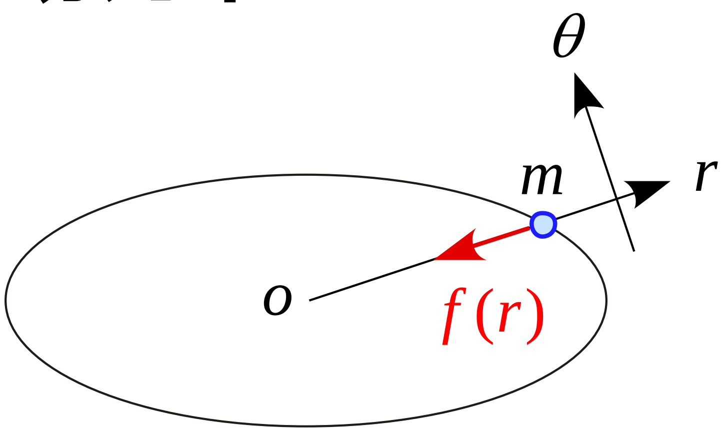
2016講義ノート
物理学基礎 (力学)
工学部・機械工学科

面積速度～運動方程式

中心力が作用するモデルを考える



運動方程式は

$$ma_r = -f(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

θ 方向の式に着目し、a_θ を代入すると

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = const.$$

となる。

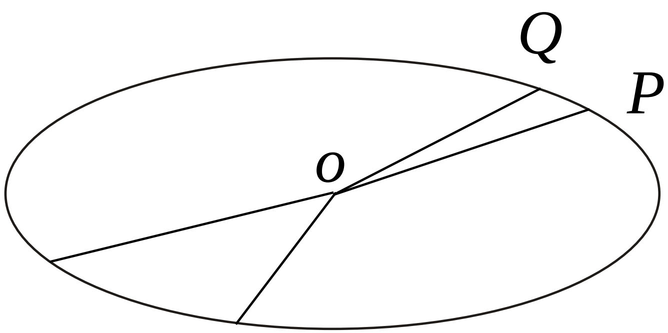
一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

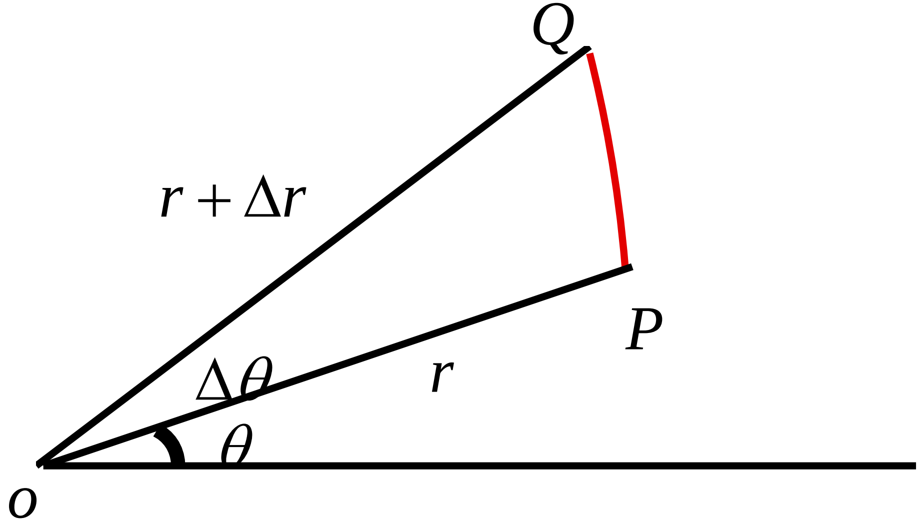
$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

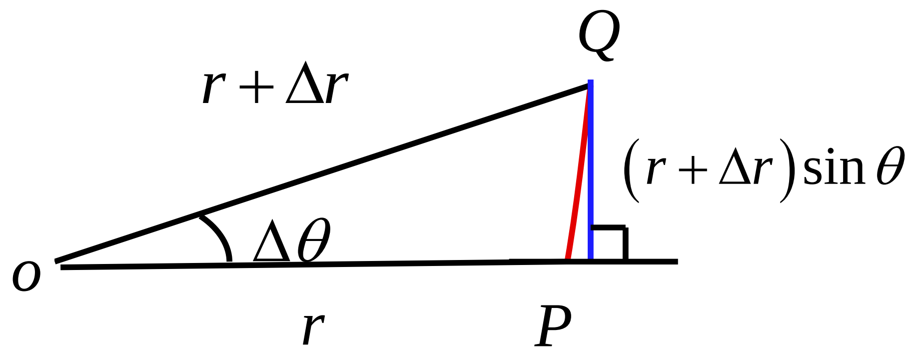
面積速度～運動方程式

面積速度：動径ベクトルが
単位時間に描く面積



面積 oPQ に着目すると





よって、面積は

$$\Delta S = \frac{1}{2} r \left(r + \Delta r \right) \sin \Delta\theta$$

とみなすことができる。

動径によって面積が描かれる速さは

Δt を無限小にした時の

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

の極限値で与えられる。

面積速度～運動方程式

この極限を考えると

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} r \cdot r\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\sin\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin\Delta\theta}{\Delta t}\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

となる。

この式と、θ 方向の運動方程式を比較すると

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = const.$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = const.$$

となる。

従って、

どんな中心力であっても

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = const.$$

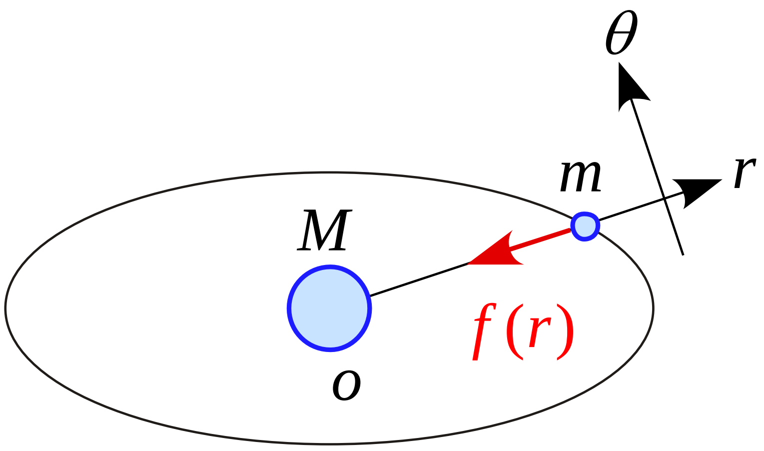
面積速度が一定である。

ケプラーの第2法則

面積速度～万有引力

太陽のまわりを回る惑星のモデルを考える

太陽の質量を M、惑星の質量を mとする。



運動方程式は

$$ma_r = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$ma_\theta = 0$$

一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

θ 方向の式に着目し、a_θ を代入すると

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \quad (const.)$$

となる。

面積速度～万有引力

面積速度を考えると

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$2m\frac{dS}{dt} = 2m\left[\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$$

と表される。
これは面積速度が一定であることを示していて、ケプラーの第2法則に相当する。

一方、r 方向の運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\right] = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L}{mr^3} = -G\frac{Mm}{r^2}$$

が得られる。
実際の惑星の軌道は楕円であるが、円からのずれが小さいことを考慮し、軌道を半径 a の円であると近似する。

面積速度～万有引力

よって、 $\frac{dr}{dt}=0$ となり

$$\frac{L^2}{ma^3}=G\frac{Mm}{a^2}$$

$$L^2=GMm^2a$$

が得られる。

公転周期 T は

$$T=\frac{\pi a^2}{\frac{dS}{dt}}=\frac{\pi a^2}{\frac{L}{2m}}=\frac{2m\pi a^2}{L}$$

と表される。

従って、

$$T=\frac{2m\pi a^2}{\sqrt{GMm^2a}}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}$$

となる。この式は

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

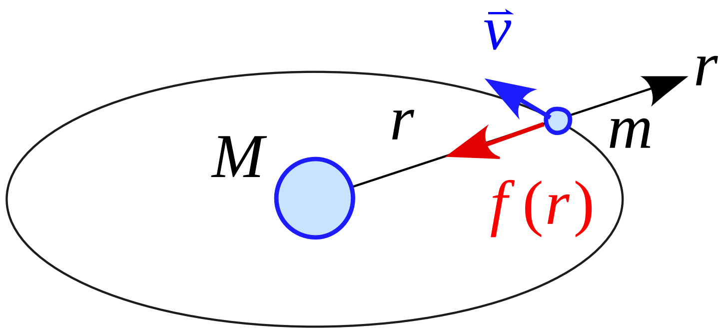
と変形でき、これは

ケプラーの第3法則
「惑星の周期の二乗は長半径の三乗に比例する」

に相当することを意味している。

万有引力～エネルギー

質量 M の天体のまわりを質量 m の人工衛星が速度 $\vec{v}$ でまわっている。天体と人工衛星の距離を r とする。



運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

と表される。

両辺に $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ の内積を取ると

$$m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -G\frac{Mm}{r^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -G\frac{Mm}{r^3}\frac{1}{2}2r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

となる。

万有引力～エネルギー

途中計算について

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}||\vec{v}|\cos 0\right)=2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(|\vec{v}|^2\right)=2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

ここで $|\vec{v}|^2=v^2$ **と書き変えると**

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

と表される。

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r})=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(|\vec{r}||\vec{r}|\cos 0\right)=2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(|\vec{r}|^2\right)=2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

ここで $|\vec{r}|^2=r^2$ **と書き変えると**

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

と表される。

万有引力～エネルギー

従って、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = const.$$

となり、エネルギー保存則が成立する。

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}mv^2}}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{\boxed{\left(-G\frac{Mm}{r}\right)}}_{\text{万有引力による位置エネルギー}} = const.$$

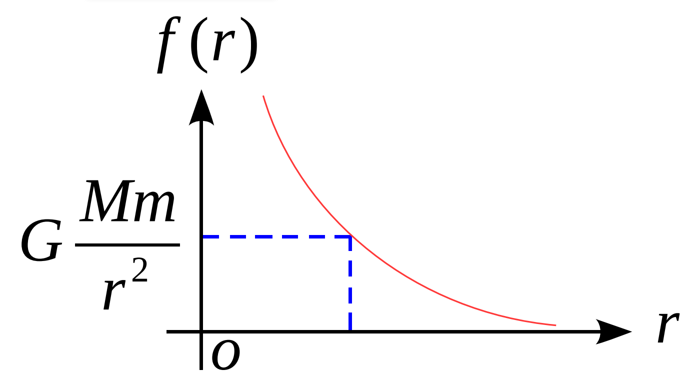
基準点について

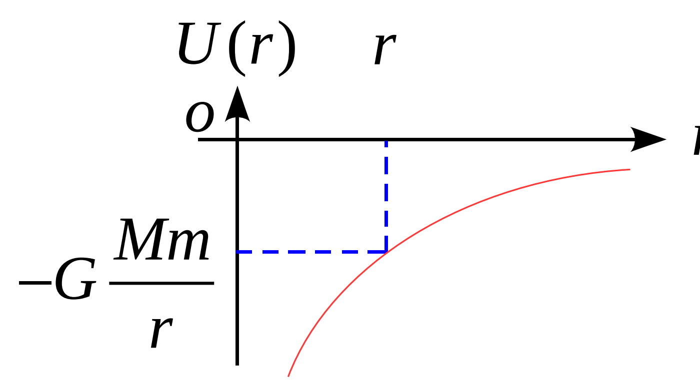
エネルギーの式について、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

となる $r = \infty$ の点を基準として扱う。

無限遠



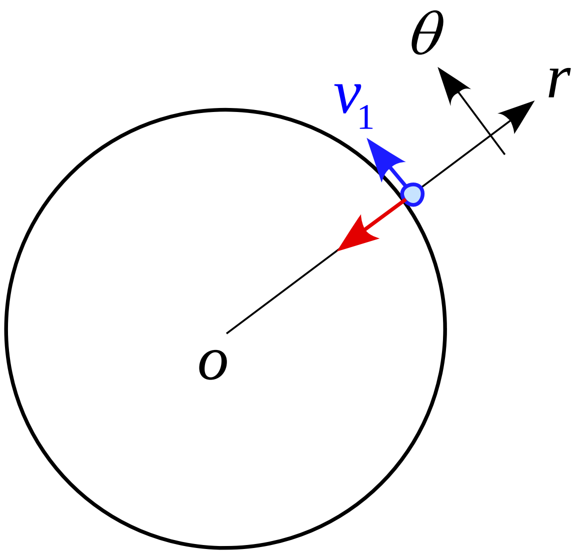


万有引力～例題

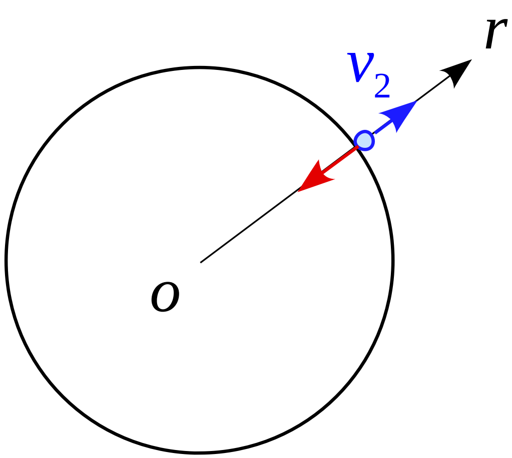
例題

地球の半径を R、地球の質量 M、万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。

地球の表面上で物体に水平方向に初速度 v_1 を与えた。するとすると物体は地表すれすれに円運動した。v_1 を求めよ。



地球の表面上で物体に上空方向に初速度 v_2 を与えた。すると物体は無限遠方に飛び去った。このような運動をする為の v_2 の条件を求めよ。但し、エネルギー保存則が成立するモデルとする。

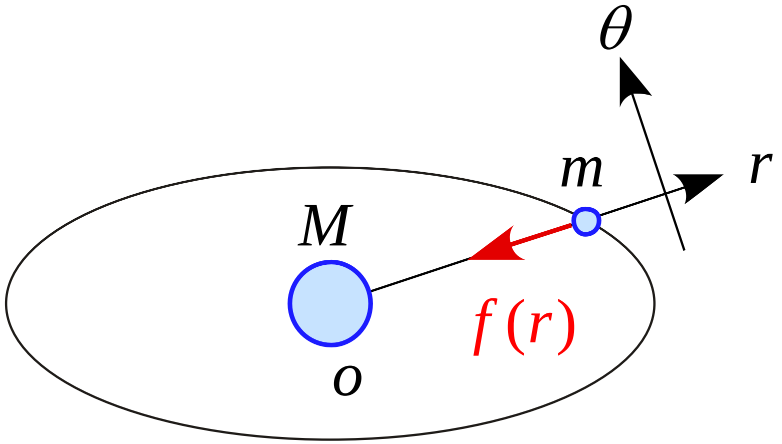


万有引力～例題

例題

極座標における運動方程式

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-G\frac{Mm}{r^2}$$

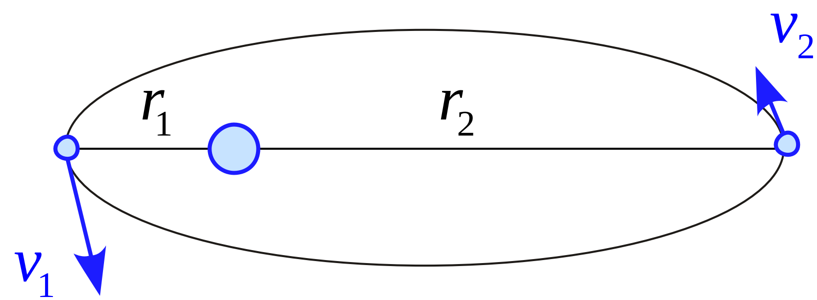


より、力学的エネルギー保存則を導け。

惑星のモデル～例題

例題

質量 m の惑星が質量 M の太陽のまわりを楕円軌道上で運動している。
近日点 r_1 での速さを v_1 遠日点 r_2 での速さを v_2 とする。
万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。



1. 角運動量から v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。

2. 面積速度を求め、v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。

3. 近日点と遠日点でのエネルギーの関係を記述せよ。