2016講義ノート
物理学基礎 (力学)
工学部・機械工学科

速度に比例した抵抗力が作用する運動 – 補足

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

この微分方程式を解くと

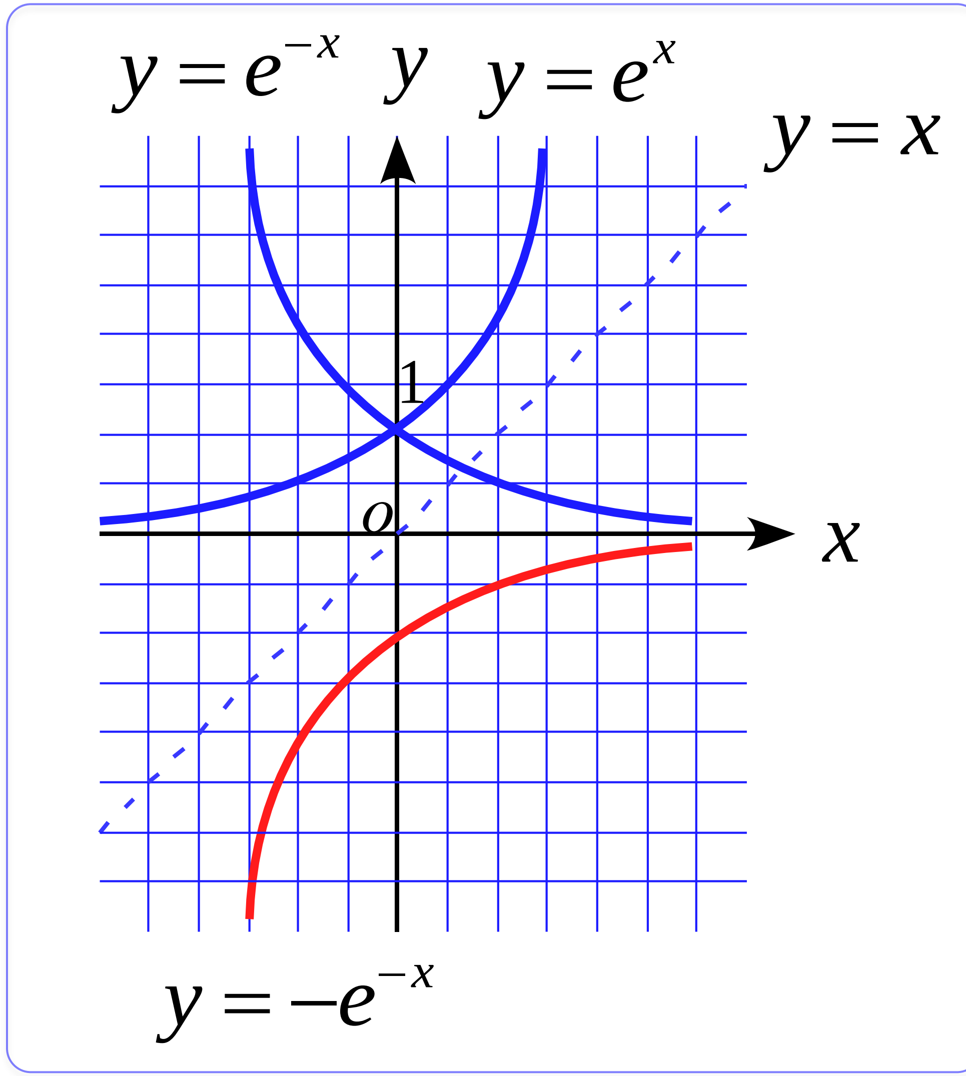
$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

この式を見てみると

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

ざっくりみると $-\frac{1}{e^t}$ のグラフ

であることがわかる



$t=0$ のとき

$$v(0)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}\right)=\frac{mg}{k}(1-1)=0$$

$t=\infty$ のとき

$$v(\infty)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot\infty}\right)=\frac{mg}{k}(1-0)=\frac{mg}{k}$$

グラフを書く時のpoint

- 始点　$t=0$
- 終点　$t=\infty$
- 概形
- 特殊な点

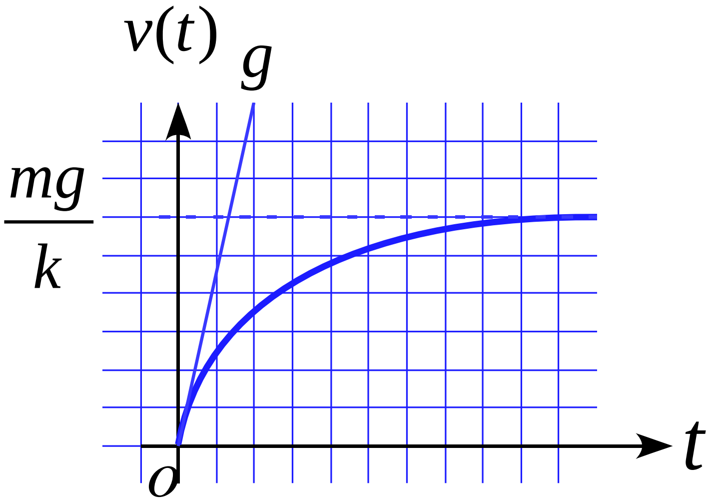
$t=0$ のときの傾きは

$$\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

$$=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{d}{dt}v(0)=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)\cdot 1$$

$$=g$$

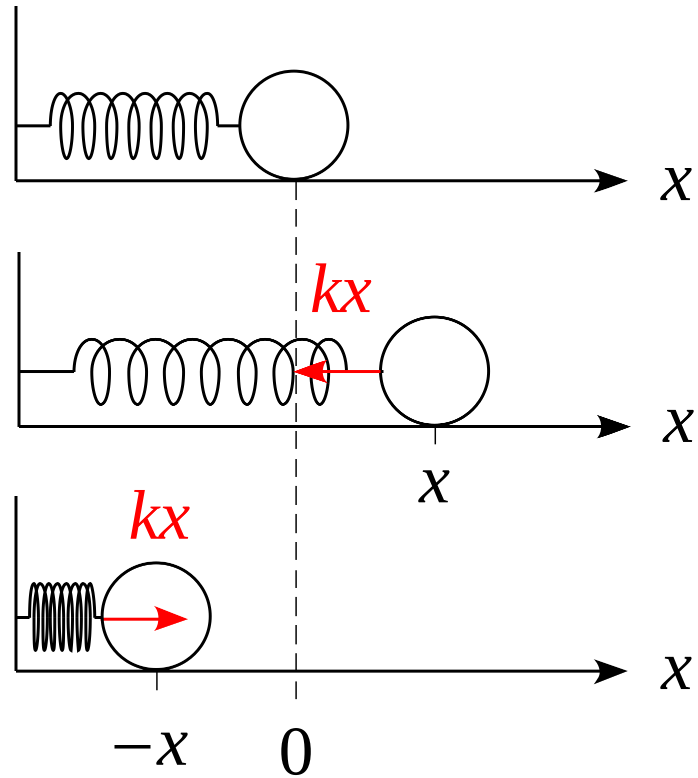


振動～単振動

単振動(調和振動)のモデル

バネの復元力

$$\vec{f}_s = -k\vec{x}$$ フックの法則



運動方程式

$$m\vec{a} = -k\vec{x}$$

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$

ここで、$\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

振動～単振動

2回微分したら
符号が逆になって元に戻る

三角関数 ➡ sin　cos

この微分方程式の解は一般に

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

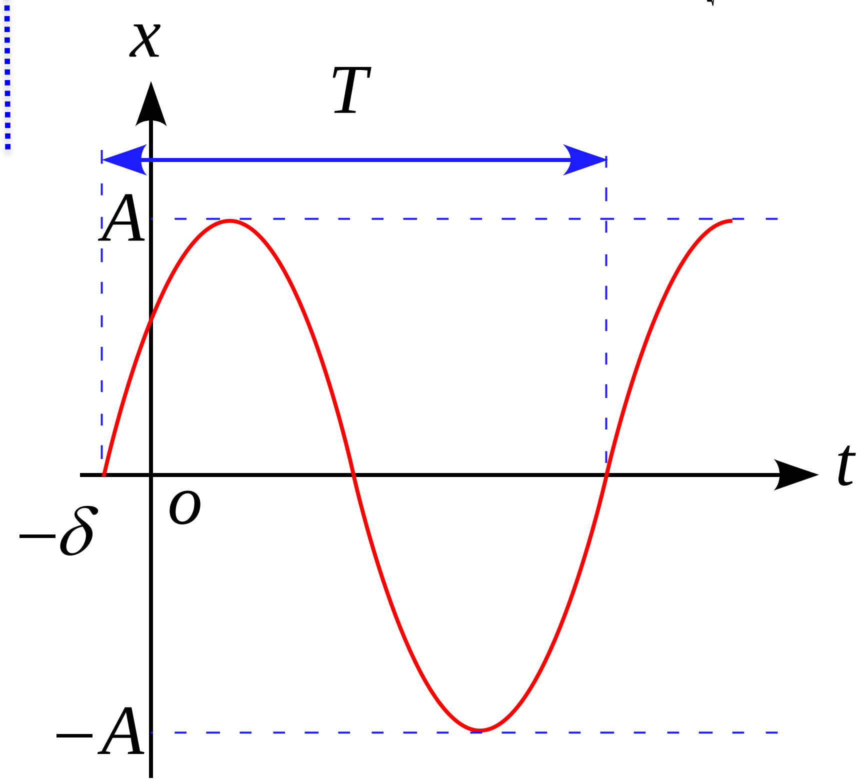
角振動数　　初期位相

と書ける。

周期 T は

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



振動～単振動

初期条件

$t=0$ で、$x=0,\delta=0$ とすると

$$x(t)=A\sin\omega t$$

と表すことができる。

$$v=\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}\left[A\sin\omega t\right]$$

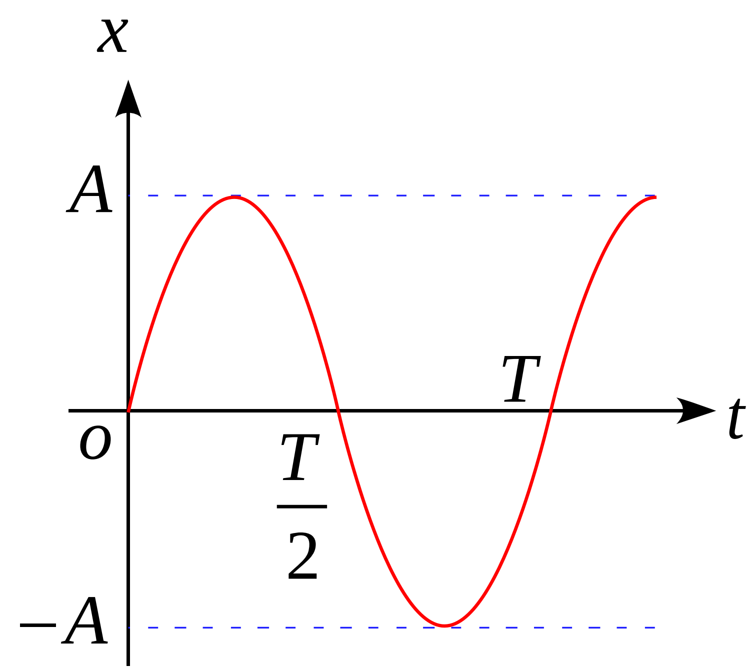
$$=A\omega\cos\omega t$$

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left[A\omega\cos\omega t\right]$$

$$=-A\omega^2\sin\omega t$$

$$=-\omega^2 x$$

$$\boxed{x(t)=A\sin\left(\omega t+\delta\right)}$$



$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

振動～初期条件

単振動の初期条件

単振動では2つの初期条件が必要になる

$$x = A\sin(\omega t + \delta)\ ,\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

定数

A： **振幅**

δ： **初期位相**

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\sin(\omega t + \delta)\right]$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

例えば

$t = 0$ **で、**$x = x_0, v = v_0$ **とすると**

$$x(0) = A\sin(\omega \cdot 0 + \delta) = x_0$$

$$A\sin\delta = x_0$$

$$v(0) = A\omega\cos(\omega \cdot 0 + \delta) = v_0$$

$$A\omega\cos\delta = v_0$$

振動～初期条件

よって

$$A\sin\delta = x_0 \qquad A^2\sin^2\delta = x_0^2$$

$$A\cos\delta = \frac{v_0}{\omega} \qquad A^2\cos^2\delta = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

和を取ると

$$A^2\sin^2\delta + A^2\cos^2\delta = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$A^2\left(\sin^2\delta + \cos^2\delta\right) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

よって

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

振動～初期条件

比を取ると

$$A\sin\delta = x_0$$

$$A\cos\delta = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\frac{A\sin\delta}{A\cos\delta} = \frac{x_0}{\frac{v_0}{\omega}}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

まとめると

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)}$$

と表される。

単振動～例題

例題

単振動の一般解 $x(t) = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$ **において、**

以下の初期条件を満たすような $x(t)$ **を求めよ。**

1. $x(0) = 0, v(0) = v_0$

2. $x(0) = x_0, v(0) = 0$

3. $x(0) = x_0, v(0) = v_0$

4. $x(t_1) = x_0, v(t_1) = 0$

単振動～微分方程式

2階の線形微分方程式を解く

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

解を $x = e^{\lambda t}$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\lambda e^{\lambda t}\right)$$

$$= \lambda^2 e^{\lambda t}$$

よって、

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\frac{k}{m}e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0}$$

微分方程式の特性方程式

この式を満たす λ が存在すれば
$x = e^{\lambda t}$ がこの微分方程式の解である
ことを示している。

単振動～微分方程式

この特性方程式の解は

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} = \omega$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

解は2つ存在

従って、この2つの解は

$$x_1 = e^{i\omega t}$$

$$x_2 = e^{-i\omega t}$$

と書ける。

単振動～微分方程式

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

この2解の和や定数倍したものも解となる。
従って、

$$x = ax_1 + bx_2$$

$$= ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t}$$

$$= a\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + b\left[\cos\left(-\omega t\right) + i\sin\left(-\omega t\right)\right]$$

$$= a\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + b\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right)$$

$$= \left(a+b\right)\cos\omega t + i\left(a-b\right)\sin\omega t$$

$$= \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$$

$$= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

$$= A\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

$$\alpha = a + b$$

$$\beta = i\left(a-b\right)$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

単振動～エネルギー

バネの弾性力による位置エネルギー

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = -\int kxdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = -\int kxdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = -\int kxdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt + \int kxdx = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

C は積分定数

従って、運動エネルギーと
バネの弾性力による位置エネルギーの和が
一定の値になることを表している。

単振動～運動エネルギー

運動エネルギー $K(t)$ は

$$K(t) = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left[A\omega\cos\left(\omega t + \delta\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \cos^2\left(\omega t + \delta\right)$$

一般解

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left[A\sin\left(\omega t + \delta\right)\right]$$

$$= A\omega\cos\left(\omega t + \delta\right)$$

単振動～位置エネルギー

一般解

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

バネの弾性力による位置エネルギー $U_s(t)$ は

$$U_s(t) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[A\sin\left(\omega t + \delta\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\omega^2\right)A^2\sin^2\left(\omega t + \delta\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\left(\omega t + \delta\right)$$

単振動～力学的エネルギー

従って、力学的エネルギー$E(t)$ は

$$E(t) = K(t) + U_s(t)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2\left(\omega t + \delta\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t + \delta\right)$$

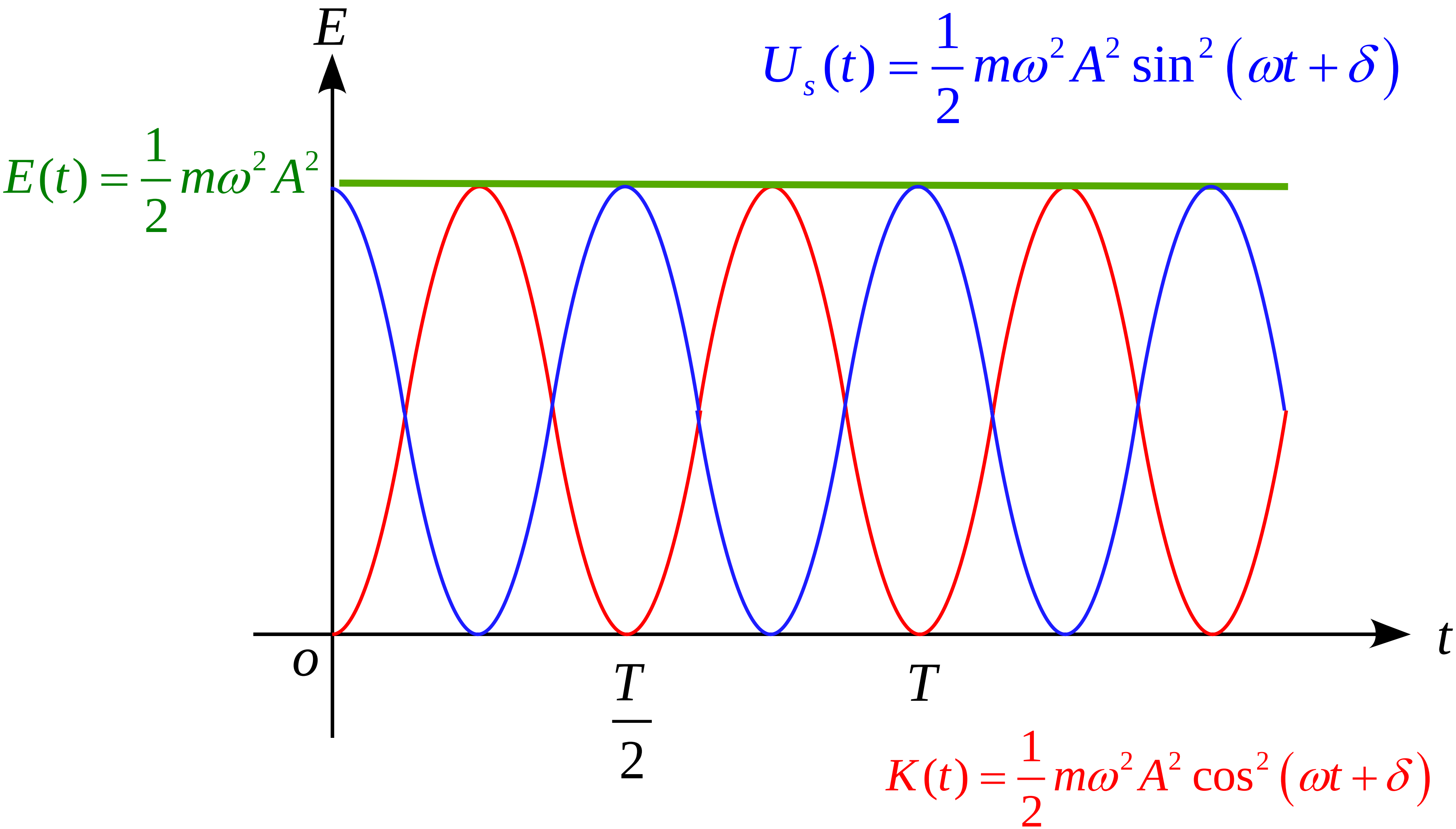
$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \left[\cos^2\left(\omega t + \delta\right) + \sin^2\left(\omega t + \delta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

となり、常に一定の値になることが確認できる。

単振動～エネルギーグラフ

単振動の力学的エネルギーのグラフ



単振動～例題

例題

なめらかな水平面上に壁からバネが取り付けられている。
バネは自然長の状態で静止しているとする。
以下の問いに答えよ。

$t=0$ で初速度 v_0 を壁向きに与えると、物体は単振動をした。
物体の質量を m、バネ定数を k とする。

1. 物体の運動方程式を記述せよ。

2. 物体の速度 $v(t)$ を求めよ。

3. 物体の変位 $x(t)$ を求めよ。

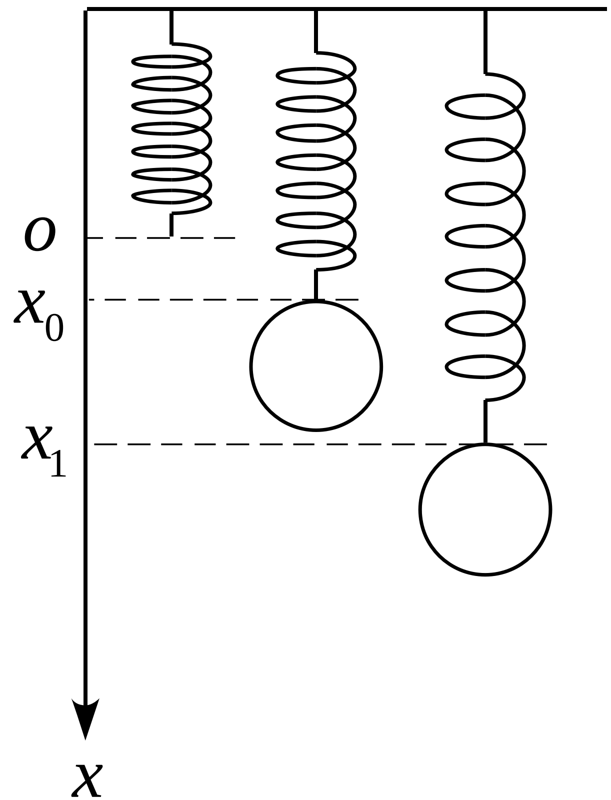
4. 物体の加速度 $a(t)$ を求めよ。

5. $v(t), x(t), a(t)$ のグラフを横軸 t として描け。

単振動～例題

例題

バネの片方を天井に固定し吊り下げた。このときのバネの下端を原点とする。
バネの下端に質量 m の物体を取り付けて静止させた。この位置を x_0 とする。
物体をそこからさらに x_1 の位置まで引き下げ、静かに離し振動させた。
この瞬間を $t=0$ とする。以下の問い に答えよ。



1. 物体の運動方程式を記述せよ。

2. 物体の速度 $v(t)$ を求めよ。

3. 物体の変位 $x(t)$ を求めよ。

単振り子～例題

例題

質量 m の物体が長さ L のひもにつるされている。
ひもをつるしている点を通る鉛直線を基準とし、振れ角 θ_0 で静かに手放した。
このときの位置を A とする。但し、$A \ll L$ である。
以下の問いに答えよ。

1. 物体の運動方程式を記述せよ。

2. 物体の運動は単振り子とみなせる。周期、振幅を求めよ。

3. 物体を手放した時刻を $t=0$ とすると、原点を初めて通過する時刻 t_1 を求めよ。

4. 物体の変位 $x(t)$ のグラフを横軸 t として描け。

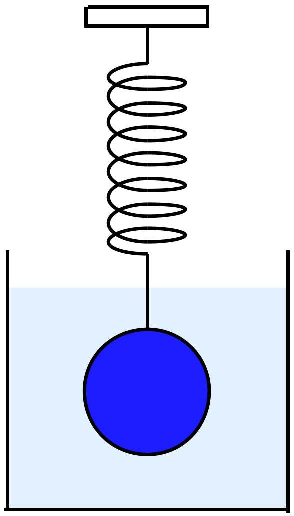
(参考)

その他の振動

・減衰振動

速度に比例する抵抗力・・・など

液体中



・強制振動

強制力が働く

外部から周期的な力が加わった場合

復元力が働くように設計された橋梁
(一定の周期で風が吹く)

ブランコ

お寺の鐘