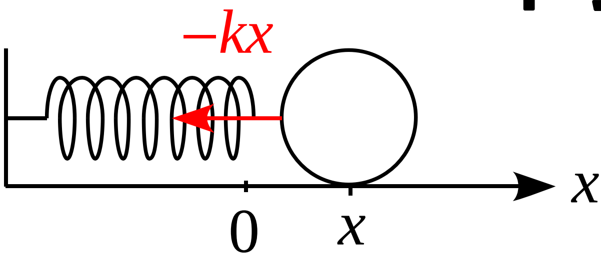
2016講義ノート
物理学基礎 (力学)
工学部・機械工学科

単振動～まとめ



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \delta)\ ,\ \omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

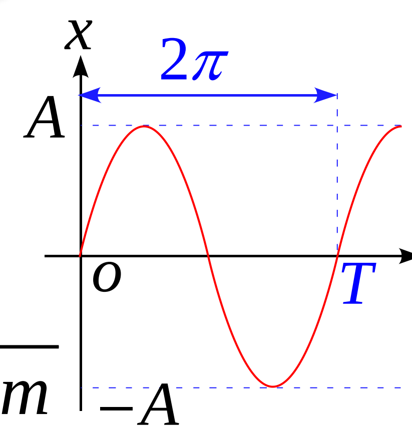
ωについて

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}A\sin(\omega t + \delta)$$

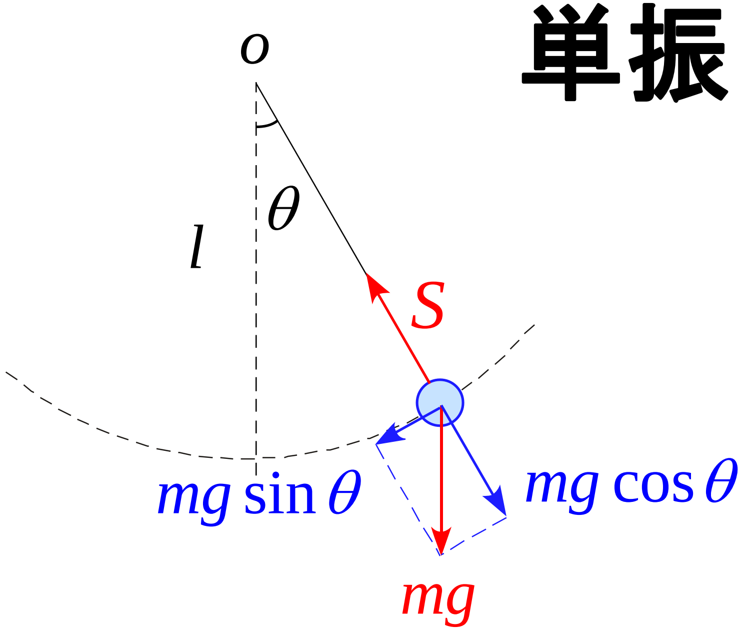
周期 T について



$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

単振り子～まとめ



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg\cos\theta - S$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = mg\cos\theta - S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

単振り子～まとめ

糸の長さは $r = l$ (一定) なので

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

従って、

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - S$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

となる。
2式目は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

と変形できる。

振れ角 θ が十分に小さければ

$$\sin\theta \simeq \theta$$

と近似ができ、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

微分方程式を解くと

$$\theta(t) = A\sin(\omega t + \delta) \;, \omega^2 = \frac{g}{l}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

単振り子～まとめ

ω について

$$\frac{d\theta}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

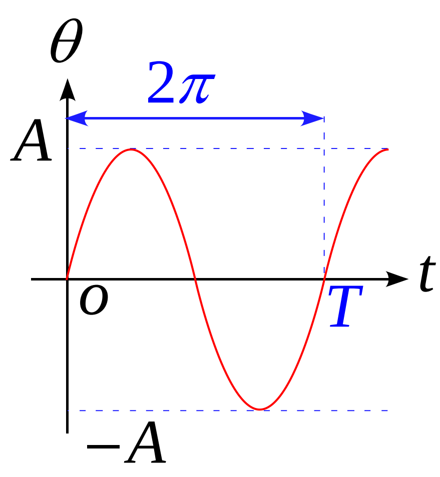
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\boxed{\frac{g}{l}}A\sin(\omega t + \delta)$$

周期 T について

$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

ある時刻 t での位置は

$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$ とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

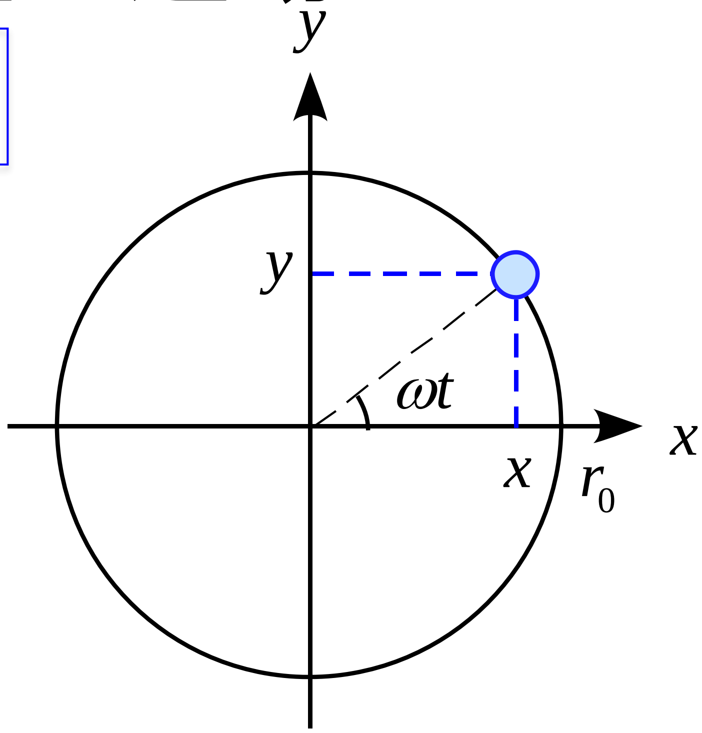
と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt}\left[r_0 \cos \omega t\right] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left[r_0 \sin \omega t\right] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。



円運動～等速円運動

従って、

$$v=\sqrt{v_x{}^2+v_y{}^2}=\sqrt{\left(-r_0\omega\sin\omega t\right)^2+\left(r_0\omega\cos\omega t\right)^2}$$

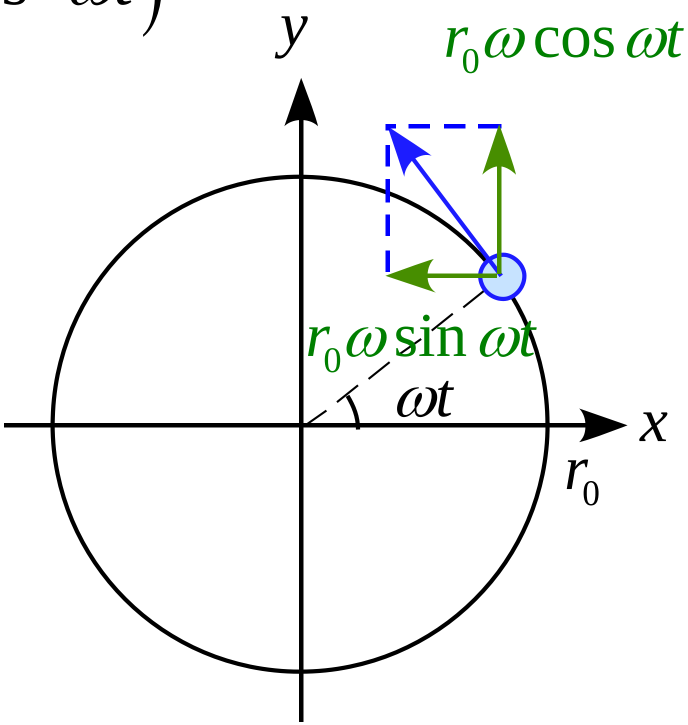
$$=\sqrt{r_0{}^2\omega^2\sin^2\omega t+r_0{}^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$=\sqrt{r_0{}^2\omega^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)}$$

$$=\sqrt{r_0{}^2\omega^2}$$

$$=r_0\omega$$

となる。



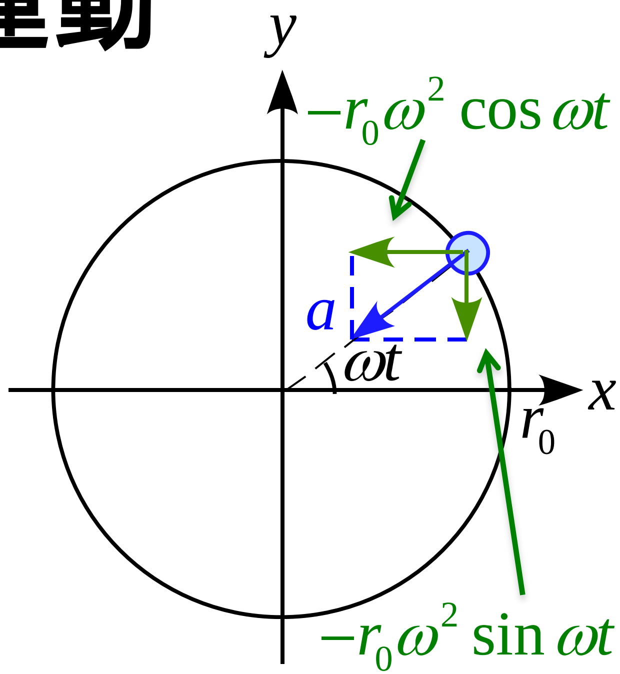
円運動～等速円運動

加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}\left[-r_0\omega \sin \omega t\right] = -r_0\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}\left[r_0\omega \cos \omega t\right] = -r_0\omega^2 \sin \omega t$$

と表される。



$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega^2 \cos \omega t\right)^2 + \left(-r_0\omega^2 \sin \omega t\right)^2}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4 \cos^2 \omega t + r_0{}^2\omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4 \left(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t\right)}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4} = r_0\omega^2$$

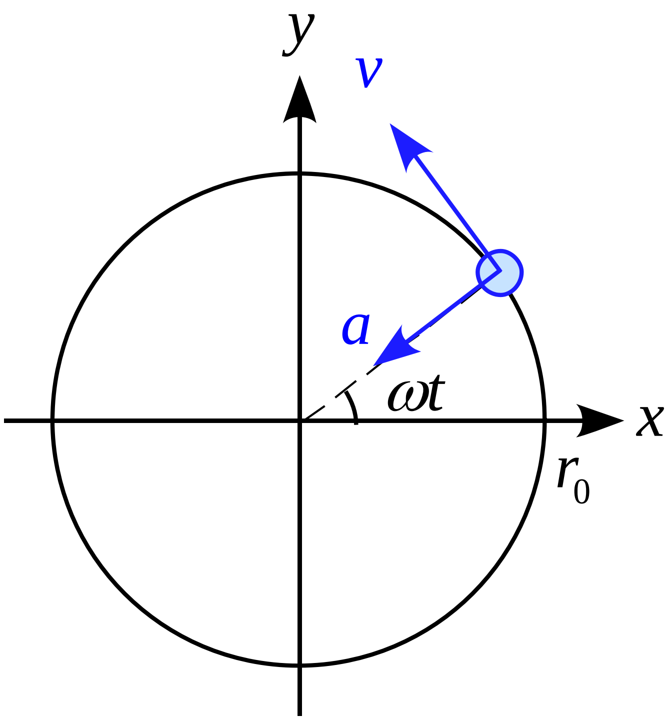
となる。

円運動～等速円運動

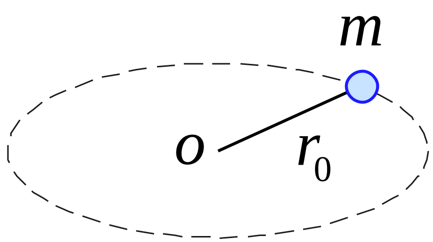
等速円運動 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ **(一定)**

$$v = r_0\omega$$

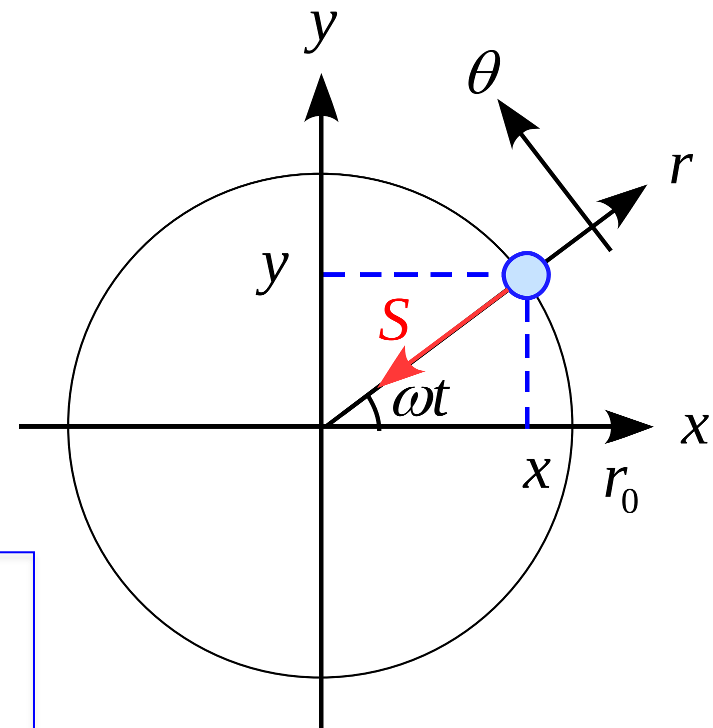
$$a = r_0\omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



円運動〜運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$

a_r, a_θ

に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定) なので $\dfrac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = S$$

$$mr_0\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

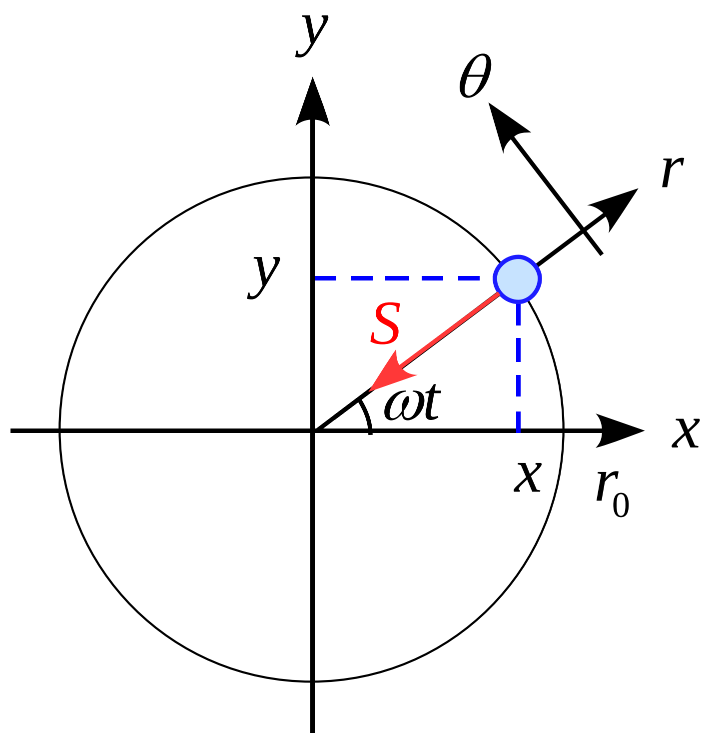
角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

とすると、

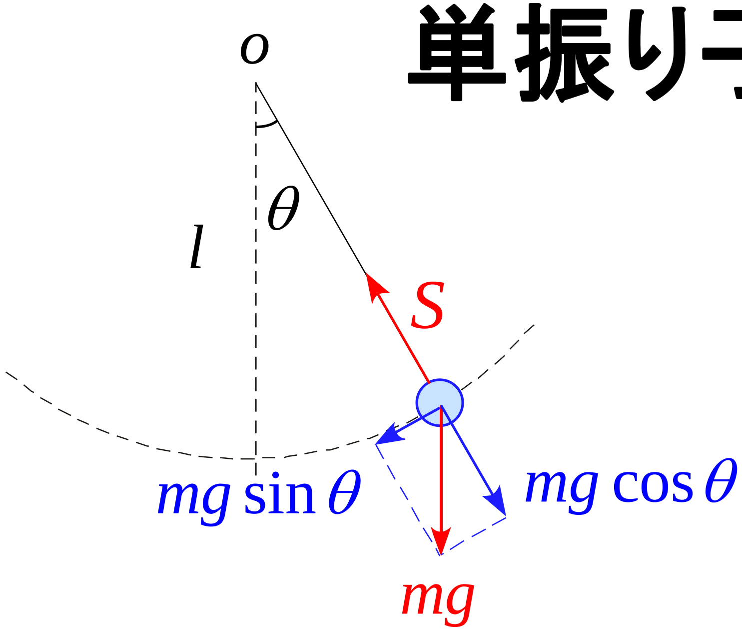
$$m\boxed{r_0\omega^2} = S$$

$$ma = S$$

中心方向に加速度があると考えられる



単振り子～エネルギー



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg\cos\theta - S$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = mg\cos\theta - S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

単振り子～エネルギー

一般的な極座標表示 (速度)

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

運動方程式の θ 方向の式に着目

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

糸の長さは $r = l$ (一定) なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

さらに、極座標表示において θ 方向の速度は一般的に $\boxed{v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}}$ であるから

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

と表される。

単振り子～エネルギー

ここで両辺に $v_\theta = l\dfrac{d\theta}{dt}$ をかけると

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}v_\theta = -mg\sin\theta l\frac{d\theta}{dt}$$

代入

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

$$ml\frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}v_\theta = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$mv_\theta\frac{dv_\theta}{dt} = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right) = \frac{d}{dt}(mgl\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2 - mgl\cos\theta\right) = 0$$

となる。

単振り子～エネルギー

従って、この運動においてエネルギーが保存することがわかる。

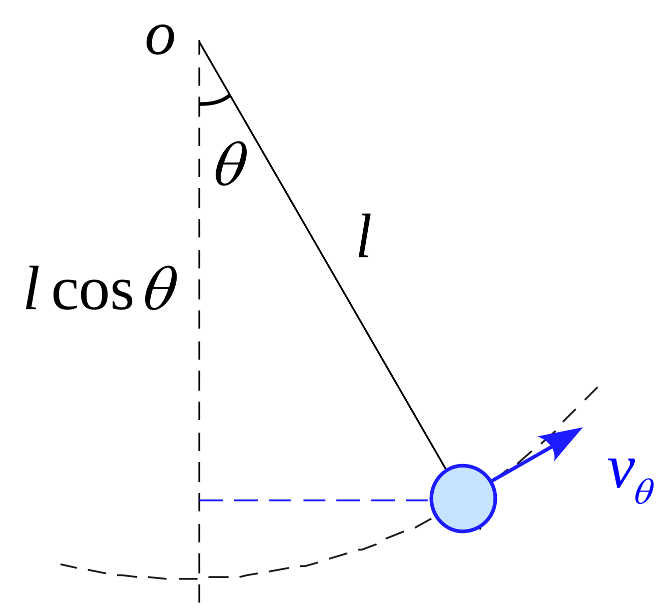
$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}mv_\theta^2}}_{\text{運動エネルギー}}+\left(\underbrace{\boxed{-mgl\cos\theta}}_{\text{位置エネルギー}}\right)\right]=0$$

ここで、この式において、最下点を基準にするため mgl を加えると

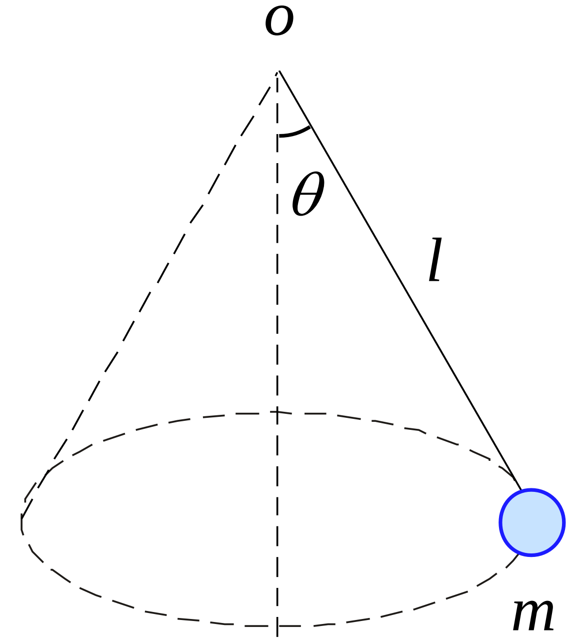
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2+mgl-mgl\cos\theta\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2+mgl\left(1-\cos\theta\right)\right]=0$$

と表される。



円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問いに答えよ。

1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

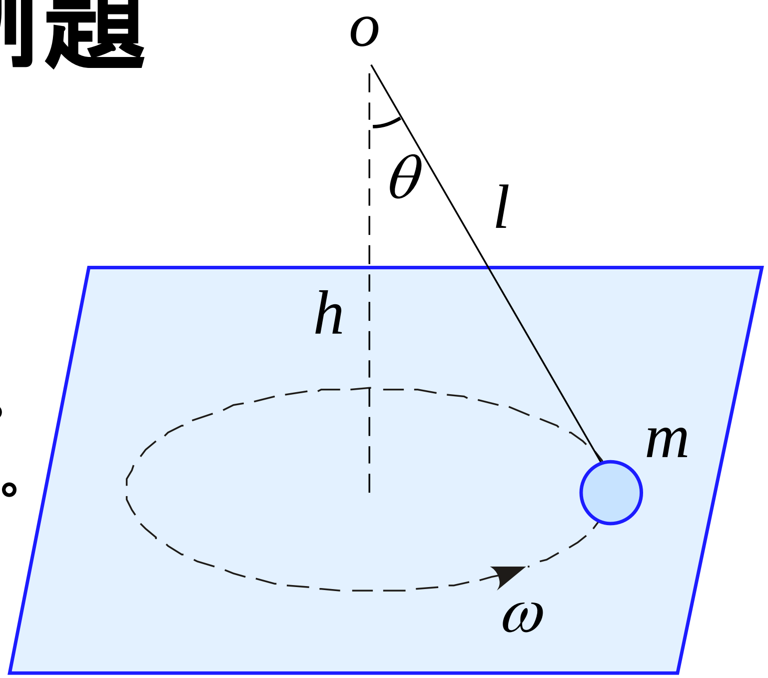
3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表すことができる。

糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体は水平面上で角速度 ω の円運動している。

糸は水平面から高さ h の地点に設置されている。

水平面は滑らかで摩擦は無視できるとする。

以下の問いに答えよ。

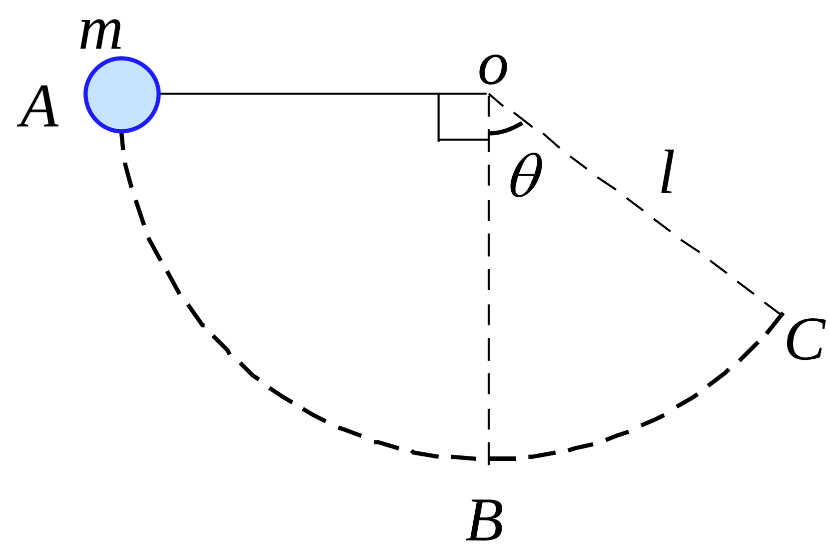
1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3.糸の張力 S 、水平面からの垂直抗力 N を求めよ。

4. 角速度 ω が ω_0 を超えると水平面から離れる。ω_0 を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

以下の問いに答えよ。

1. r **方向、** θ **方向の加速度を** a_r, a_θ **としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。**

2. 最下点 B **での糸の張力** T_B **を求めよ。**

3. 点 C **での糸の張力** T_C **を求めよ。**

円運動～例題

例題

図のような円運動のモデルを考える。

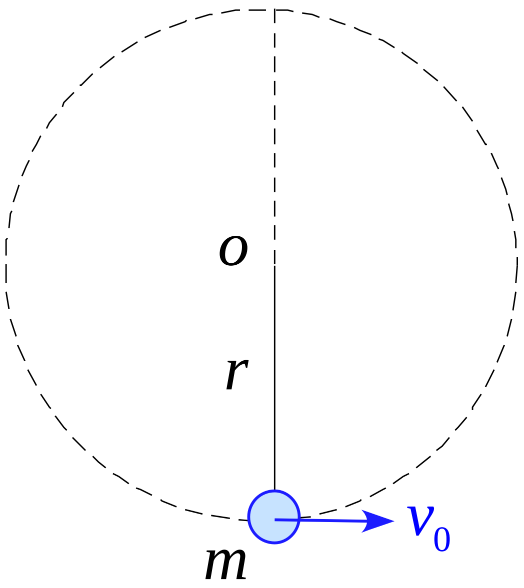
糸の長さは r 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

最下点で初速 v_0 を与えたとき

以下の問いに答えよ。



1. r **方向、** θ **方向の加速度を** a_r, a_θ **としたとき、**
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 物体が1回転するために必要な初速 v_0 **の条件を求めよ。**