2016講義ノート
物理学基礎 (力学)
工学部・機械工学科

エネルギー平均～例題

例題

質点が単振動している。1周期についての運動エネルギーの平均値 $\overline{K}$ **と位置エネルギーの平均値** $\overline{U}$ **を求め、これらが等しいことを示せ。**

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

回転運動と角運動量

質点の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

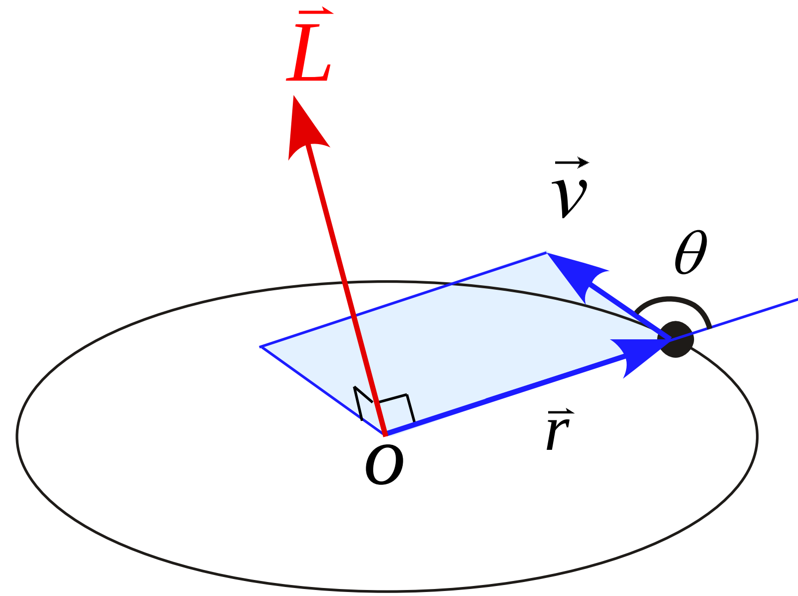
両辺に左から位置ベクトル $\vec{r}$ をかけると(外積)

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\boxed{\vec{r} \times \vec{p}}}_{\text{角運動量}}\Big) = \underbrace{\boxed{\vec{r} \times \vec{F}}}_{\text{モーメント}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}}$$

回転運動と角運動量

途中の式変形について (何故、$\vec{r}$ が微分の中に入るのか？)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\,//\,m\vec{v}$ より

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\vec{0}$$

課題5 (3)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

角運動量とモーメント

角運動量とモーメントの関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

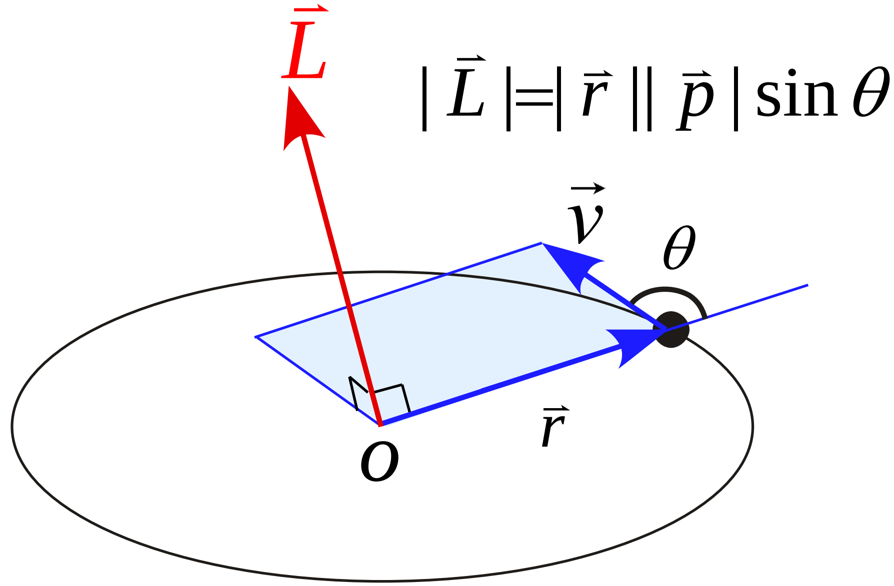
質点が点 O まわりを回転する勢いを表している

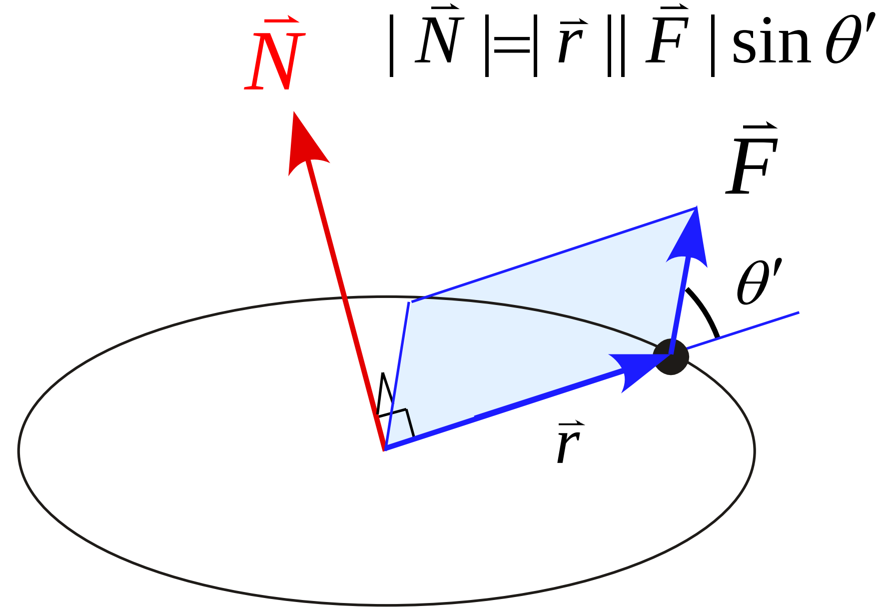
$$[L][M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T]}$$

$$N = \vec{r} \times \vec{F}$$

点Oまわりの力のモーメント

$$[L][M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$





角運動量保存則

角運動量とモーメントの関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

ある質点の点 O まわりの
角運動量の変化は
この質点に働く点 Oまわりの
力のモーメントに等しい

もし、モーメント $\vec{N} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

外力によるモーメントの総和 $\vec{N}$ が $\vec{0}$ のときは、内力が働いていたとしても、系の角運動量 $\vec{L}$ は変化しない

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている

力 $\vec{F}$ の作用線が常にある任意の点 O を通る

中心力

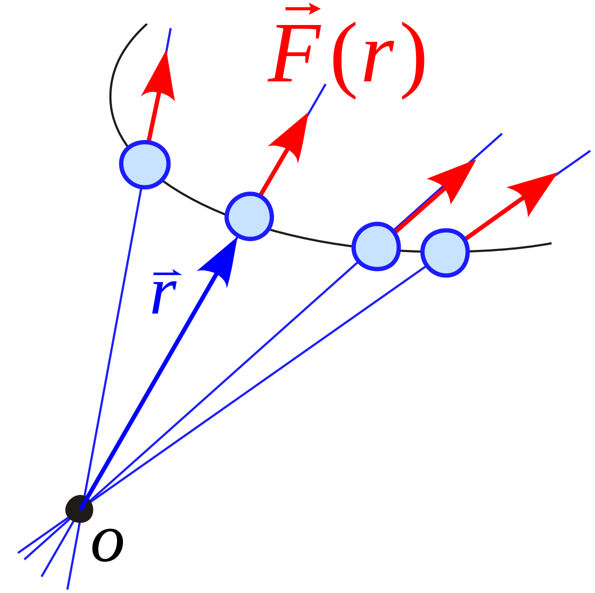
$$\vec{F}(r) = F(r)\boxed{\frac{\vec{r}}{r}}$$

力の大きさ

力の向き
単位ベクトル

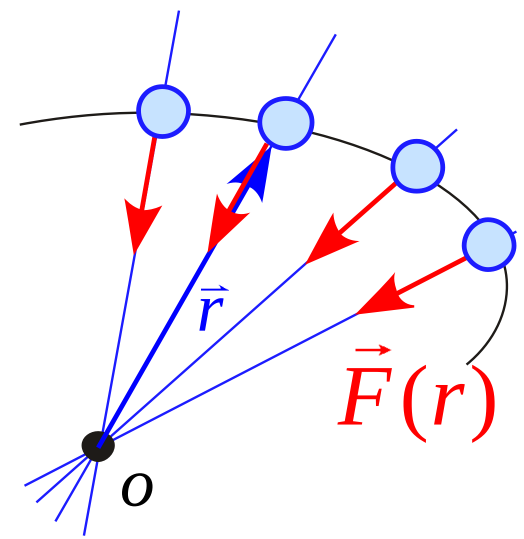
$$F(r) > 0$$

(斥力)



$$F(r) < 0$$

(引力)



中心力～角運動量保存

角運動量の変化を計算すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)$$

$$=m\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}+m\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$=m\vec{v}\times\vec{v}+\vec{r}\times\vec{F}$$

$$=0+\vec{r}\times\boxed{F(r)\frac{\vec{r}}{r}}$$

中心力

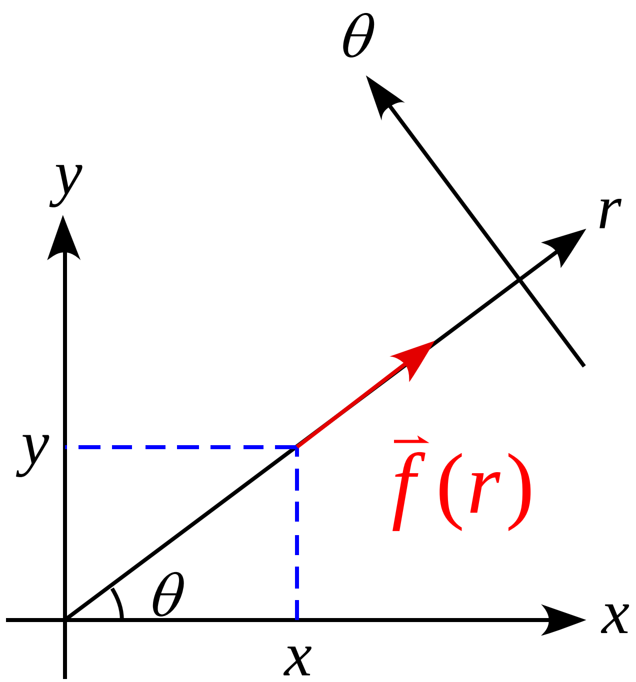
$$=0$$

従って、中心力が働く運動では角運動量が保存する

中心力～運動方程式

運動方程式から考えるとする

極座標表示を使用する



中心力は

r 方向 $F_r = F(r)$

θ 方向 $F_\theta = 0$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、a_r, a_θ は

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表されるので、

課題4 (2)

中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F(r)$$

動径方向の運動方程式

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

と表される

中心力～運動方程式

ここで、θ 方向の式が何を示しているか検討してみよう

変位は

$$x(t) = r\cos\theta$$

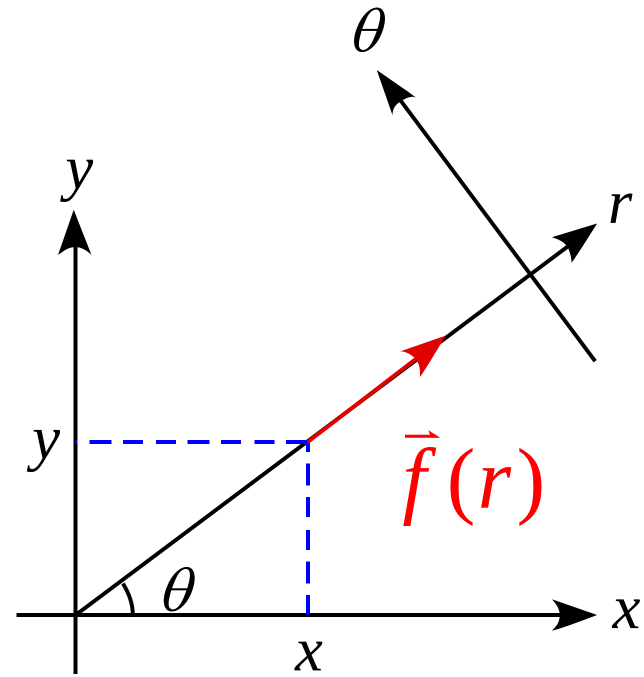
$$y(t) = r\sin\theta$$

である。
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 L は

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

中心力～運動方程式

ここで、角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - r_x \cdot 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix}$$

と表される

課題 1 (1)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

中心力～運動方程式

従って、z 成分だけ考えればよく

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

$$= r\cos\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] - r\sin\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= rm\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - rm\frac{dr}{dt}\sin\theta\cos\theta + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}$$

と表される

中心力～運動方程式

従って、θ 方向の式において

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{dL}{dt}=0$$

となる

即ち、

$$ma_\theta=0$$

は角運動量保存則を表している