運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

仕事とエネルギーの関係

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を、xで積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int \boxed{m\frac{dv}{dt}}vdt = \int Fdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int Fdx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

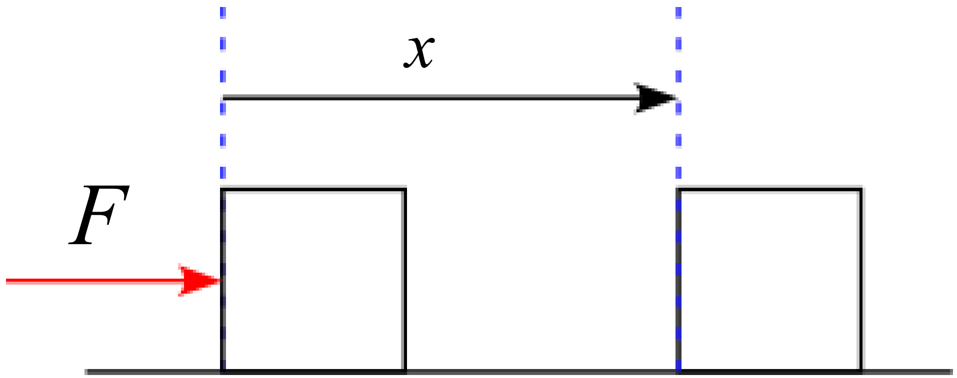
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事とエネルギー

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き

物体に力を加えて、
物体を移動させる事



運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

定義

力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

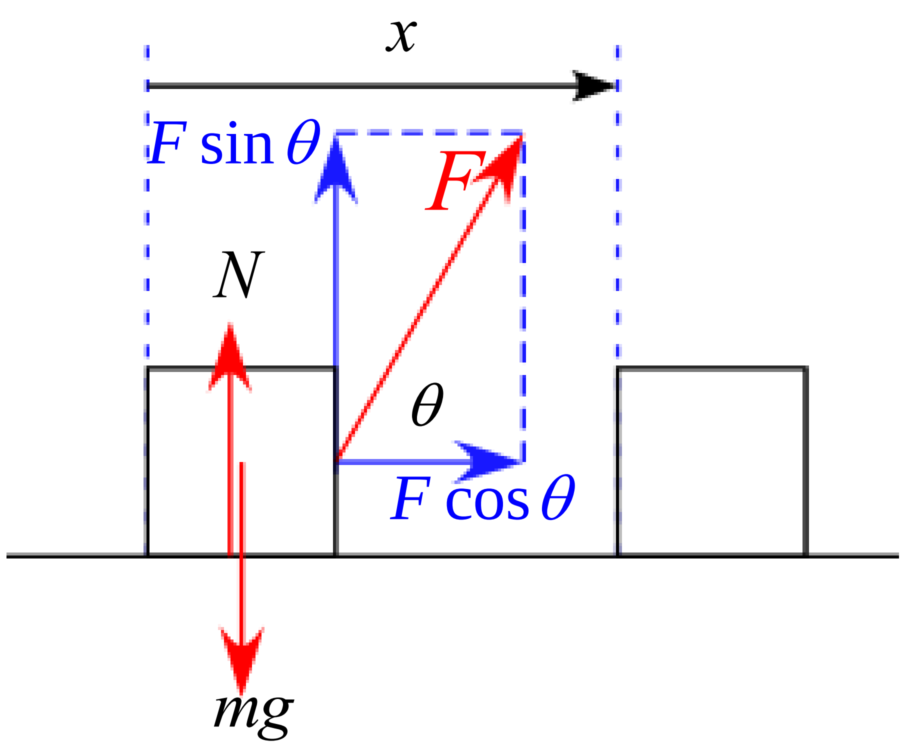
と定義される。

「力 F が物体に仕事 W をした」
「物体は力 F に仕事 W をされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]}[L] = \frac{[L^2M]}{[T^2]}$$

斜め上に引っ張る



物体に作用する力

場の力:重力 mg
接触力:張力 F
垂直抗力 N

仕事をしていない

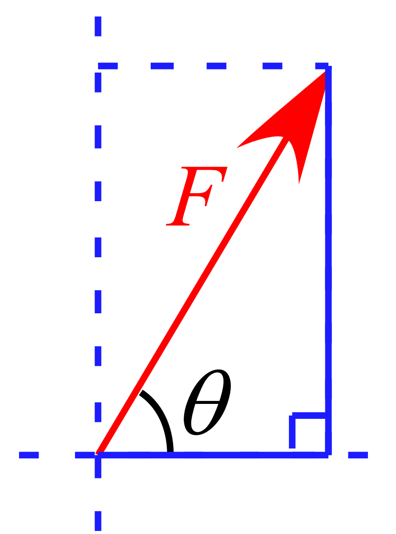
垂直抗力:N
場の力:重力 mg
Fのy成分:$F\sin\theta$

運動方程式

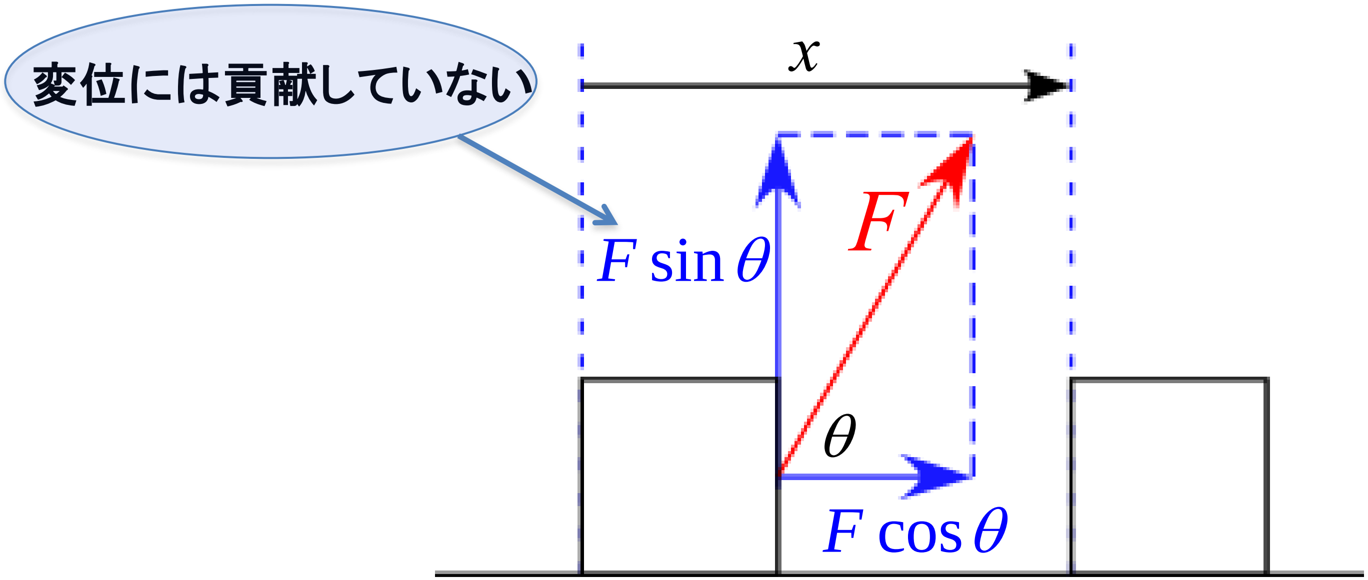
$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta$$

移動方向の力だけが仕事をする

$$W = F\cos\theta \cdot x$$



斜め上に引っ張る場合



力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

$$W = F\cos\theta \cdot x = Fx\cos\theta$$

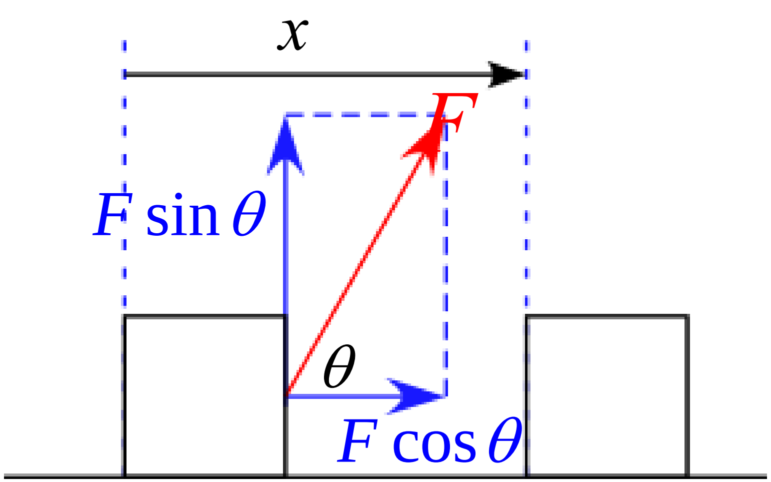
仕事

作用した力×距離

・力の向きと移動方向が同じ場合：$W = Fx$

・力の向きと移動方向が θ の角をなす場合：$W = Fx\cos\theta$

斜め上に引っ張る場合



運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta$$

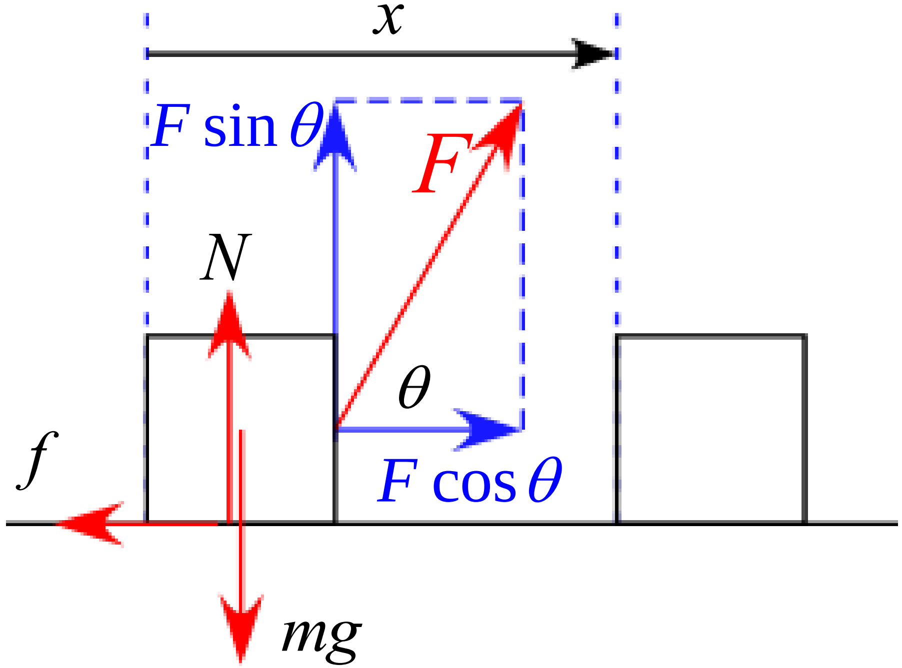
$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2}F\cos dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[F\cos\theta x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\cos\theta\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事〜摩擦力

斜め上に引っ張る＋摩擦力を考慮する場合



移動方向の力だけが仕事をする

摩擦力 f は右向きに移動することに対して邪魔をしている

負の仕事

物体に作用する力

場の力：重力 mg
接触力：張力 F
垂直抗力 N
摩擦力 f

仕事をしていない

垂直抗力：N
場の力：重力 mg
Fのy成分：$F\sin\theta$

正の仕事：$W_1 = F\cos\theta \cdot x$

負の仕事：$W_2 = -f \cdot x$

仕事～摩擦力

斜め上に引っ張る＋摩擦力を考慮する場合

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta - f$$

$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2}\left(F\cos - f\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[F\cos\theta x - fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\cos\theta\left(x_2 - x_1\right) - f\left(x_2 - x_1\right)$$

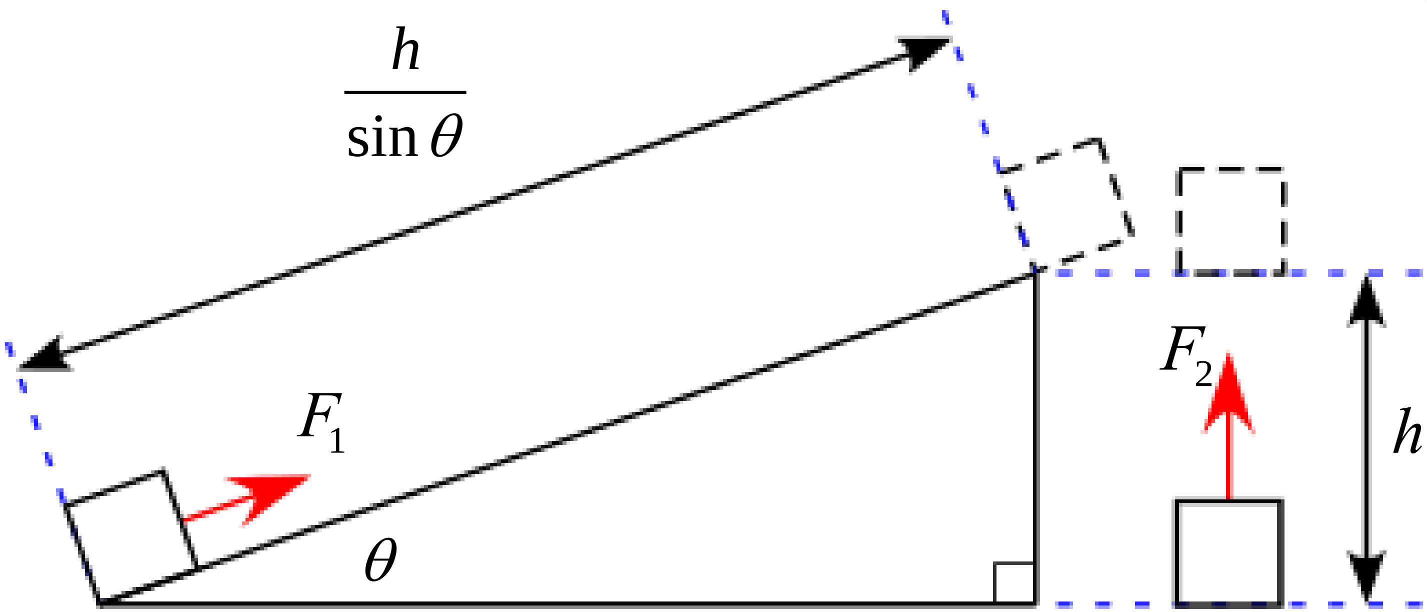
仕事の原理

たとえ、どんなに便利な道具を用いて物体を動かすのに
必要な力を小さくしても、決して仕事で得することは無い。

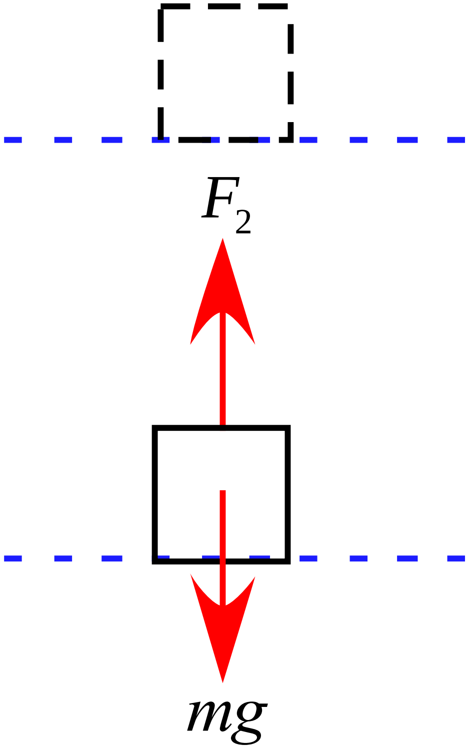
例

質量 m の物体を持ち上げるために必要な仕事量をそれぞれ考える。

ゆっくり動かす



真上に引き上げる場合



物体を持ち上げる為には

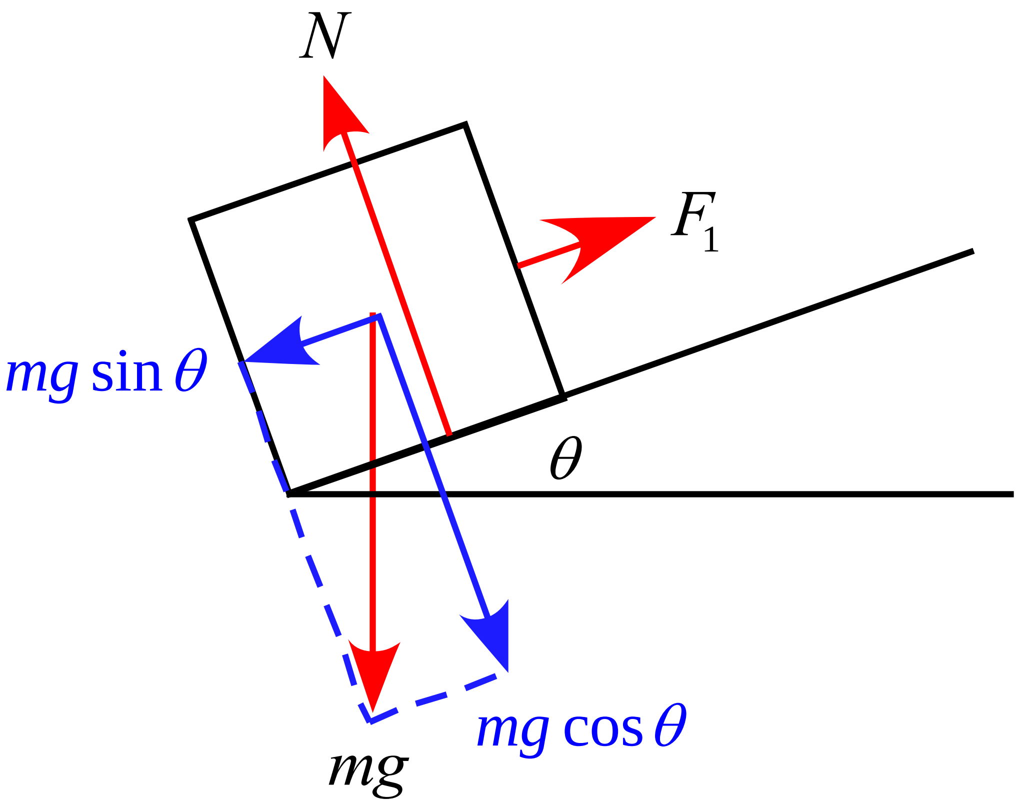
$$F_2 = mg$$

が必要である。

この時の仕事は

$$W_2 = F_2 \Delta x = mgh$$

斜面に沿って引き上げる場合



物体を引き上げる為には

$$F_1 = mg\sin\theta$$

が必要である。

この時の仕事は

$$W_1 = F_1\Delta x = mg\sin\theta \cdot \frac{h}{\sin\theta}$$

$$= mgh$$

従って

$$W_1 = W_2$$

となり、仕事としては同じになる。

仕事の原理

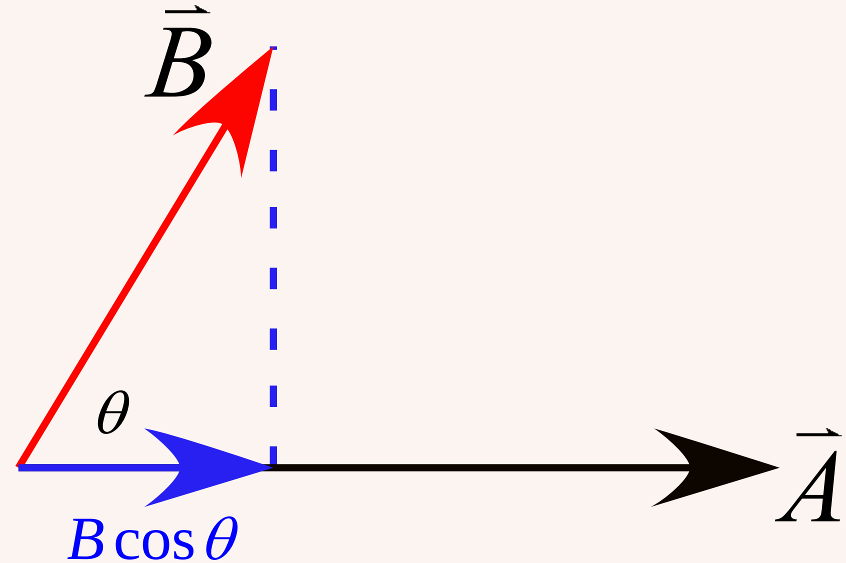
道具は、必要な力を小さくすることはできるが、仕事の量は変わらない。

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

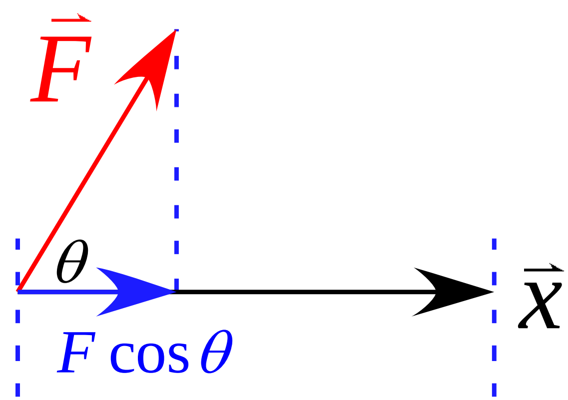
$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$$



これを仕事に応用すると

$$\vec{F}\cdot\vec{x}=Fx\cos\theta$$



つまり、

$$W=\vec{F}\cdot\vec{x}$$

仕事～線積分

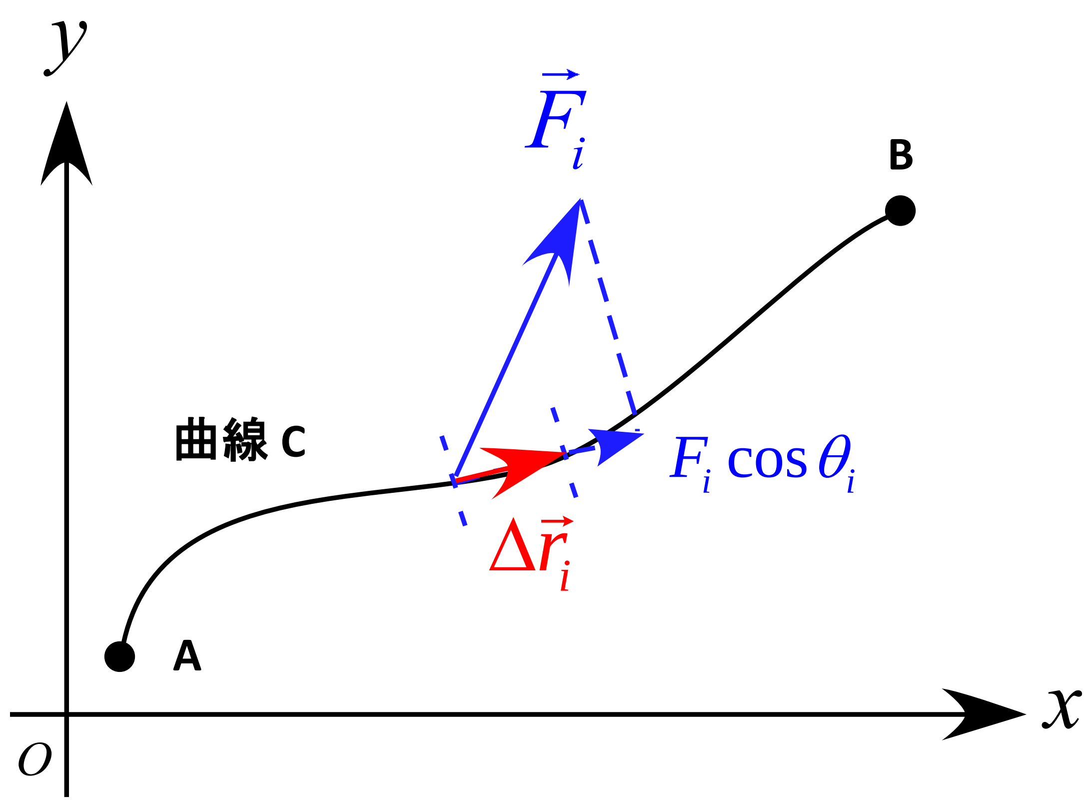
微小距離 $\Delta\vec{r}_i$ だけ移動

したとすると

$$\Delta W_i = F \cdot \Delta r_i \cos\theta_i$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i$$

となる。



$\Delta\vec{r}_i$ を限りなく小さくすると

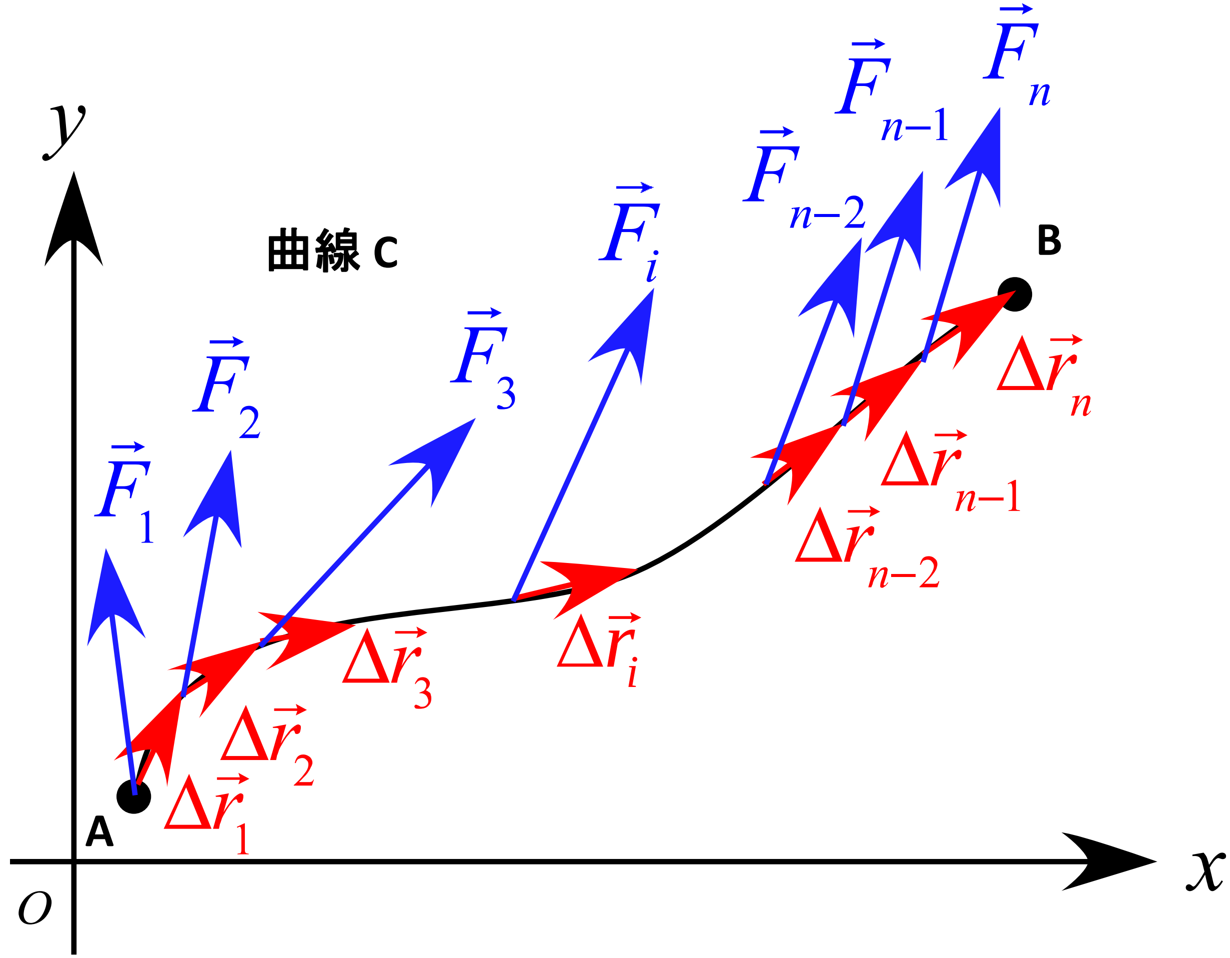
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

これを区間で積分すると

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

となる。

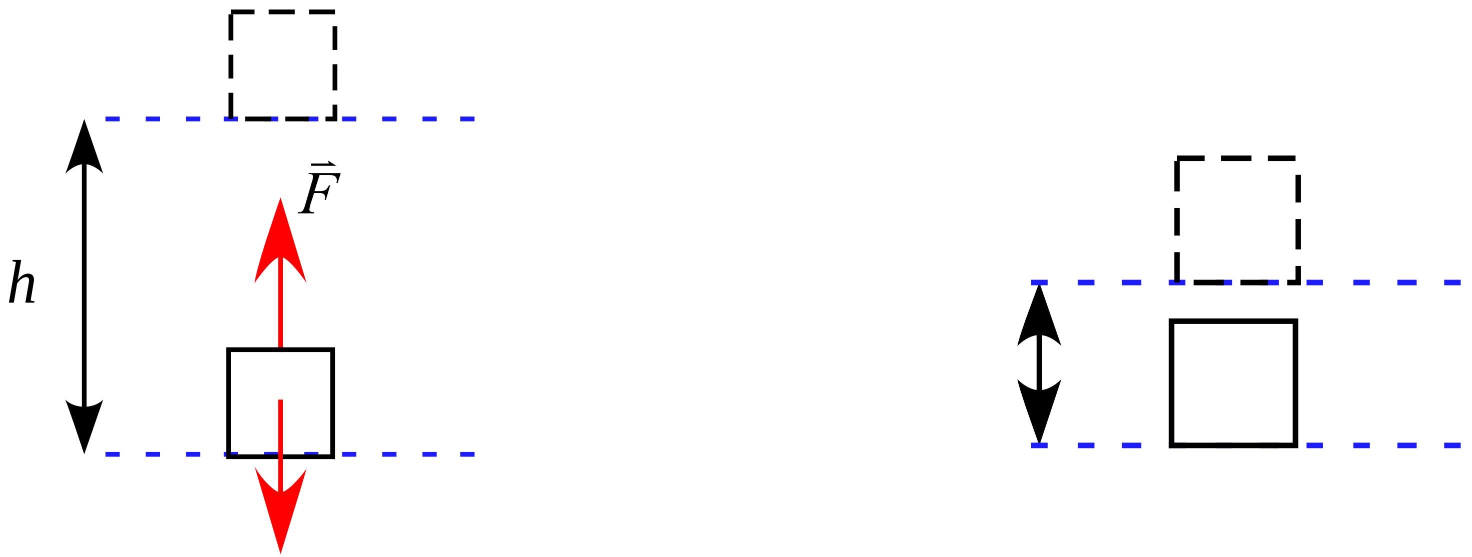
線積分



「仕事」は「力の距離積分」で計算することができる

仕事～積分計算

重力 $F = mg$ (一定) における仕事



$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_0^h mg dx = mg[x]_0^h = mgh$$

力学基礎演習

4.7 仕事とエネルギー
問題27　45ページ
追加設問

物体の運動方程式を書け。

4.7　仕事とエネルギー

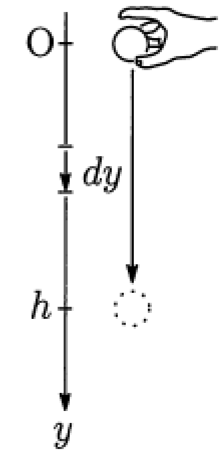


図 4.35: 重力のする仕事

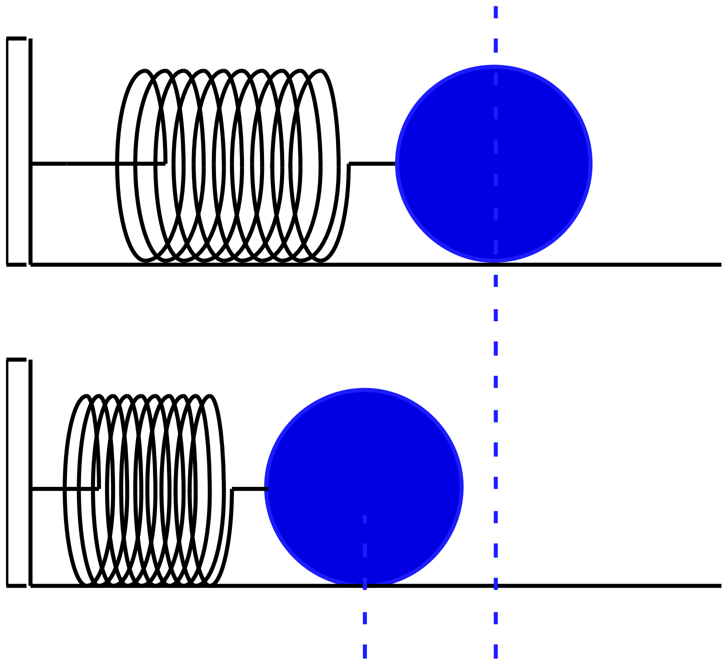
問題 27　重力加速度を g とし, 空気抵抗は無視できるものとするとき, 質量 m の物体を自由落下させた場合について考えよう。物体を離した位置を原点 O にとり鉛直下方を y 軸の正とする。図 4.35 のように, $y=0$ から $y=h(>0)$ まで落下した際に, 重力によって物体がなされた仕事 W は,

$$W = \int_0^h \boxed{}\, dy = \boxed{}$$

である。空欄に m, g, h を用いた式を書き込め。

仕事～積分計算

バネを x だけ縮めたときの弾性力 $F=kx$ における仕事



$$W=\int \vec{F}\cdot d\vec{x}=\int_0^x kx\,dx=k\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^x=\frac{1}{2}kx^2$$

仕事率

定義

仕事率：単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

国際単位：ワット　[W =J / S]

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L]\frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

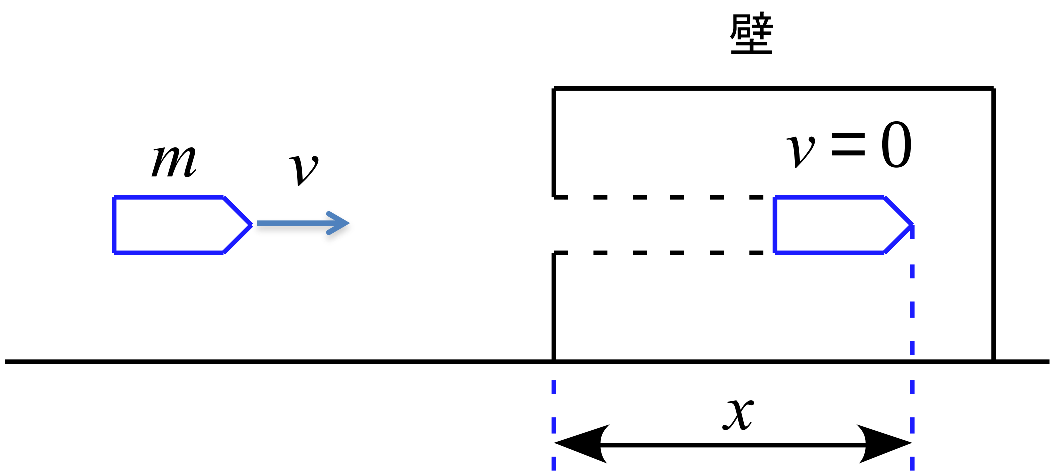
エネルギー

ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという

仕事をする能力＝エネルギー

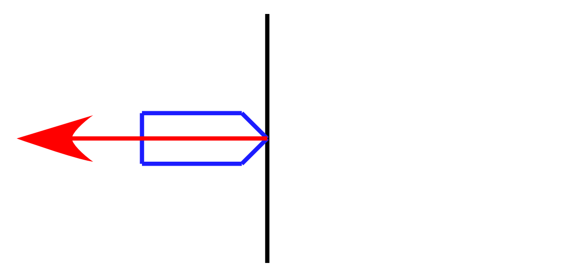
例

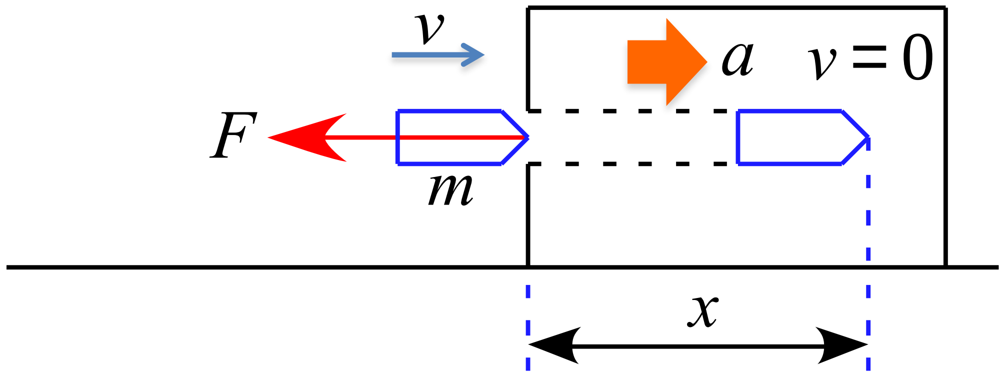
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





等加速度運動なので

$$0^2 - v^2 = 2ax$$

が成立する。

運動方程式は

$$ma = -F \quad a = -\frac{F}{m}$$

よって

$$0^2 - v^2 = 2\left(-\frac{F}{m}\right)x$$

エネルギー～運動エネルギー

両辺に $\frac{m}{2}$ をかけてみると

$$\boxed{\frac{1}{2}m\cdot 0^2} - \boxed{\frac{1}{2}m\cdot v^2} = \frac{1}{2}m\cdot 2\left(-\frac{F}{m}\right)x = \boxed{-Fx}$$

最後の運動能力　　最初の運動能力　　弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [\mathrm{J} = \mathrm{kg\ m^2 / s^2}]$$

次元

$$[M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

エネルギー～位置エネルギー

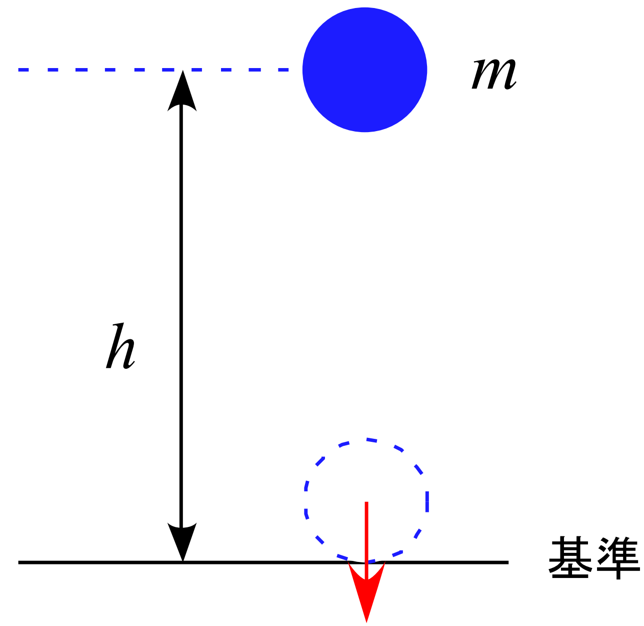
重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた

下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

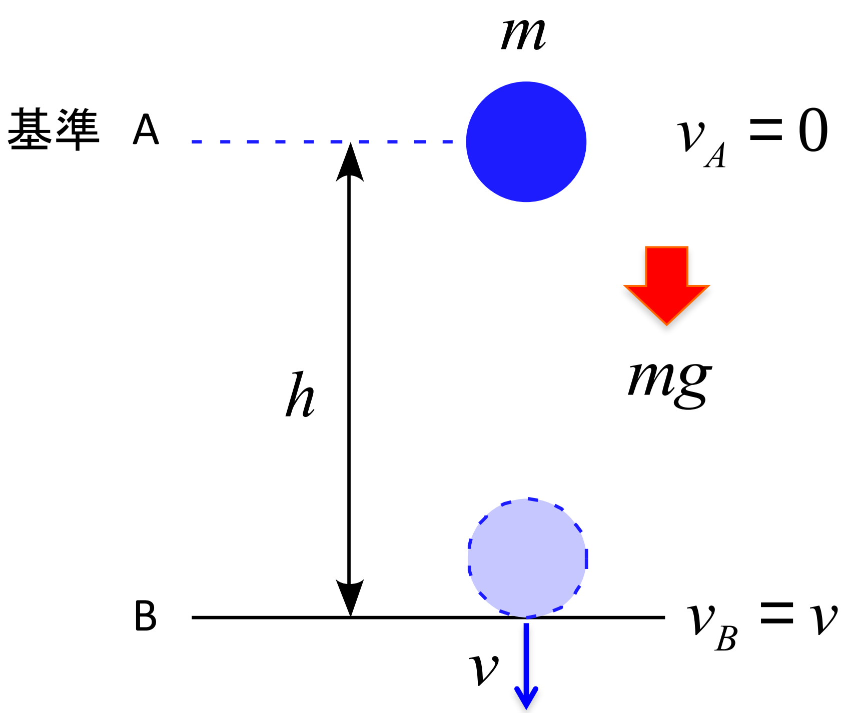
$$U = mgh \quad [\mathrm{J} = \mathrm{kg\ m^2 / s^2}]$$

基準からの高さに比例

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

運動エネルギーと位置エネルギー



外力の仕事

重力 mg が物体を
h だけ引きずりおろした

仕事をした

B点で運動エネルギーを
持つことができた

これを式で表すと

$$\boxed{mg \cdot h} = \boxed{\frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2}$$

外力の仕事　　運動エネルギーの変化

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

運動エネルギーの変化は外力の仕事による

エネルギー保存則

この式は、高さ h の位置エネルギーが運動エネルギーに変換されたとも考えられる

$$\boxed{mgh} = \boxed{\frac{1}{2}mv^2}$$

位置エネルギー　運動エネルギー

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

(重力場の運動)

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$m\textcolor{red}{v}\frac{dv}{dt} = F\textcolor{red}{\frac{dx}{dt}}$$

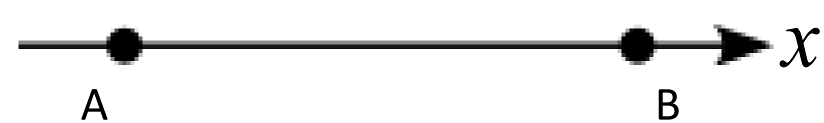
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = 0 \qquad x(t_2) = x$$



$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2} = \boxed{\int_0^x F dx}$$

エネルギーの変化量

$x = 0$ から x まで
物体に働く力 F がした仕事

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$ をかける ⇒ 単位時間あたりの変位をかけた

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する ⇒ 最初から最後まで時間に対して和を取る

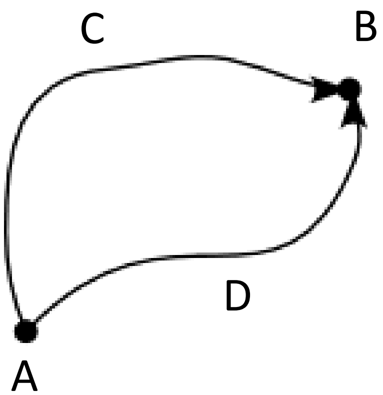
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

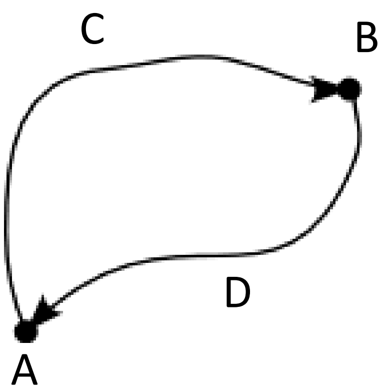
最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路





点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える

ここでの運動が保存力による運動とすると

点A－C－点Bの経路を通り、
そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A－D－点Bの経路を通り、同じ道を通って
点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

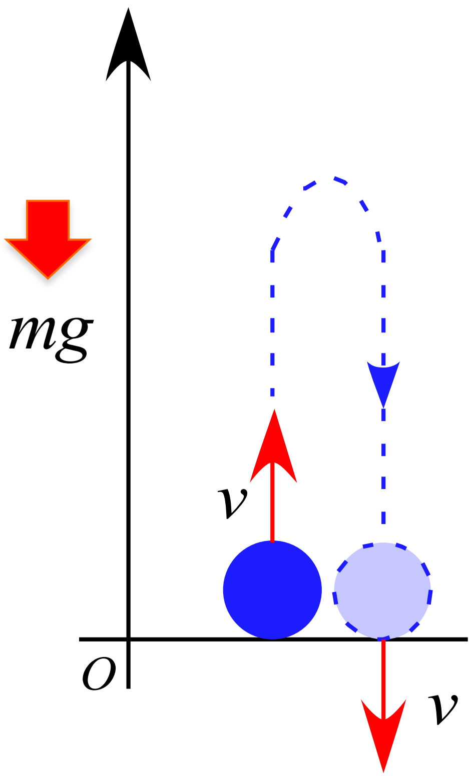
よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える



鉛直投げ上げ運動

この運動における仕事は

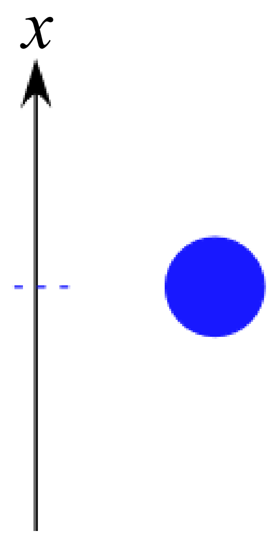
$$W = \int_{0}^{0} F dx = \int_{0}^{0} (-mg) dx = 0$$

元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる

保存力

エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}(-mgx)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + mgx$ は時間に対して

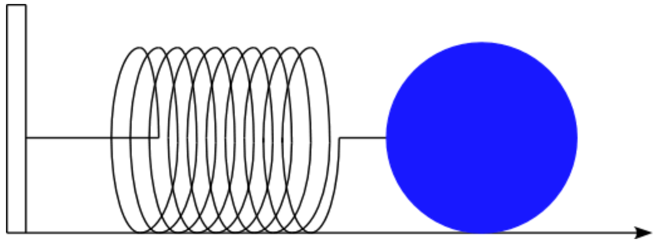
変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = 一定$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が
一定であるからエネルギー保存則が
成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

バネの単振動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{一定}$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

力学基礎演習

4.7 仕事とエネルギー

問題28　45ページ

追加設問　物体の運動方程式を書け。

問題29　36ページ

追加設問　(0) 物体の運動方程式を書け。

4.7.1 動摩擦力

問題30　47ページ

追加設問　物体の運動方程式を書け。

4.7.2 保存力と仕事

問題31　48ページ

力学基礎演習

4.7.3 ポテンシャルエネルギー

問題32　49ページ

追加設問　物体の運動方程式を書け。

問題33　49ページ

4.7.1 動摩擦力

問題34　50ページ

問題36　51ページ

追加設問　物体の運動方程式を書け。

問題37　52ページ

追加設問　物体の運動方程式を書け。