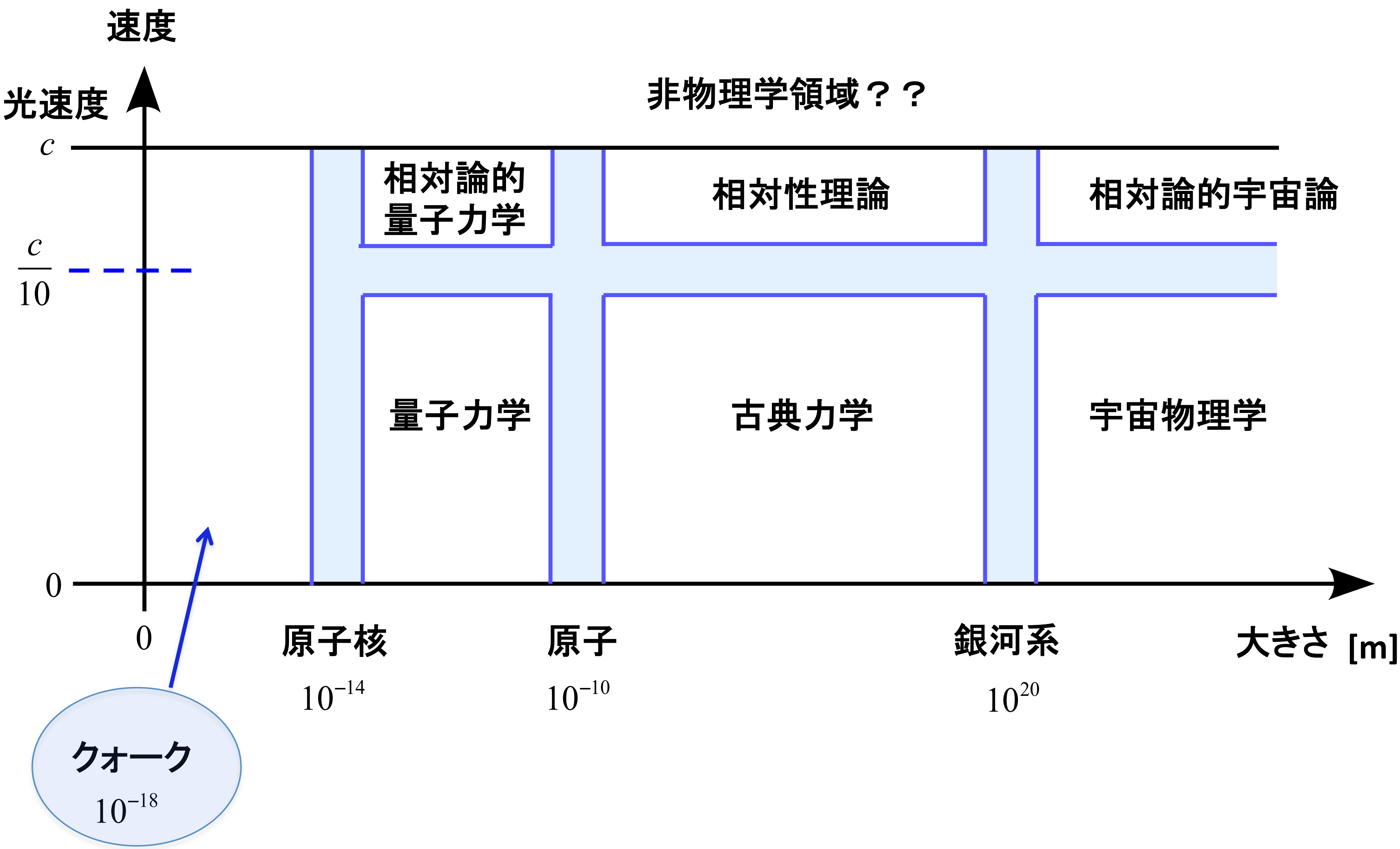
ニュートン力学
解析力学
古典電磁気学
古典熱力学

量子力学が発達

現代物理学 (ミクロな世界)

量子力学
量子統計力学
特殊相対性理論
一般相対性理論
その他、専門分野

Introduction



物理量～単位系

物理量　　MKS単位系　　（参考）

Length :長さ	Time :時間	Mass :質量
m	sec	kg
[L]	[T]	[M]

長さ: 1m
光が真空中で1/299792458 s の間に進む距離
時間: 1s
133Cs原子が吸収する電磁波の周期の9192631770倍
質量: 1kg
パリの国際度量衡局に保管されている
白金イリジウム合金円柱の質量

国際単位系の基本単位

物理量	単位記号	名称
長さ	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (second)
電流	A	アンペア
熱力学的温度	K	ケルビン
物質量	mol	モル
光度	cd	カンデラ
平面角	rad	ラジアン
立体角	sr	ステラジアン

国際単位系(SI)
国際度量衡委員会が基本量の標準を定めた単位系

次元解析～誘導単位

次元解析

次元：物理的性質を表している

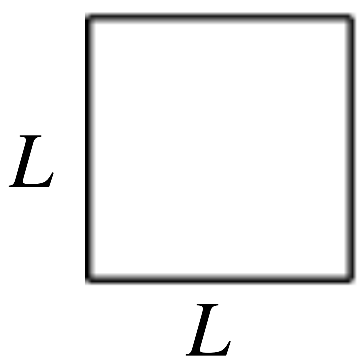
式の導出などの検証の手段になる

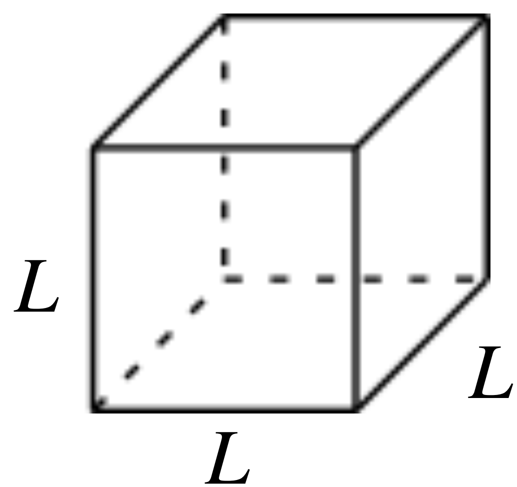
計算をしていて、何かオカシイ？
と思ったら、次元解析をするとよい

例

物理量	関係式	単位記号	次元
面積 (Square)	$S = L \times L$	m^2	[L^2]
体積 (Volume)	$V = L \times L \times L$	m^3	[L^3]
密度 (Density)	$\rho = m / V$	g /cm^3	[M / L^3]

← CGS 単位系





次元解析～誘導単位

物理量	関係式	単位記号	次元
速度、速さ (Velocity , Speed)	$v =$	m / s	[LT^{-1}]
加速度 (Acceleration)	$a =$	m / s^2	[LT^{-2}]
力 (Force)	$f =$	kg・m / s^2 ＝ N	[LMT^{-2}]
仕事 (Work)	$W =$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
運動エネルギー (Kinetic energy)	$K =$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
力積 (Impulse)	$I =$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]
運動量 (Momentum)	$p =$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]

接頭語

単位の10の整数乗倍を表すために接頭語を用いる

例

10^3 m=1 km

k は10^3を示している

番外編

オングストローム (angstrom)

$\text{Å} = 10^{-10}$

国際単位系における接頭語

接頭語	記号	べキ
ペタ (peta)	P	10^{15}
テラ (tera , terra)	T	10^{12}
ギガ (giga)	G	10^{9}
メガ (mega)	M	10^{6}
キロ (kilo)	k	10^{3}
ヘクト (hecto)	h	10^{2}
デカ (deka , deca)	da	10^{1}
デシ (deci)	d	10^{-1}
センチ (centi)	c	10^{-2}
ミリ (milli)	m	10^{-3}
マイクロ (micro)	μ	10^{-6}
ナノ (nano)	n	10^{-9}
ピコ (pico)	p	10^{-12}
フェムト (femto)	f	10^{-15}

例

$1\ \text{km} = \qquad \text{m}$

$= \qquad \text{m}$

$1\ \text{cm} = \qquad \text{m}$

$100\ \text{cm} = \qquad \text{m}$

$= \quad \text{m}$

数学の復習

力学基礎演習

1.1 幾何学
1.2 平均変化率
1.2.1 微分係数
1.2.2 導関数
1.3 不定積分
1.3.1 定積分
3.4 時間微分と時間積分

1.1 幾何学

問題 1 $AC = 1$, $\angle C = 90°$ の直角三角形 ABC について, 下記空欄に値 (実数) を書き込め。

(1) $\angle A = 60°$ のときには, $BC = \boxed{}$ だから, $\tan 60° = \boxed{}$ であり, $AB = \boxed{}$ だから,

$$\sin 60° = \frac{\boxed{}}{2}, \cos 60° = \frac{\boxed{}}{2}$$

である。

(2) $\angle A = 45°$ のときには, $BC = \boxed{}$ だから, $\tan 45° = \boxed{}$ であり, $AB = \boxed{}$ だから,

$$\sin 45° = \frac{1}{\boxed{}}, \cos 45° = \frac{1}{\boxed{}}$$

である。

底角 $\angle A = \theta$, $\angle C = 90°$ とする直角三角形 ABC において (下図), 頂点 A, B, C に向かい合う辺をそれぞれ a, b, c とする場合の二辺の比,

$$\sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}, \quad \tan\theta = \frac{a}{b}$$

を " **三角比** " という。

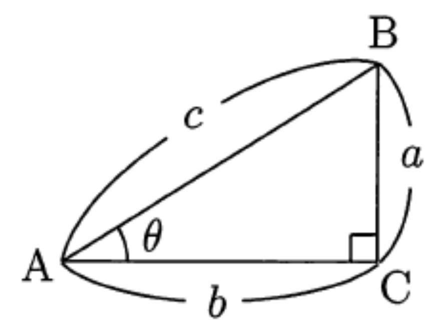


図 1.1: 底角 θ の直角三角形

問題 2 下記空欄に定数を書き込め。

中心角 x°, 半径 r の扇形 (図 1.2) の孤の長さを ℓ とする。円周率 π を用いて ℓ を表すと,

$$\ell = \boxed{}\, r \times \frac{x^\circ}{360^\circ} \qquad \cdots\cdots \text{①}$$

とかける。① において, $\dfrac{\ell}{r} = \theta\,[\mathrm{rad}]$ とすれば,

$$\theta = \boxed{} \times \frac{x^\circ}{180^\circ} \qquad \cdots\cdots \text{②}$$

とかけるから, 180° は $\boxed{}$ [rad] である。② で $\theta = 1\,[\mathrm{rad}]$ を代入し, 円周率を 3.14 とすると, 小数点第 2 位を四捨五入して, $x^\circ = \boxed{}\,[^\circ]$ を得る。

度数法は, 直角の 90 分 (ぶん) の 1 を 1° と定義することで, 角を計る方法である。これに対して, 孤度法は, 半径と孤の長さがそれぞれ 1 の扇形の中心角を 1 rad と定義することで, 角を計る方法である。

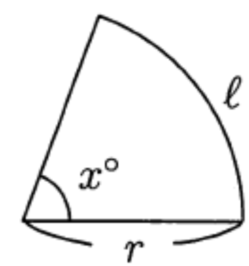


図 1.2: 扇形の中心角と半径

1.2 平均変化率

問題 4 二次関数 $y = f(x)$ のグラフが図 1.6 で与えられる場合について，下記空欄に定数 (整数) を書き込め。

(1) x が 0 から 10 まで変化する場合の関数 $f(x)$ の平均変化率を $\bar{f}_1$ とおく。$y = f(x)$ のグラフは，原点 O と点 (10, 5) を通るから，

$$\bar{f}_1 = \frac{\boxed{}}{10} = \frac{\boxed{}}{2}$$

である。

(2) x が 10 から 20 まで変化する場合の関数 $f(x)$ の平均変化率を $\bar{f}_2$ とおく。$y = f(x)$ のグラフは，二点 (10, 5), (20, 20) を通るから，

$$\bar{f}_2 = \frac{\boxed{} - \boxed{}}{20 - 10} = \frac{\boxed{}}{2}$$

である。

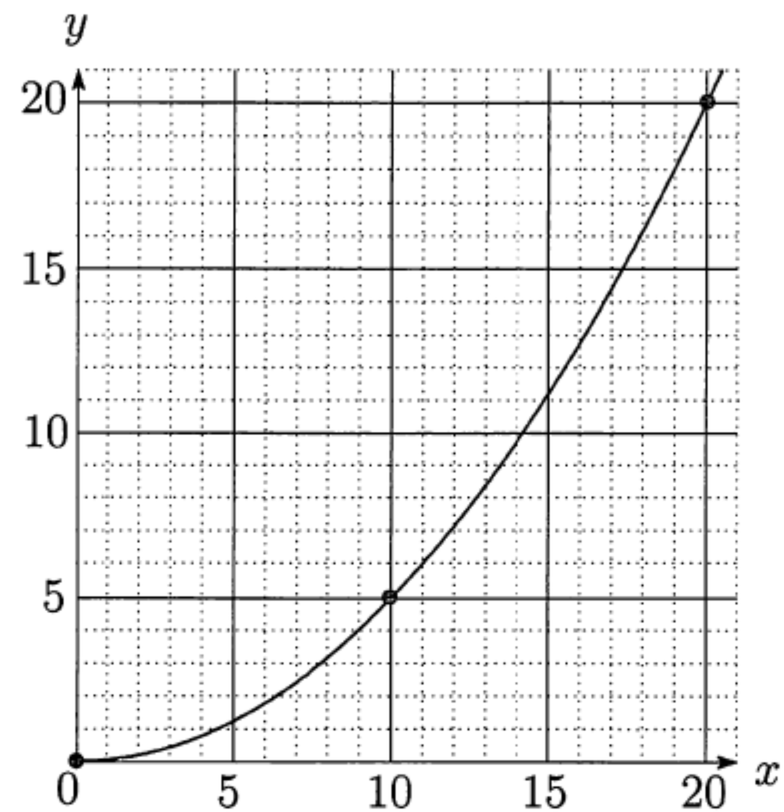


図 1.6: (0, 0), (10, 5), (20, 20) を通る二次関数

力学基礎演習 1.2

(3) 二次関数 $y = f(x)$ は, a, b, c を定数として,

$$y = ax^2 + bx + c \quad \cdots\cdots \text{①}$$

とおける。$(x,\ y) = (0,\ 0)$ を ① に代入すると,

$$c = \boxed{\quad\quad}$$

である。また, $(x,\ y) = (10,\ 5)$, $(20,\ 20)$ をそれぞれ ① に代入すると,

$$\begin{cases} 5 = \boxed{\quad\quad}\,a + \boxed{\quad\quad}\,b & \cdots\cdots \text{②} \\ 20 = \boxed{\quad\quad}\,a + \boxed{\quad\quad}\,b & \cdots\cdots \text{③} \end{cases}$$

とでき, これらを連立して解くと,

$$a = \frac{1}{\boxed{\quad\quad}},\ b = \boxed{\quad\quad}$$

となり,

$$y = \frac{1}{\boxed{\quad\quad}}\,x^2$$

を得る。

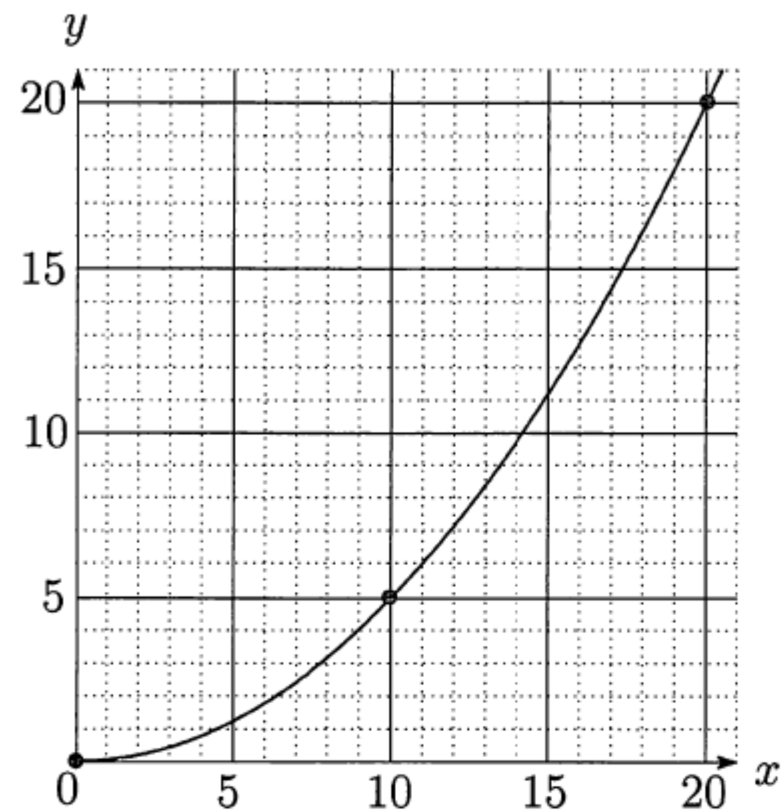


図 1.6: (0, 0), (10, 5), (20, 20) を通る二次関数

1.2.1 微分係数

問題 5 関数 $f(x) = \dfrac{1}{20}x^2$ において，$x = x_1$ が次の値をとる場合について，下記空欄に定数 (整数) を書き込め。

(1) $x_1 = 5$ における微分係数は，

$$f'(5) = \lim_{x_2 \to 5} \frac{\frac{1}{20}x_2^2 - \frac{1}{20} \times \boxed{}^2}{x_2 - \boxed{}}$$

$$= \lim_{x_2 \to 5} \frac{\left(x_2 + \boxed{}\right)\left(x_2 - \boxed{}\right)}{20\left(x_2 - \boxed{}\right)}$$

$$= \lim_{x_2 \to 5} \frac{1}{20}\left(x_2 + \boxed{}\right) = \frac{\boxed{}}{2}$$

となる。

x を変数とする関数 $f(x)$ について，

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

によって定義される $\dfrac{df(x_1)}{dx}$ を $x = x_1$ における関数 $f(x)$ の“**微分係数**”という。これを，

$$\frac{df(x_1)}{dx} = f'(x_1)$$

と略記する。これは下図に示した関数 $y = f(x)$ のグラフ上の点 $(x_1, f(x_1))$ における接線 (破線) の傾きを表す。

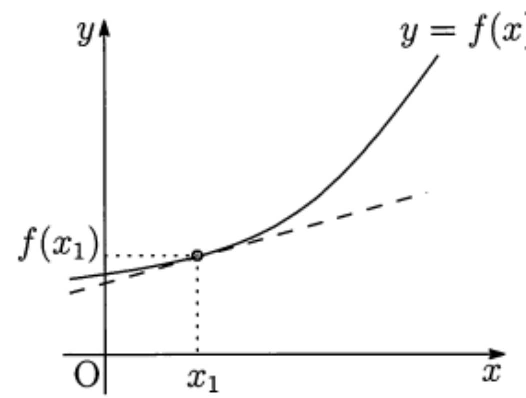


図 1.7: 関数 $f(x)$ のグラフと微分係数 (破線の傾きが $f'(x_1)$ に対応する)

(2) $x_1 = 15$ における微分係数は,

$$f'(15) = \lim_{x_2 \to 15} \frac{\frac{1}{20}x_2^2 - \frac{1}{20} \times \boxed{}^2}{x_2 - \boxed{}}$$

$$= \lim_{x_2 \to 15} \frac{\left(x_2 + \boxed{}\right)\left(x_2 - \boxed{}\right)}{20\left(x_2 - \boxed{}\right)}$$

$$= \lim_{x_2 \to 15} \frac{1}{20}\left(x_2 + \boxed{}\right) = \frac{\boxed{}}{2}$$

である。

(3) $y = f(x)$ とおくと, 関数 $f(x)$ のグラフが得られる (図 1.8)。このグラフの $x_1 = 10$ における接線は, 図 1.8 の破線で表され, この接線の傾きは,

$$f'(10) = \lim_{x_2 \to 10} \frac{\frac{1}{20}x_2^2 - \frac{1}{20} \times \boxed{}^2}{x_2 - \boxed{}}$$

$$= \lim_{x_2 \to 10} \frac{\left(x_2 + \boxed{}\right)\left(x_2 - \boxed{}\right)}{20\left(x_2 - \boxed{}\right)}$$

$$= \lim_{x_2 \to 10} \frac{1}{20}\left(x_2 + \boxed{}\right) = \boxed{}$$

となる。

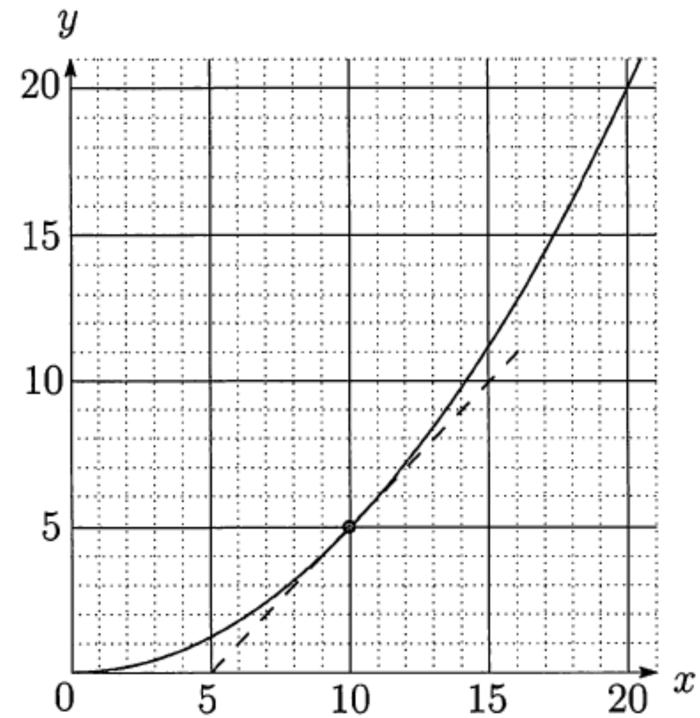


図 1.8: (0, 0), (10, 5) を通る曲線

1.2.2　導関数

x を変数とする関数 $f(x)$ について,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

によって定義される x の関数 $f'(x)$ を関数 $f(x)$ の“**導関数**”という。導関数 $f'(x)$ は, 関数 $f(x)$ の x における微分係数を表すことから,

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

とかくこともある。関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを, 関数 $f(x)$ を x で**微分する**という。

問題 6　次の関数 $f(x)$ の微分公式を導関数の定義から導こう。下記空欄に, x を用いた式, または, 定数を書き込め。

(1) $f(x) = x$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\boxed{} + \Delta x\right) - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \boxed{}$$

$$= \boxed{}$$

(2) $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\boxed{} + \Delta x\right)^2 - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{} + \boxed{}\,\Delta x + (\Delta x)^2 - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\boxed{} + \Delta x\right)$$

$$= \boxed{}$$

力学基礎演習 1.2.2

(3) $f(x) = x^3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\boxed{} + \Delta x\right)^3 - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{} + \boxed{}\Delta x + \boxed{}(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ \boxed{} + \boxed{}\Delta x + (\Delta x)^2 \right\}$$

$$= \boxed{}$$

(4) $f(x) = 3$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \boxed{}$$

以降で関数 $f(x)$ を微分するときには“ **微分公式** ”

I. $f(x) = c \implies f'(x) = 0$

II. $f(x) = x \implies f'(x) = 1$

III. $f(x) = x^2 \implies f'(x) = 2x$

IV. $f(x) = x^3 \implies f'(x) = 3x^2$

を用いればよい (c は定数である)。

1.3　不定積分

問題 7　積分定数を C とする。次の不定積分について, 下記空欄に定数を書き込め。

(1) $\displaystyle\int x\,dx = \frac{1}{\boxed{}}x^2 + C$

(2) $\displaystyle\int x^2\,dx = \frac{1}{\boxed{}}x^3 + C$

問題 8　積分定数を C とする。次の不定積分について, 下記空欄に x を用いた式を書き込め。

(1) $\displaystyle\int 4\,dx = \boxed{} + C$

(2) $\displaystyle\int 4x\,dx = \boxed{} + C$

問題 9　積分定数を C とする。下記空欄に, x を用いた式, または, 定数を書き込め。

(1) $\displaystyle\frac{dF(x)}{dx} = 4$

$$\Longrightarrow F(x) = \int \boxed{}\,dx = \boxed{} + C$$

(2) $\displaystyle\frac{dF(x)}{dx} = 4x$

$$\Longrightarrow F(x) = \int \boxed{}\,dx = \boxed{} + C$$

1.3.1 定積分

問題 10 次の定積分について，下記空欄に x を用いた式，または，定数を書き込め。

(1) $\displaystyle\int_1^2 4\,dx = \Big[\ \boxed{}\ \Big]_1^2 = \boxed{}$

(2) $\displaystyle\int_1^2 4x\,dx = \Big[\ \boxed{}\ \Big]_1^2 = \boxed{}$

a, b を定数とし，関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき，

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

を満たす $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を関数 $f(x)$ の "**定積分**" といい，a を "**下端**"，b を "**上端**" という。ここで，新たな記号

$$\Big[\ F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

を定義すれば，定積分を

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[\ F(x)\ \Big]_a^b$$

と表すことができて便利である。

3.4 時間微分と時間積分

問題 10 x_0, v_0, a_0 をそれぞれ定数とし, C を積分定数とする。次の関数を t で微分や積分する場合について, 下記空欄に, x_0, v_0, a_0 のいずれか, もしくは, 定数を書き込め。

(1) $x(t) = x_0 + v_0 t$

$$\Longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \boxed{}$$

(2) $x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$

$$\Longrightarrow \frac{dx(t)}{dt} = \boxed{} + \boxed{}\, t$$

(3) $v(t) = v_0$

$$\Longrightarrow \frac{dv(t)}{dt} = \boxed{}$$

k を定数, $f(t)$, $g(t)$ をそれぞれ t の関数とするとき,

I. $\frac{d}{dt}\{kf(t)\} = k\frac{df(t)}{dt}$

II. $\frac{d}{dt}\{f(t)+g(t)\} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$

III. $\int \{kf(t)\}\,dt = k\int f(t)\,dt$

IV. $\int \{f(t)+g(t)\}\,dt$

$$= \int f(t)\,dt + \int g(t)\,dt$$

が成り立つ。

力学基礎演習 3.4

(4) $v(t) = v_0 + a_0 t$

$$\Longrightarrow \frac{dv(t)}{dt} = \boxed{}$$

(5) $\dfrac{dv(t)}{dt} = a_0$

$$\Longrightarrow v(t) = \int \boxed{}\, dt = \boxed{}\, t + C$$

(6) $\dfrac{dx(t)}{dt} = v_0$

$$\Longrightarrow x(t) = \int \boxed{}\, dt = \boxed{}\, t + C$$

(7) $\dfrac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0 t$

$$\Longrightarrow x(t) = \int \left(\boxed{} + \boxed{}\, t \right) dt$$

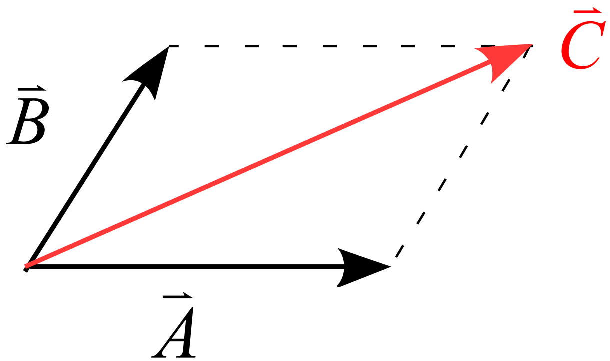
$$= \boxed{}\, t + \frac{1}{\boxed{}} a_0 t^2 + C$$

ベクトル

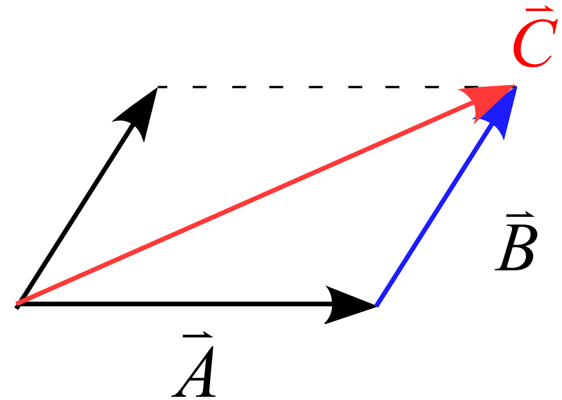
ベクトル　大きさ + 向き

ベクトルの和

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

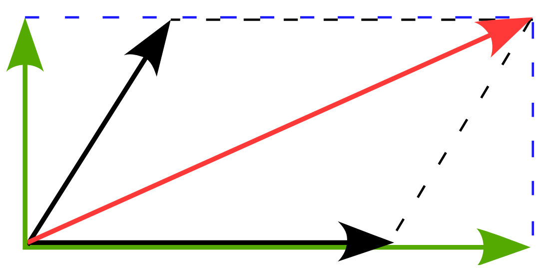


平行四辺形を作る



$\vec{B}$ を平行移動して考える

ベクトルの分解



ベクトルの分解の仕方はたくさんある

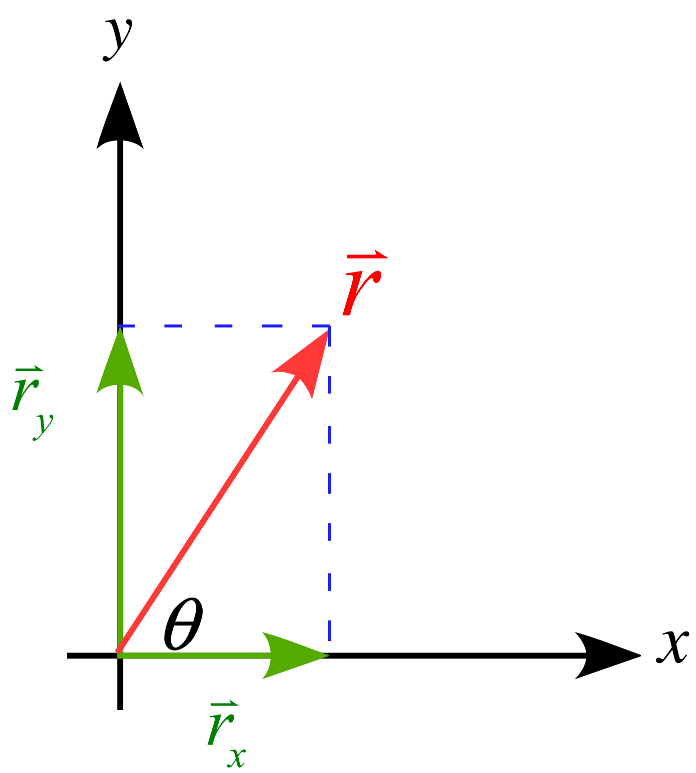
合成して元に戻ればOK

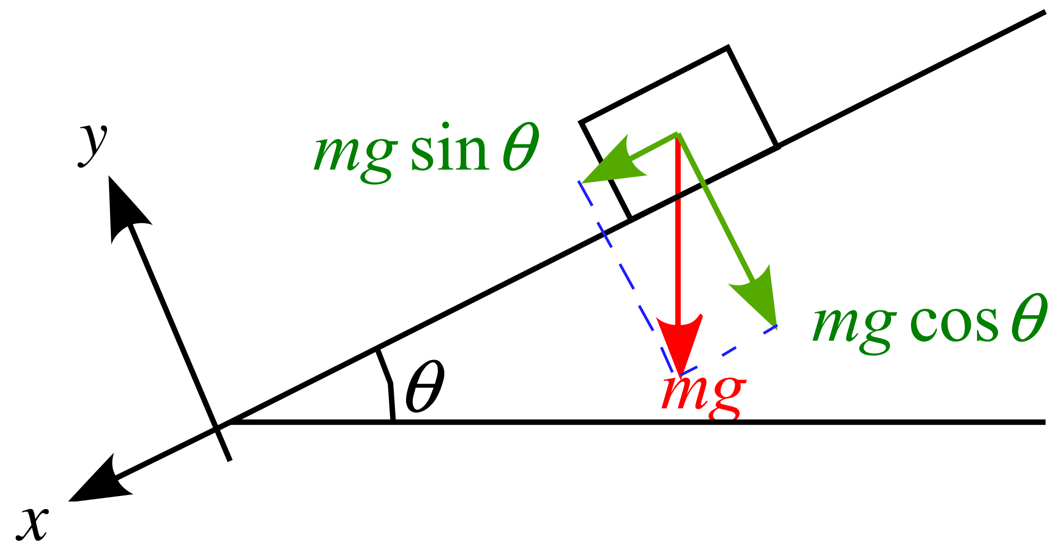
ベクトル

ベクトルの分解

速度ベクトルの分解
力の分解

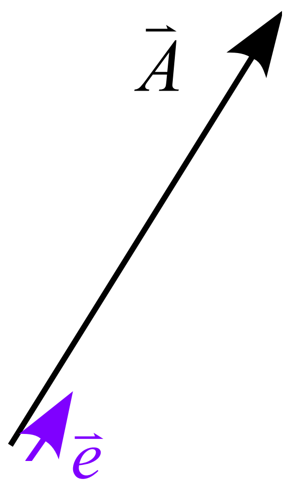
ベクトルの分解を分解して考えるケースは多い





ベクトル

単位ベクトル　大きさが 1 であるベクトル

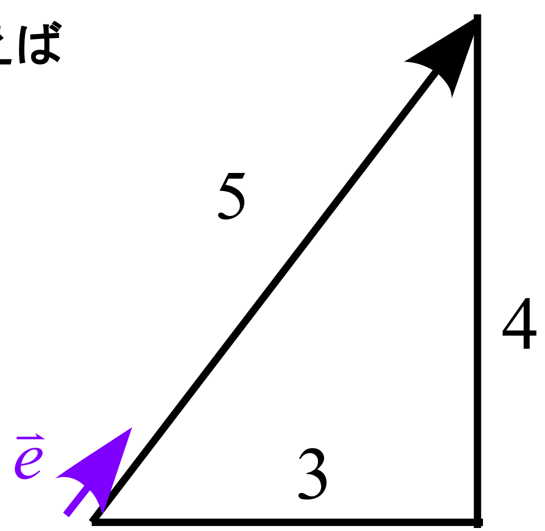


$\vec{A}$ の大きさは $|\vec{A}|$ と表す

向きは同じ、大きさは 1

$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

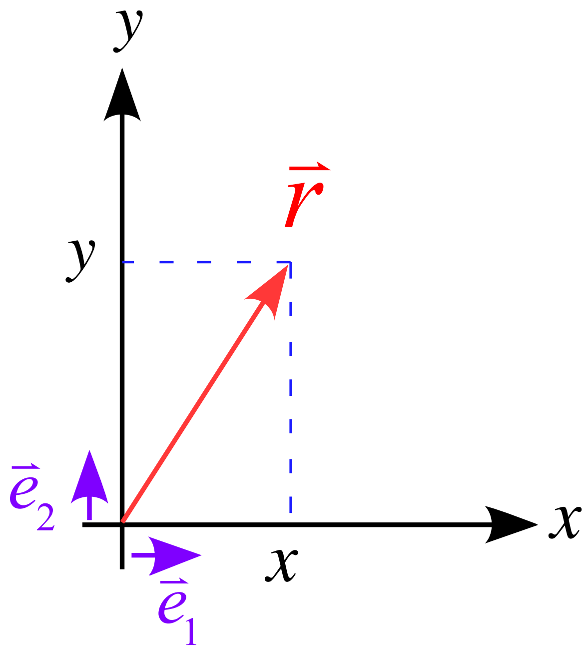
例えば



$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(3,4)}{|5|} = \frac{1}{5}(3,4)$$

ベクトル

単位ベクトル　**2次元 直交座標**



$$\vec{r} = (x, y) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

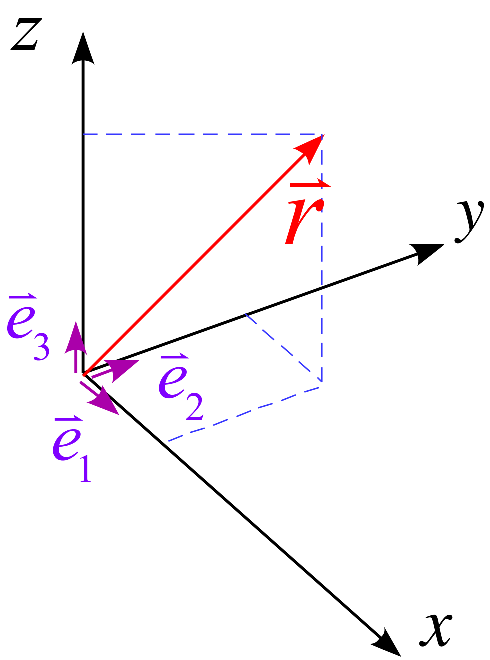
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ベクトル

単位ベクトル　**3次元 直交座標**



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

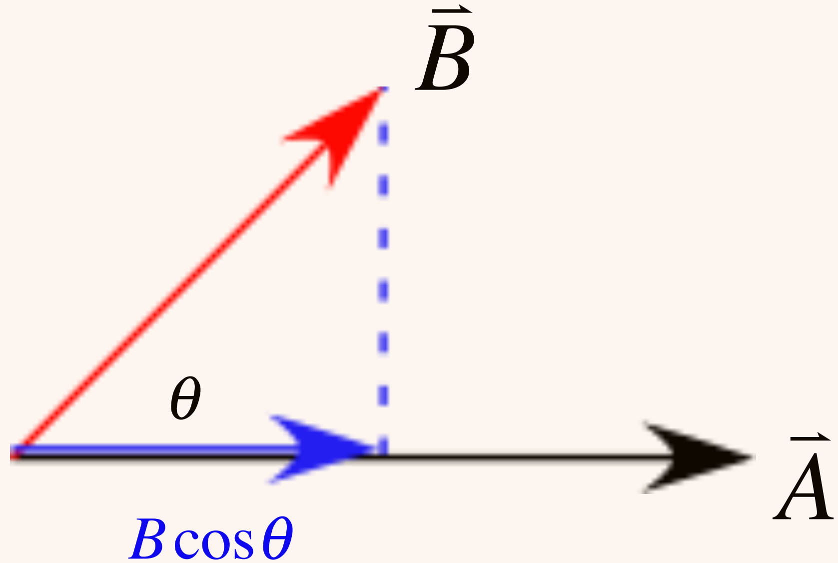
$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ベクトル～内積

ベクトルの内積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



これを3次元の直交座標系を考える

ベクトルの成分を

$$\vec{A}=\left(A_x, A_y, A_z\right) \quad \vec{B}=\left(B_x, B_y, B_z\right)$$

とし、それぞれの単位ベクトルを $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ とすると

ベクトル～内積

ベクトルはそれぞれ

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

となるので、ベクトルの内積は

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right)$$

$$= A_x\vec{i}\cdot B_x\vec{i} + A_x\vec{i}\cdot B_y\vec{j} + A_x\vec{i}\cdot B_z\vec{k} +$$

$$A_y\vec{j}\cdot B_x\vec{i} + A_y\vec{j}\cdot B_y\vec{j} + A_y\vec{j}\cdot B_z\vec{k} +$$

$$A_z\vec{k}\cdot B_x\vec{i} + A_z\vec{k}\cdot B_y\vec{j} + A_z\vec{k}\cdot B_z\vec{k}$$

ベクトル〜内積

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

が成立するので

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

となる

任意の2元

$$A=\left(A_1,A_2,\cdots A_n\right)$$

$$B=\left(B_1,B_2,\cdots B_n\right)$$

に対し

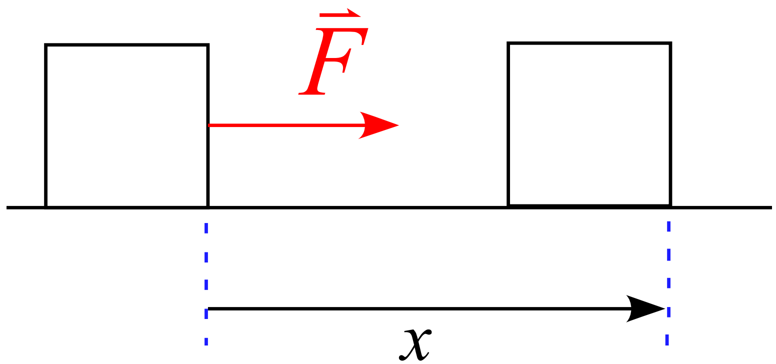
$$A\cdot B=\sum_{i=1}^{n}A_iB_i$$

それぞれの成分どうしをかけたものの和

ベクトル～内積

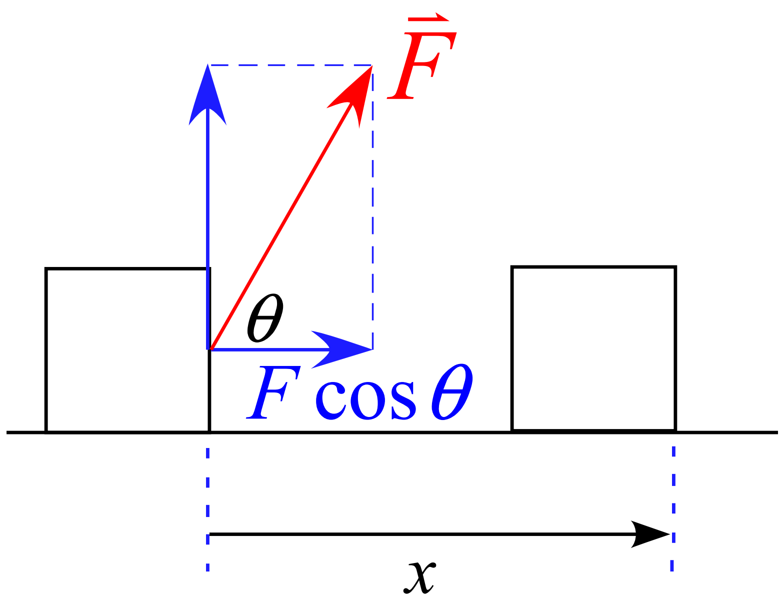
力学で何に使うのか？

仕事を考えるときに使う



仕事＝力×移動距離

$$W = F \times x$$



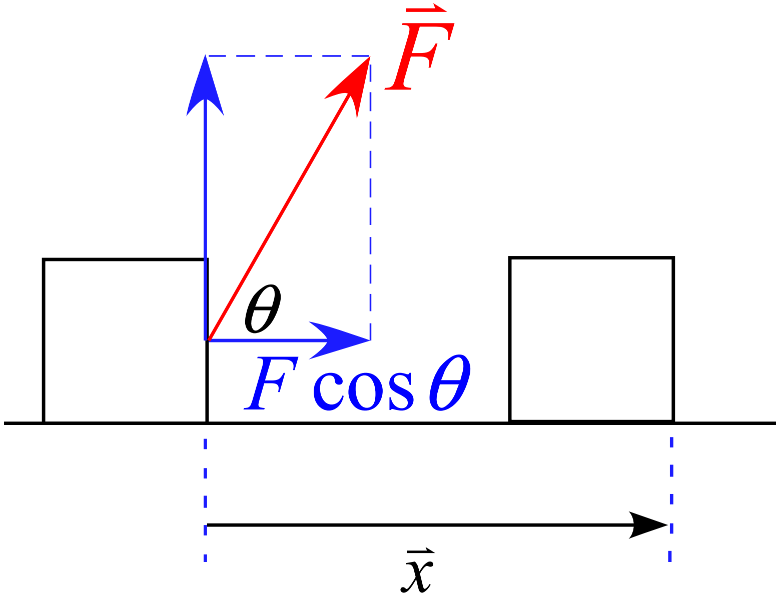
$$W = F\cos\theta \times x$$
$$= Fx\cos\theta$$

ベクトル〜内積

一般化したい

力も変位もベクトルだから
ベクトルを用いて表したい

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$$
$$= |\vec{F}||\vec{x}|\cos\theta$$



力と変位が平行の場合は

$$\cos 0 = 1$$

なので $W = |\vec{F}||\vec{x}|$

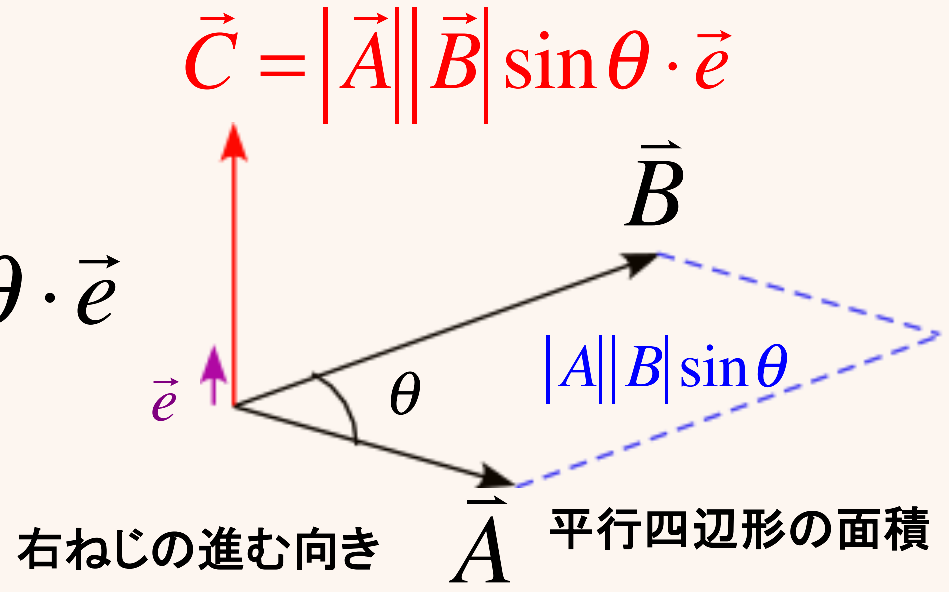
ベクトル～外積

ベクトルの外積

$$\vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right| \sin\theta \cdot \vec{e}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$



内積のときと同様に成分で考えてみると

$$\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$$

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)\times\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)$$

$$=$$

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0$$

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

が成立するので

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}$$

$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_yB_z-A_zB_y\\A_zB_x-A_xB_z\\A_xB_y-A_yB_x\end{pmatrix}$$

となる

回転運動 (角運動量・力のモーメント)

電磁気学

などで使う

ベクトル～座標系

空間内の位置を特定するための座標系は3数の要素で構成される

1.基準点 O(原点)

2.適当な尺度で標識を目盛った1組の座標軸　(x, y – 2次元)

3.原点及び座標軸に対して空間内の点をどのように表記するかという約束

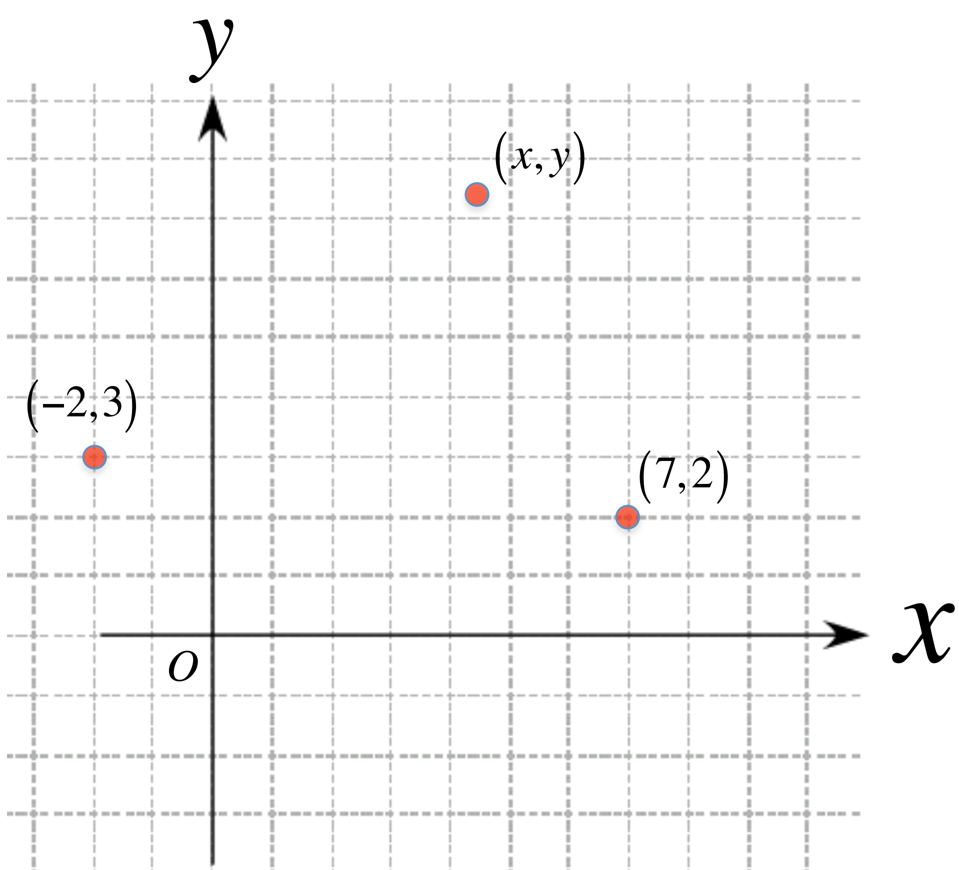
座標系

・デカルト座標系 (直角座標系)

・極座標系

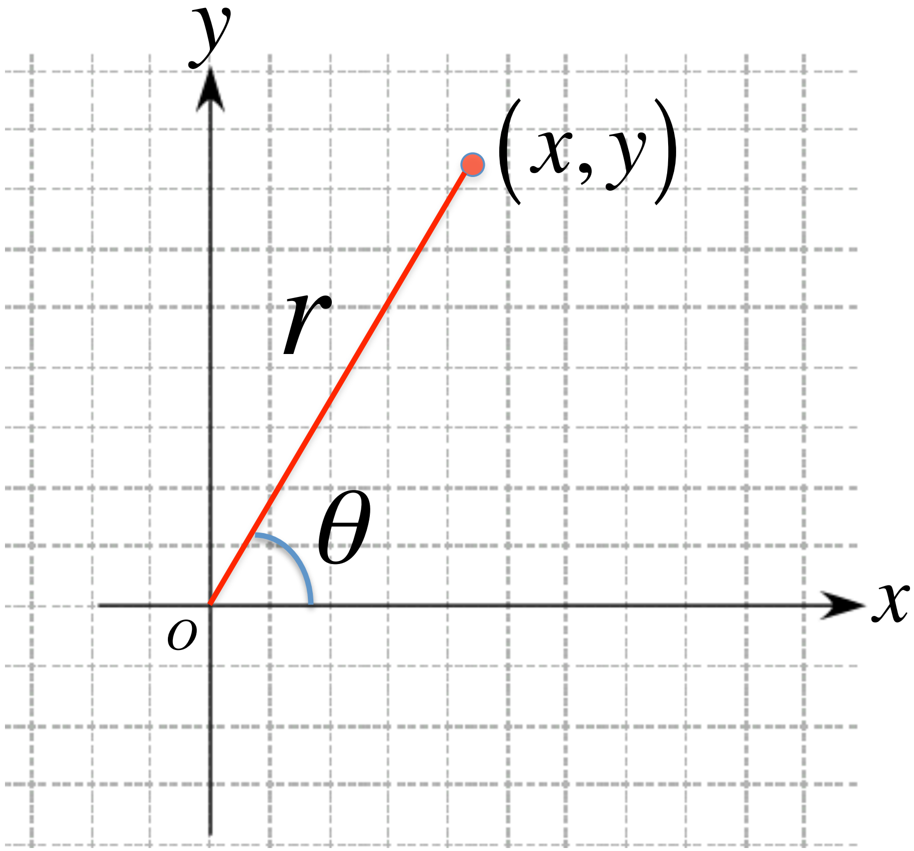
例 (2次元)

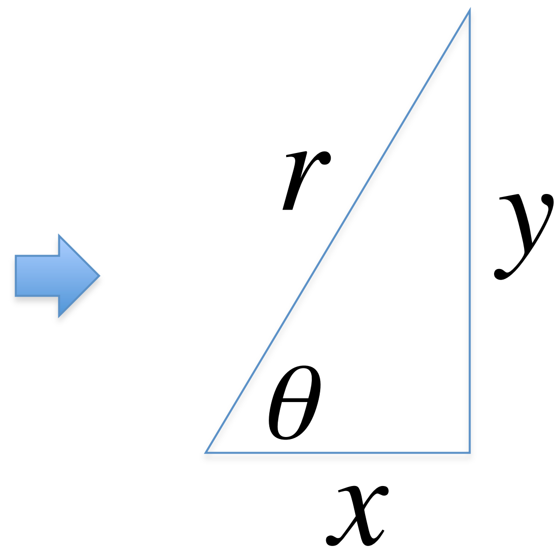
直角座標系



座標系〜極座標系

例 (2次元)
極座標系





$$\sin\theta = \frac{y}{r}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x}$$

直角座標系で表すと

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

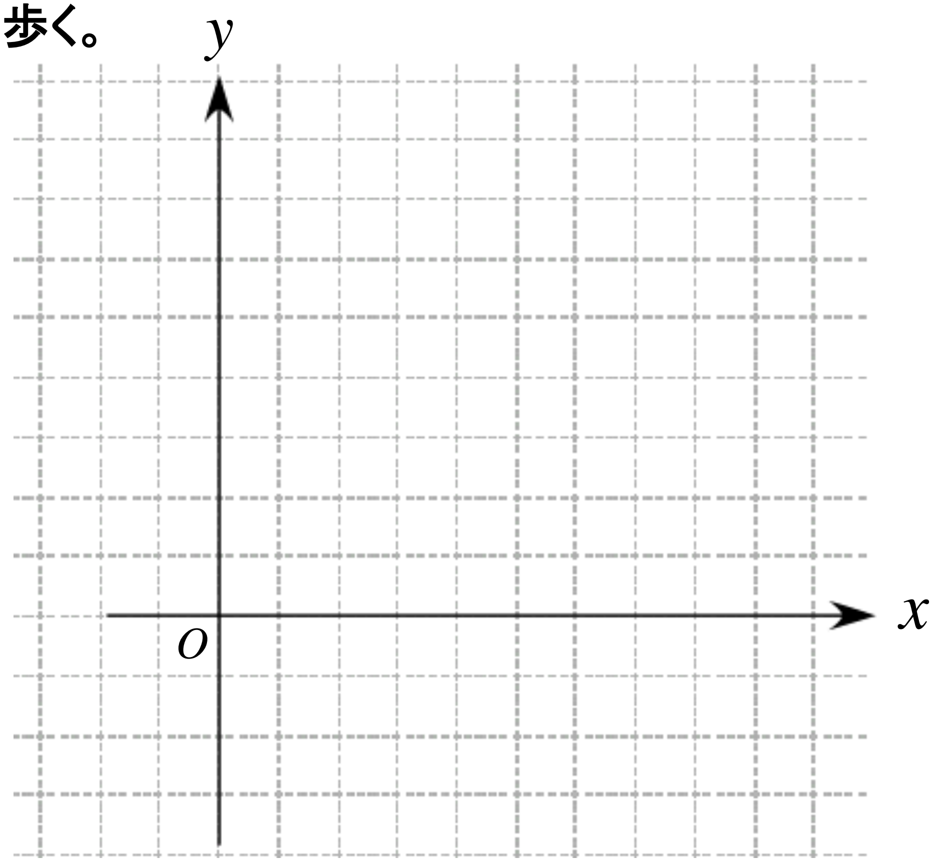
ベクトルとスカラー

ベクトルとスカラー

ベクトル：大きさと向き (変位、速度)
スカラー：大きさのみ (距離、速さ)

例題

ある歩行者が東に7km及び北に4km歩く。
合成変位を作図し、大きさを求めよ。
(1目盛は1km)



2.2.1 力の平行四辺形の法則

問題 6 水平でなめらかな円卓上に置かれた，同じばね定数の三本のばね A, B, C を糸を介して一点で結び合わせた。ばねの連結部には，ばね A, B, C の向きに，それぞれ，$\vec{F}_{\mathrm{A}}$, $\vec{F}_{\mathrm{B}}$, $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ なる力が働くとする。1 個当たりのばねの伸びが 1.63 cm となる質量のおもりを用いるときについて[4]，次の問いに答え，空欄には値 (小数点第 2 位まで) を書き込め。

(1) どの 2 つのばねも 120° をなすように滑車を介して三個ずつのおもりを取り付けたら，いずれのばねも静止した。それぞれのばねののびを図 2.9 の空欄に記入し，$\vec{F}_{\mathrm{C}}$ を下図に作図せよ。

平面内の二力 $\vec{F}_{\mathrm{A}}$, $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ を一点 O に加えたときに生じる “**合力**” は，これらを隣り合う二辺とする平行四辺形の対角線に大きさが等しく，O からその対角に向けた力に等しい (下図の $\vec{F}$)。これを “**力の平行四辺形の法則**” という。

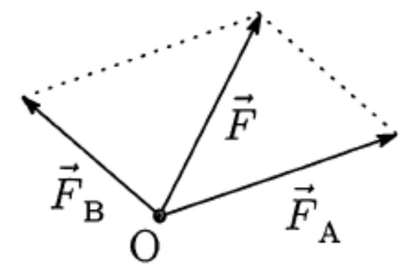
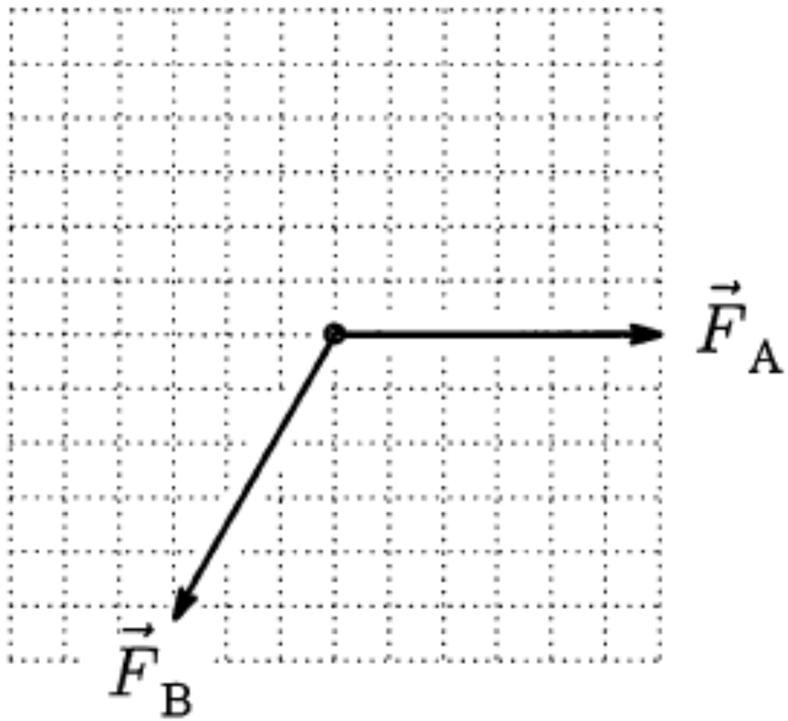


図 2.8: 力の平行四辺形の法則



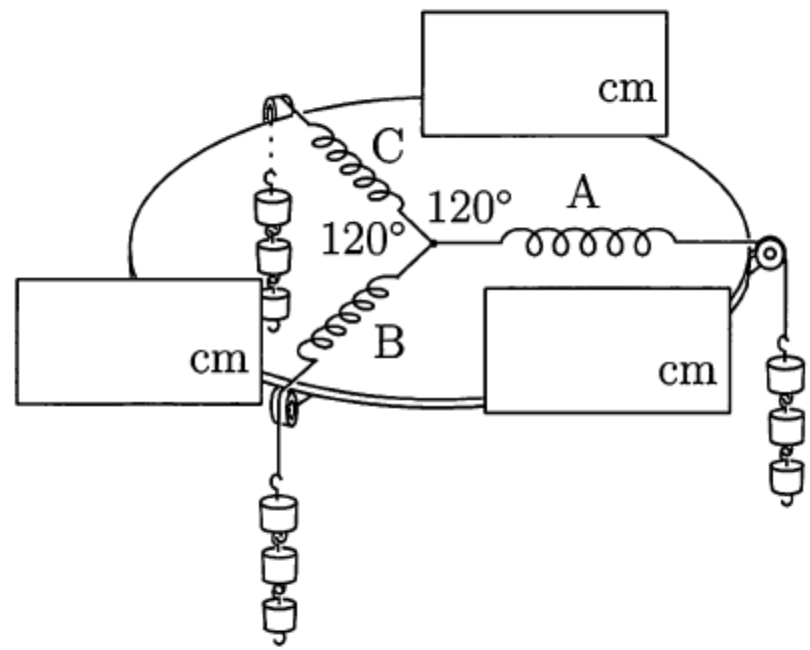
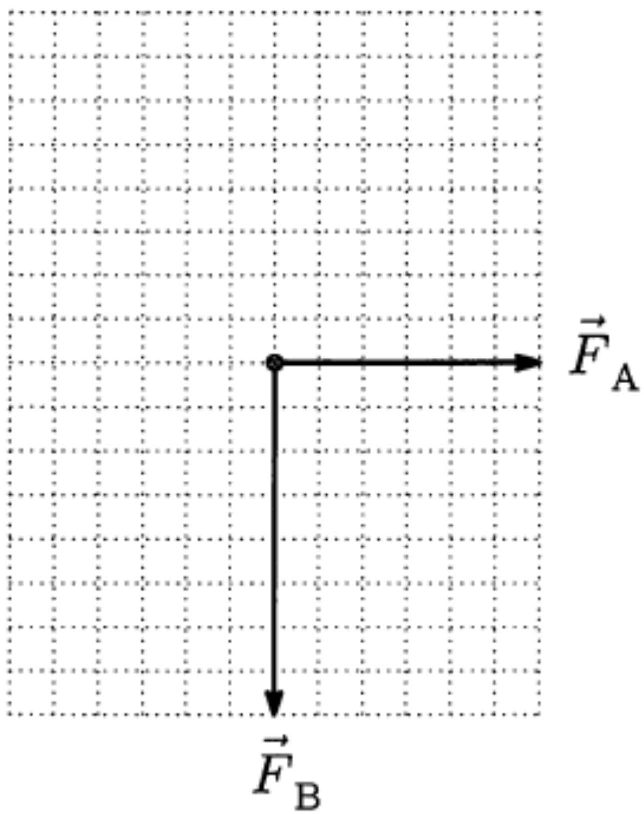


図 2.9: 等方的に引かれた水平面上の 3 つのばねののび

力学基礎演習 2.1.1

(2) ばね A, B, C に取り付けるおもりの個数をそれぞれ 3, 4, 5 個とし, ばね A と B のなす角を 90° に保ち, かつ, ばね C を特定の方向に向けたら, いずれのばねも静止した。それぞれのばねののびを図 2.10 の空欄に記入し, $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ を下図に作図せよ。



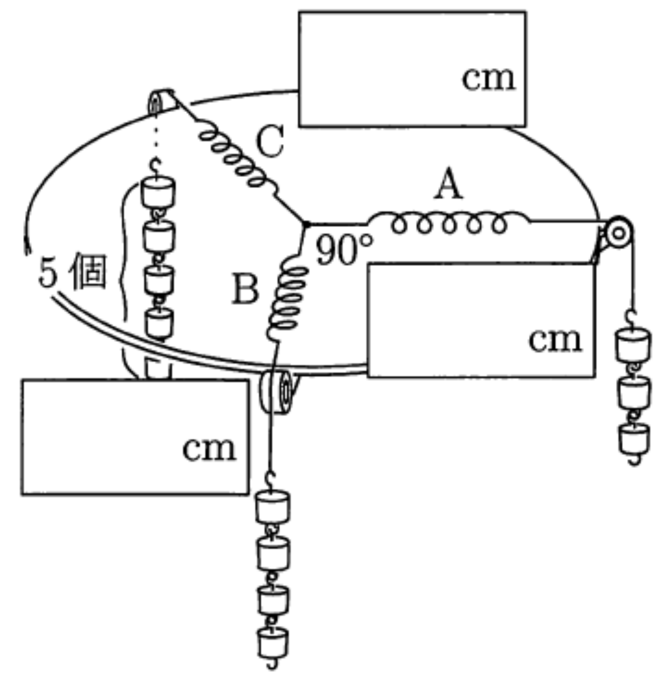


図 2.10: 水平面上の 3 つのばねののび

問題 7 水平な円卓上に置かれた, 同じばね定数の三本のばねをそれぞれ A, B, C とし, これらを糸を介して一点で結び合わせた。

ここで, ばね A とばね B の他端には, 滑車を介して 1 個当たり 20.1 g のおもりを三個ずつ取り付け, これらのばねのなす角を 60° とし (図 2.11), ばね C には質量 x [g] のおもりを吊り下げたところ, いずれのばねも静止した。糸の質量は無視できるとするとき, 次の問いに答えよ。

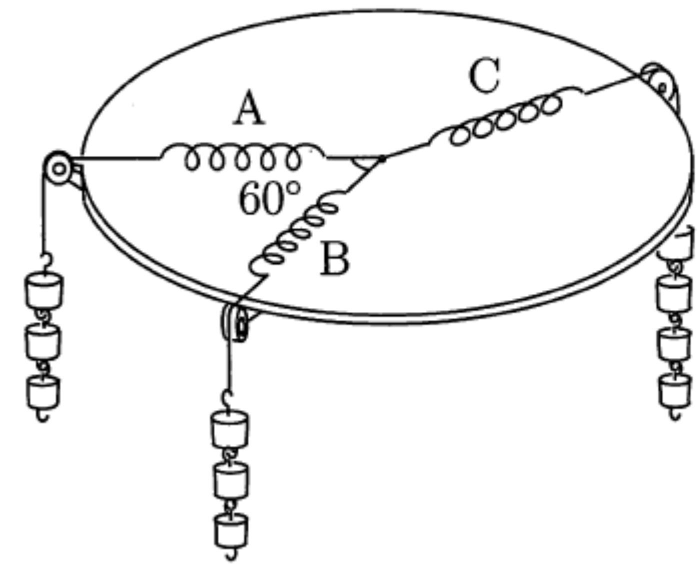


図 2.11: 円卓上の 3 つのばねののび

力学基礎演習 2.1.1

(1) 平面内の一点に, ばね A, B による図 2.12 の二力 $\vec{F}_{\mathrm{A}}$, $\vec{F}_{\mathrm{B}}$ が働くとするとき, 同図内にばね C による力 $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ を描き込め。

(2) 図 2.11 より, $\vec{F}_{\mathrm{C}}$ の大きさ, $|\vec{F}_{\mathrm{C}}|$ は,

$$|\vec{F}_{\mathrm{C}}| = \boxed{}\,|\vec{F}_{\mathrm{A}}| = \boxed{}\,|\vec{F}_{\mathrm{B}}|$$

とかける。上記空欄に値 (実数) を書き込め。

(3) $|\vec{F}_{\mathrm{A}}| = |\vec{F}_{\mathrm{B}}| = \boxed{}$ [g 重] だから, $\sqrt{3} \fallingdotseq 1.73$ とすると, (2) より, $|\vec{F}_{\mathrm{C}}| = \boxed{}$ [g 重] を得る。すなわち, $x = \boxed{}$ [g] である。上記空欄に有効数字 3 桁の値を書き込め。

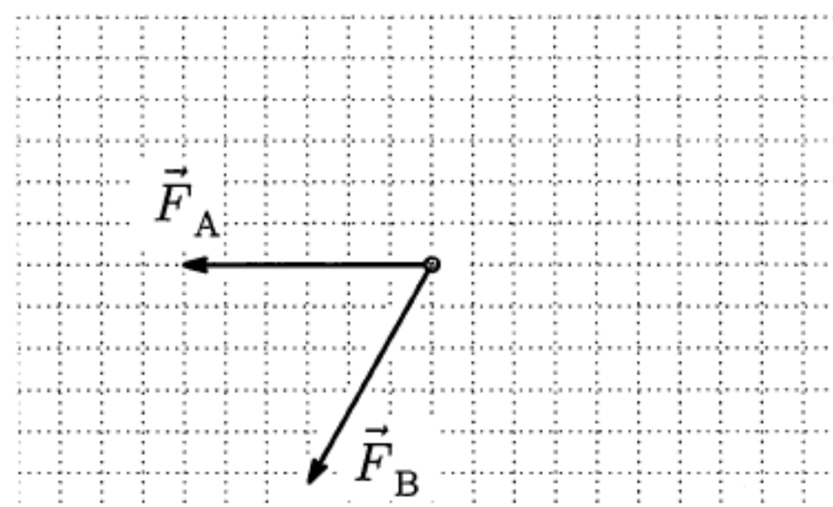


図 2.12: 水平面内における 3 つ力

位置ベクトル

位置

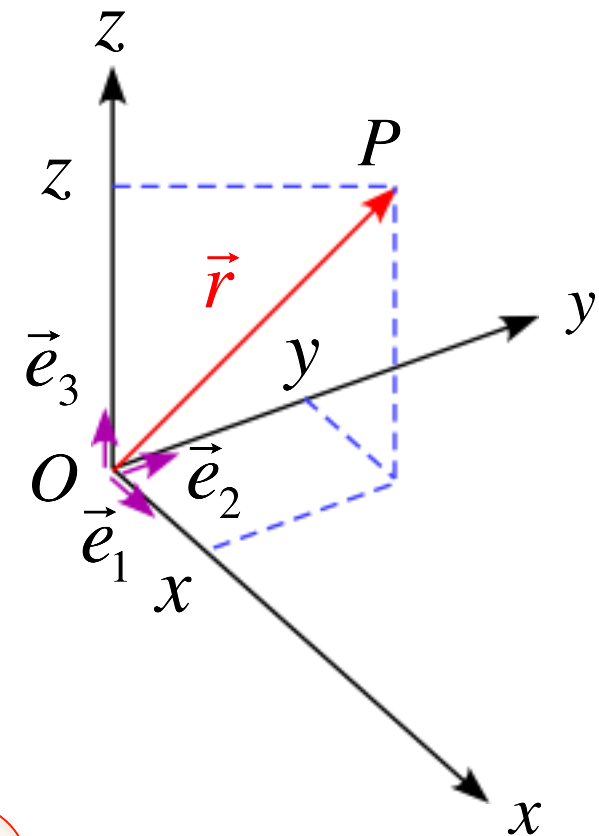
観測者 O に対する（Oを始点とする）

物体 P の位置ベクトル

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

この座標系は、観測者 O に対する

相対座標系となる



3次元の運動を考えるときは

このベクトルが時刻 t の関数として追跡する

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$$

位置ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{r} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

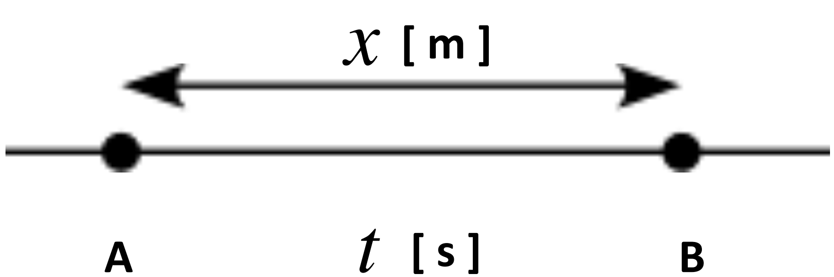
速度･加速度～速さ

物理では･･･時間変化が重要

例えば

物が動く･･･ 速さ、速度 加速度 が知りたい

平均の速さ: 目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか
「平均するとどの程度の速さでず～っと走り続けたのと同じか」



平均の速さ

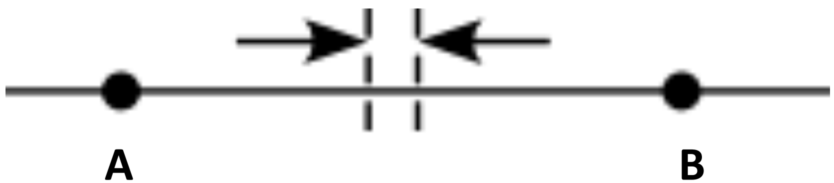
$$\overline{v} = \frac{x}{t}$$

[m / s]

速さ

瞬間の速さ　:ある時点での「スピード」のこと

Δx [m] (極めて短い距離)



Δt [s] (極めて短い時間)

瞬間の速さ

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

[m / s]

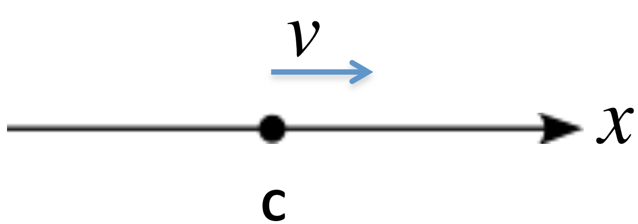
速さ～速度

速度＝速さ＋向き　←ベクトル

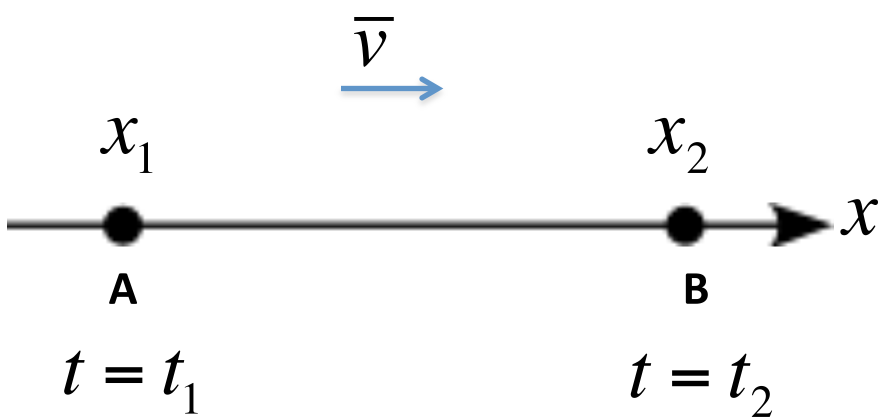
物理学では
大きさも向きも大事

例

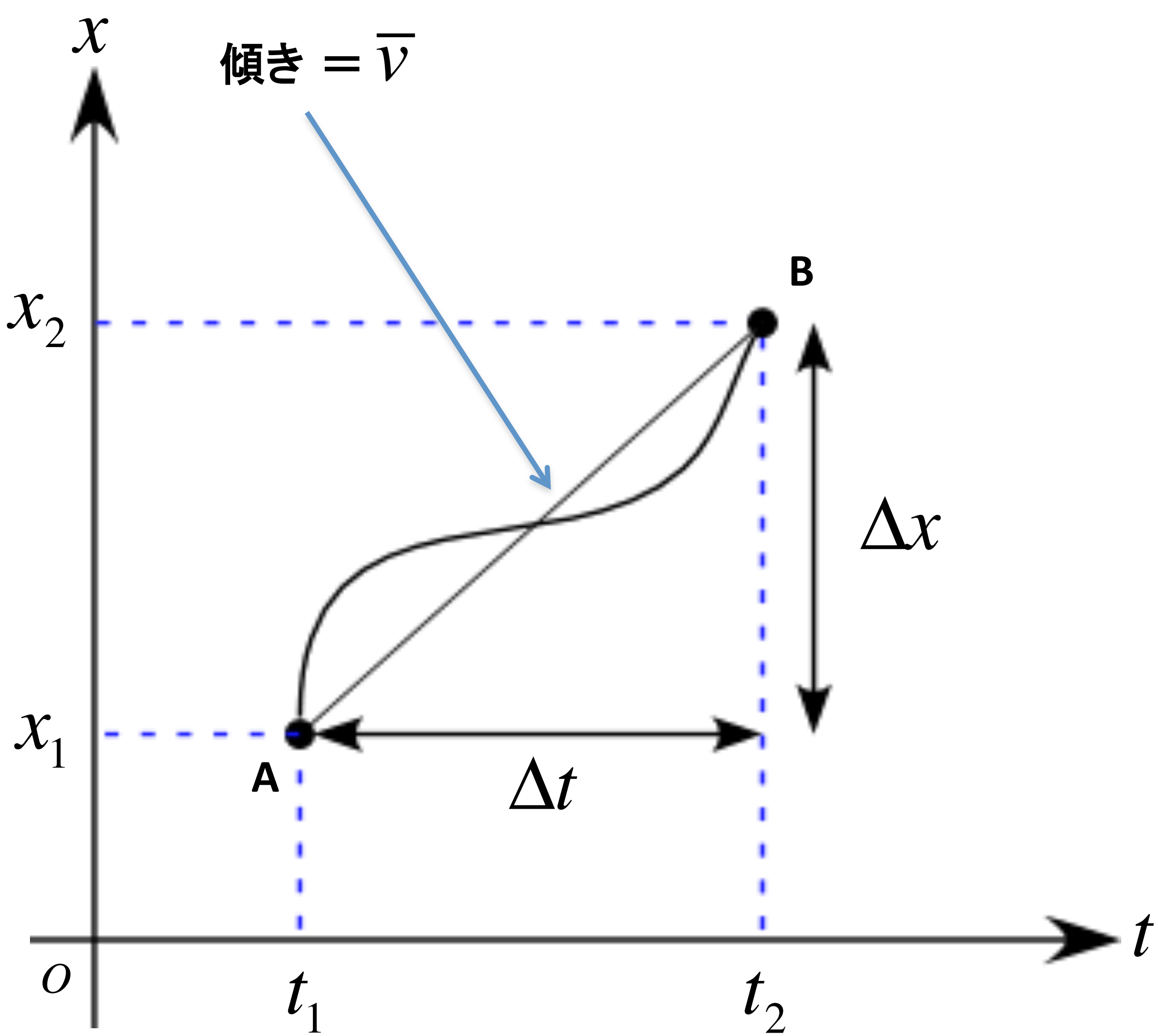
5 [m/s]の速さで走っている（どっち向きかわからない）
5 [m/s]の速度で走っている（ある特定の向きに走っている = 向きが決まっている）



平均速度 : 時間tに対する変位xの変化



質点の位置 – 時間の関係



平均速度

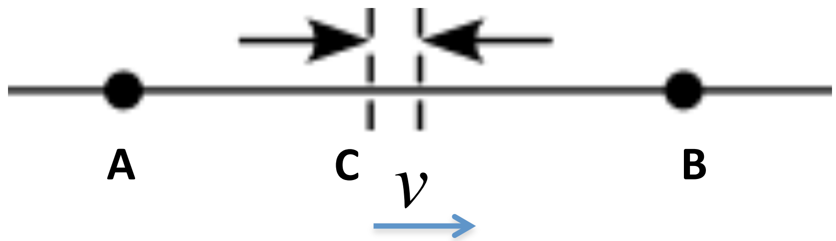
平均速度

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

瞬間速度

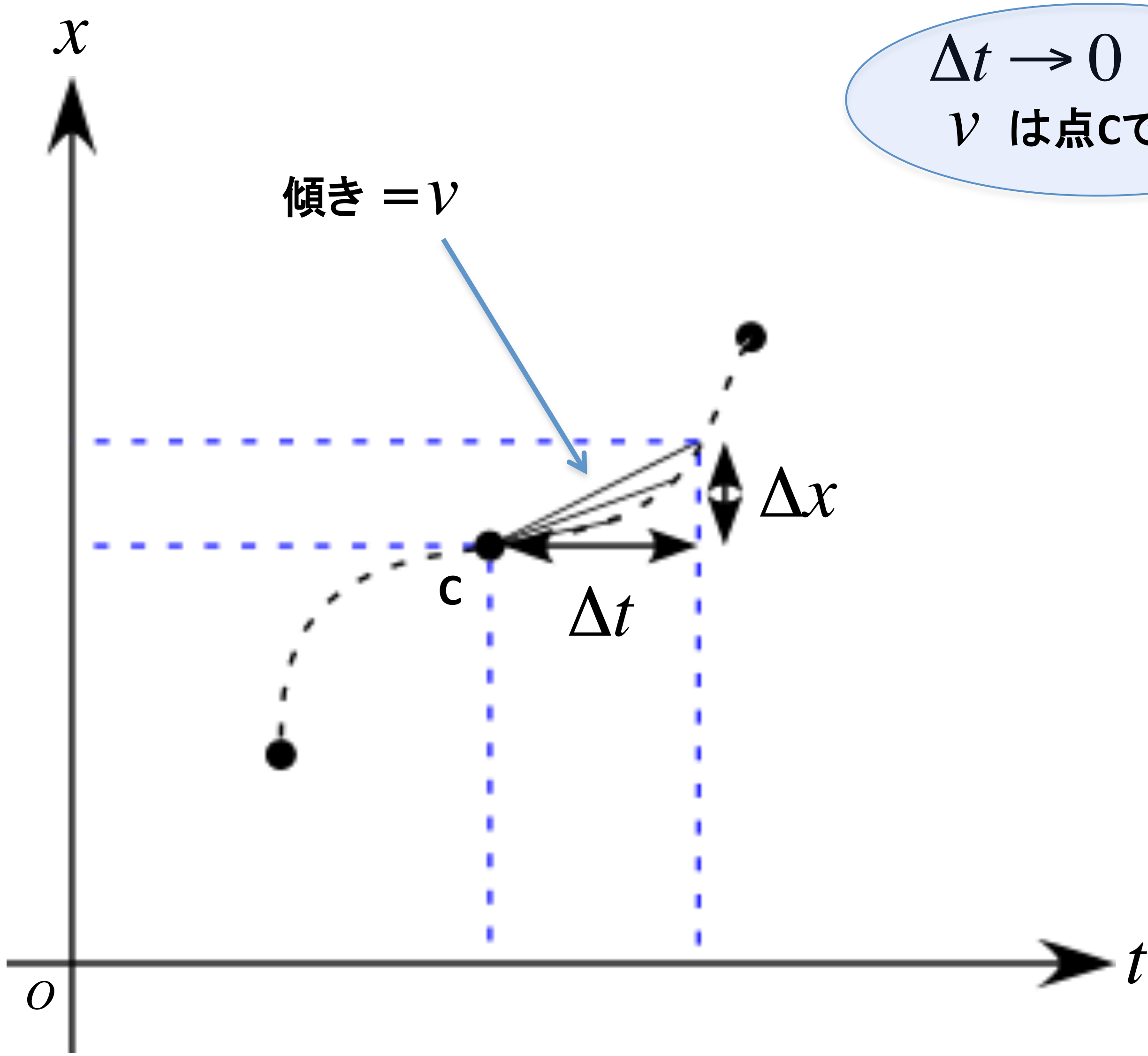
瞬間速度

Δx [m] (極めて短い距離)

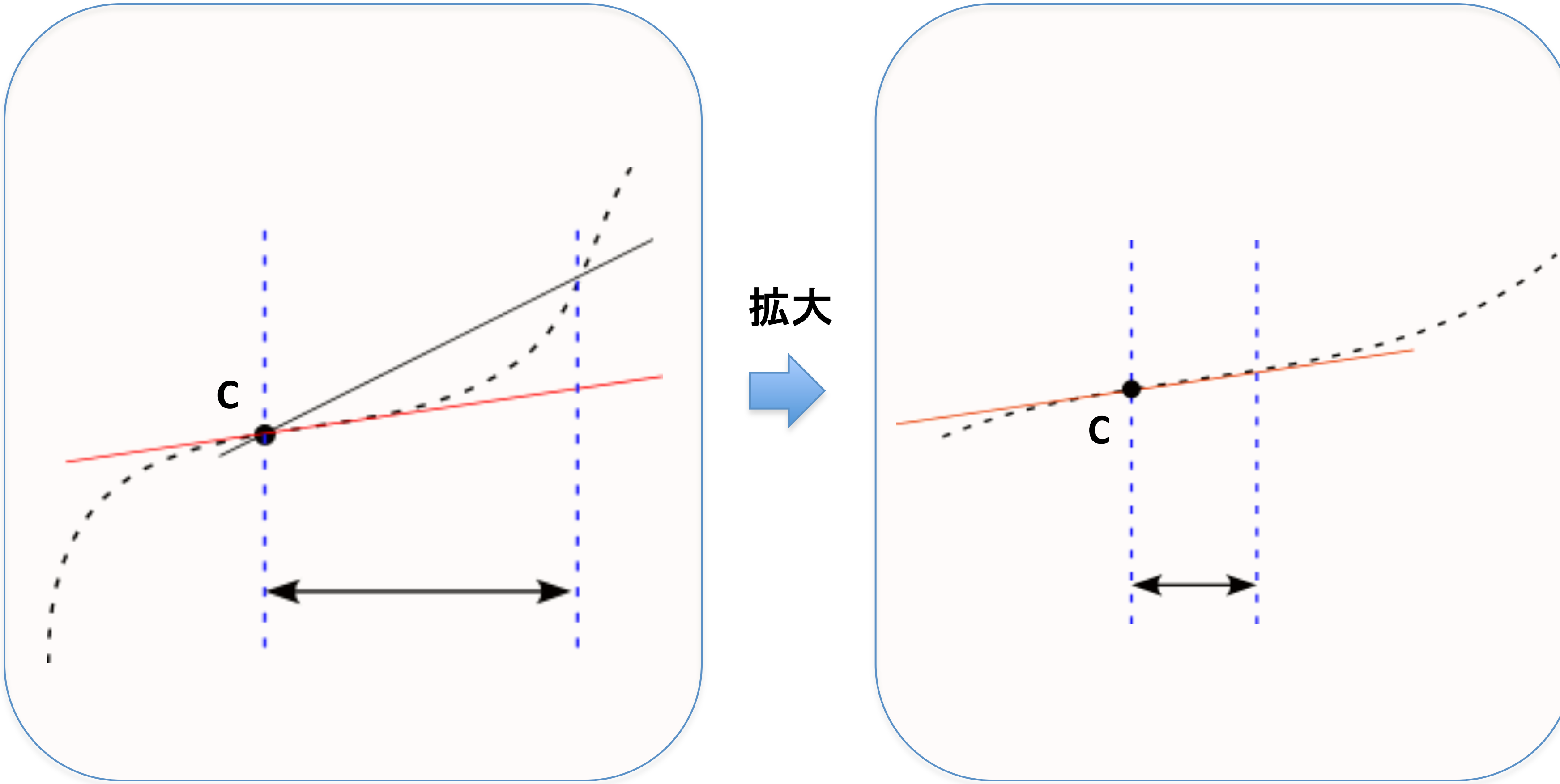


Δt [s] (極めて短い時間)

質点の位置－時間の関係



$\Delta t \to 0$ で
v は点cでの接線



$\Delta t \rightarrow 0$ で

v は点cでの接線

速度～瞬間速度

瞬間速度

変位

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{x(t+\Delta t) - x(t)}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点 $t_1 = 1$ [s]のとき $x_1 = 14$ [m]の位置にあり、

$t_2 = 3$ [s]のとき $x_2 = 4$ [m]の位置にある。

この時間における変位と平均速度を求めよ。

加速度

加速度:どれくらいの時間をかけて、どれくらい速度が変化するかの度合い

時間に対する速度変化率

平均加速度

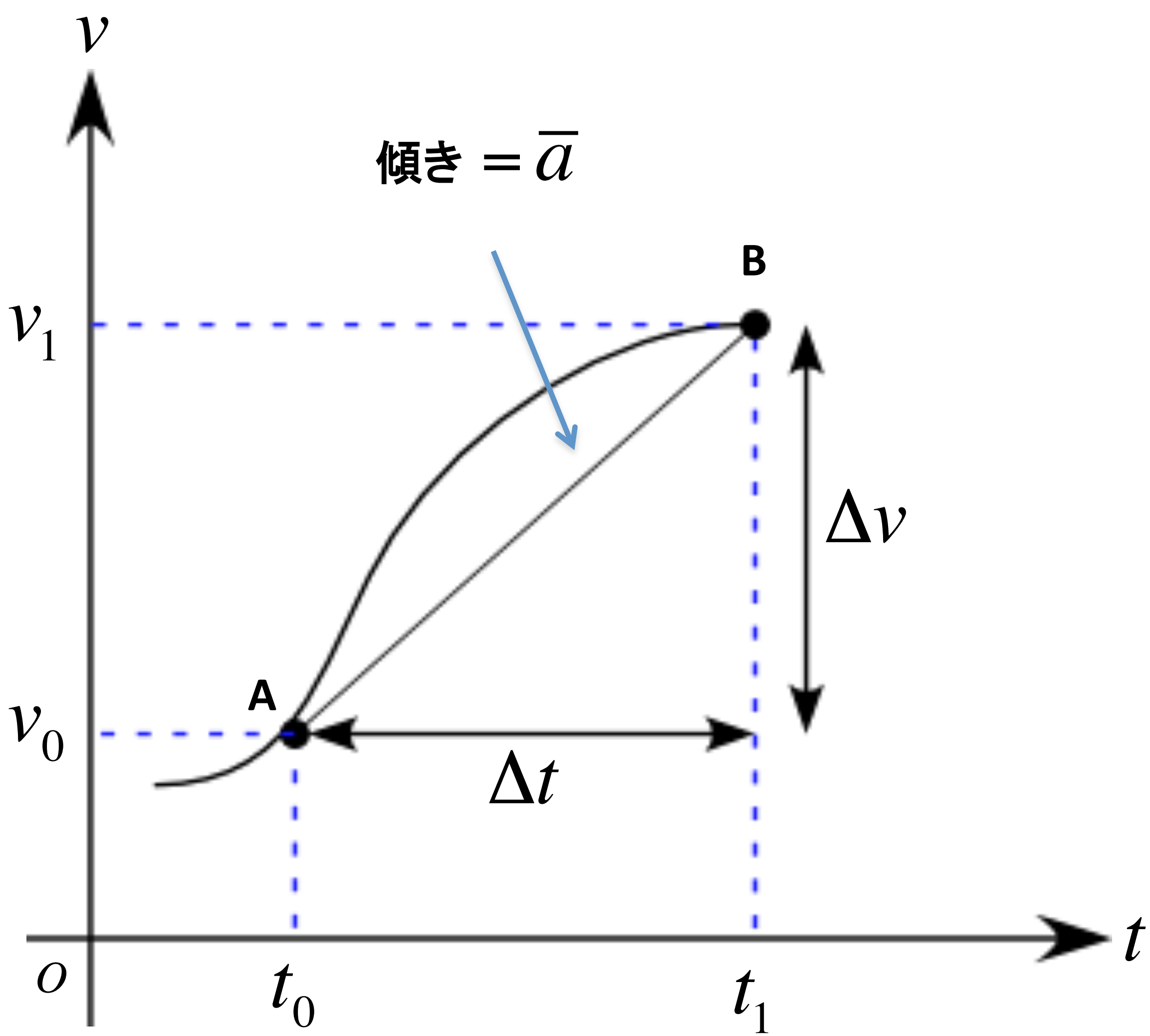
v_0 $\quad \Delta v =$ $\quad v_1$

$t = t_0$ $\quad \Delta t =$ $\quad t = t_1$

平均加速度

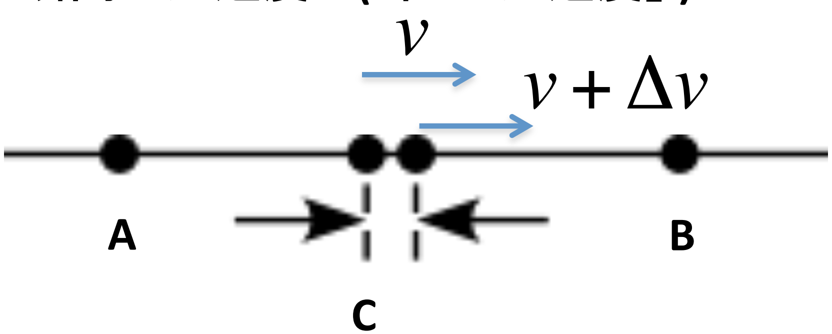
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

質点の速度－時間の関係



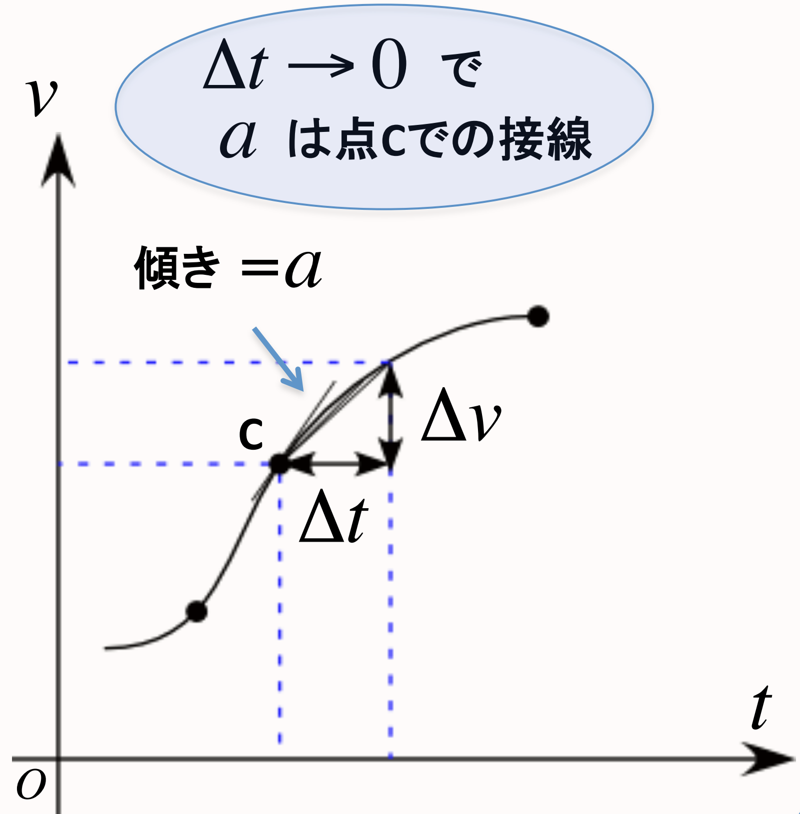
加速度～瞬間加速度

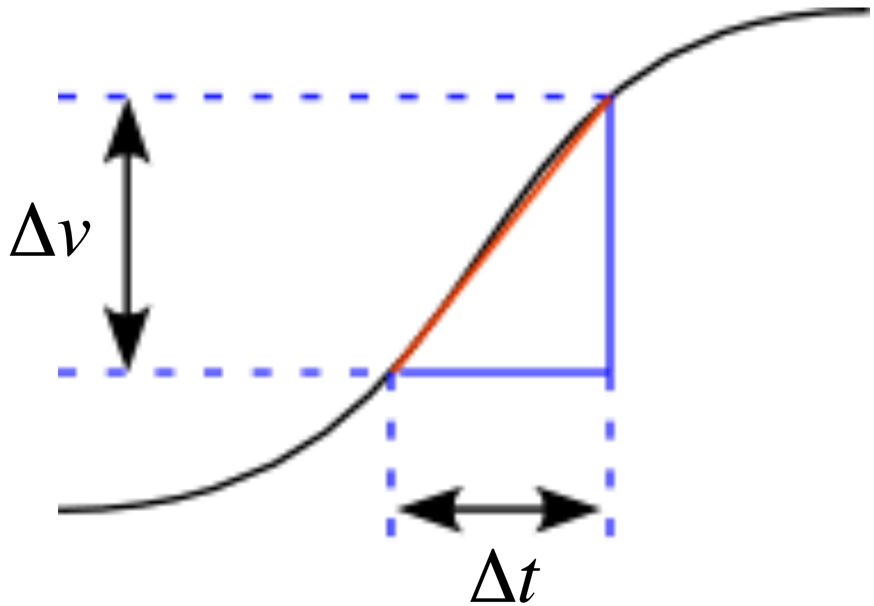
瞬間の加速度　(単に「加速度」)



Δt　(極めて短い時間)

質点の速度－時間の関係





Δv
Δt

瞬間加速度

瞬間加速度

速度変化

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boxed{(v+\Delta v)-v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

v は t の関数であると考えると

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

2回微分する

加速度

それぞれ何を意味するか考えよう

$a > 0$

加速する

$a < 0$

減速する（ブレーキをかける）

逆向きに走っているという意味ではない

加速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点が $v = 5 + 10t$ [m / s] に従って運動する。
この質点は $t = 0$ [s]における位置は 20 [m] である。

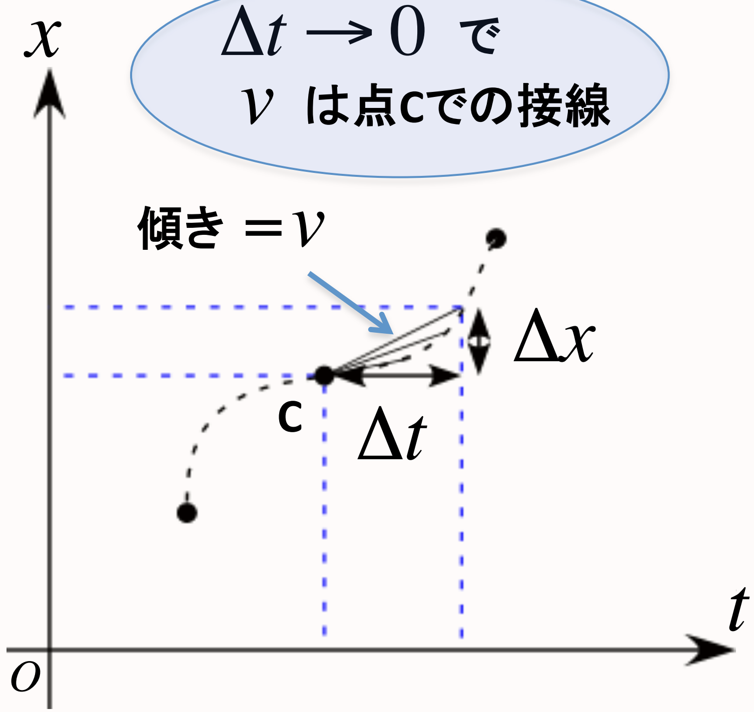
1. 加速度を時間 t の関数として表せ。
2. $t = 0$ における質点の速度を求めよ。
3. 位置を t の関数として表せ。

速度～まとめ

速度

質点の位置－時間の関係

$\Delta t \to 0$ で
v は点cでの接線



変位の時間変化率

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

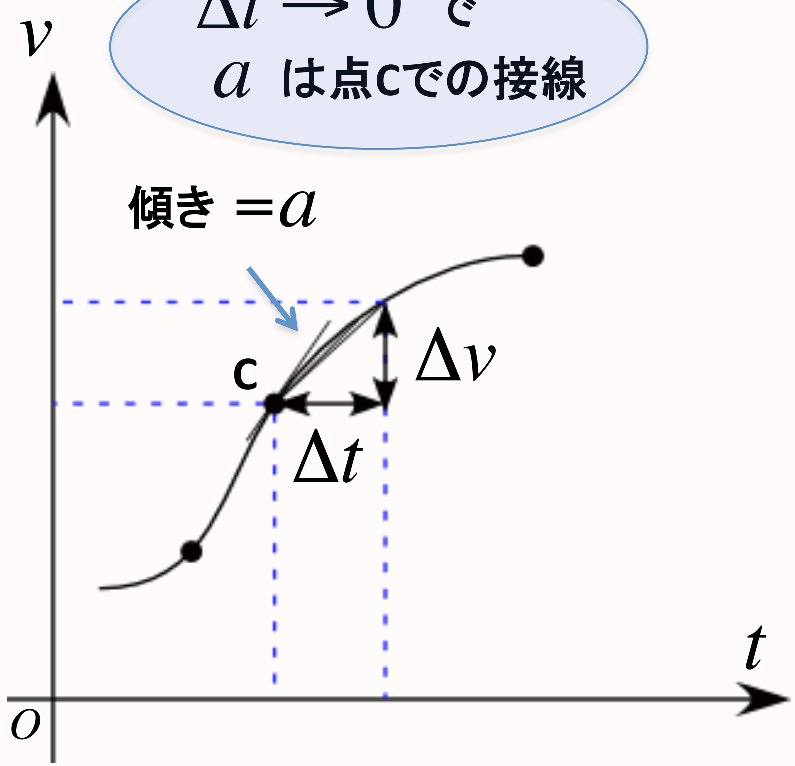
変位 x を時間 t で微分したもの

加速度～まとめ

加速度

質点の速度－時間の関係

$\Delta t \to 0$ で
a は点cでの接線



速度の時間変化率

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

速度 v を時間 t で微分したもの

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_3$$

と表すことができる

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

変位ベクトルの時間変化率

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

速度ベクトルの時間変化率

となる