講義ノート

2016年度
物理学基礎
補充授業

2016 補充授業

まず、高校で物理を履修した人は、高校の時に覚えたであろう公式を一旦捨てる。

物理は自然現象を数式で表す

〜しかもできるだけ少ない式で表したい

高校物理の段階では
数学の準備が足らないので
本質を伴わない変な公式が多い

例えば

力学

$$ma = F$$

運動方程式

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

ニュートンが
最初に提唱した形

電磁気学

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \, dV$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \left(\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Maxwellの方程式

そもそも、君たちは勘違いをしている。

答えを覚えて、テストで書くだけはナンセンス、意味がない。

まず、何か式を書いたら

例えば

$$ma = F$$ とか

$$ma = -mg$$ とか

式を書いた時に、何でそう書けるのか？　自問自答する

・それぞれの項が何を意味しているか？
・＝ (イコール) はなぜ結べるのか？

式は自然界を表す表現の一つであるから意味がある

大切なことはその**式の意味を理解する**。

数学(微積・ベクトル)　は道具にすぎない

道具が使えなければ困るが、道具にこだわりすぎるのも良くない

物理は公式がいっぱい？

物理において、所謂「公式」と呼ばれるものは

・定義式　・・・先人達が決めた物理を理解する上で役に立つルール

・物理法則　・・・　物理学の中で提唱されている法則
観測や理論から導き出された自然界の法則

に分けられます。

例えば

定義式

$\boxed{\begin{array}{l} v = \dfrac{dx}{dt} \\ \\ a = \dfrac{dv}{dt} \end{array}}$

速度

加速度

$\mu = \dfrac{f_s}{N}$　**摩擦係数**

法則

$\boxed{ma = F}$　**運動方程式**

$f_g = mg$　**重力**

$f_i = -m\alpha$　**慣性力**

$f_r = kx$　**フックの法則**

力学

・高校の時に覚えた公式は一旦忘れる。

場合分けされた公式は
覚えると害が出る

自由落下
鉛直投げ上げ
水平投射
斜方投射
斜面を滑る
・・・などなど

新しく使える道具

速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

（定義式）

力学＝運動を表す

力が作用

$$ma = F$$

（運動方程式）

(ニュートンが見つけた法則)

次元解析

[L]と[M]と[T]
長さ　質量　時間

を使って、それぞれの物理量を表すこと

・その物理量の構成がわかる
・その物理量の単位がわかる

運動方程式は万能だ！

$$ma = F$$

質量と加速度をかけたものが
その物体に作用する力の合計である

$$ma = F \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺に速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}(Fx)$$

運動エネルギー

仕事

次元解析

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML]}{[T^2]}$$

質量 加速度 力

この式変形は、「知っている」で
使って良いが、間違っていないか
確認をすること

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = \frac{1}{2}m\cdot 2v\cdot v'$$

$$= m\cdot v\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

ニュートンが最初に提唱した形

運動量

次元解析

$$\underbrace{[M]}_{\text{質量}}\underbrace{\frac{[L]}{[T]}}_{\text{速度}} = \underbrace{\frac{[ML]}{[T]}}_{\text{運動量}}$$

式の意味

運動量の時間変化 ＝ 作用する力

- 運動量が変化すれば、力が作用したはずである。
- 力が作用すれば、運動量が変化する。

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = Fdt$$

力積

次元解析

$$\underbrace{\left[\frac{ML}{T^2}\right]}_{\text{力}}\underbrace{[T]}_{\text{時間}} = \underbrace{\frac{[ML]}{[T]}}_{\text{力積}}$$

1. (期末)

運動方程式 $\boxed{ma = F}$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺を x で積分する

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int F dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int F dx$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$dx = vdt$$

$$\int\left(m\frac{dv}{dt}v\right)dt = \int F dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2}\right)dt = \int F dx$$

運動エネルギー

(　) の中に mを入れる

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = Fdt$$

運動量

1. (期末)

運動方程式 $\boxed{m\vec{a}=\vec{F}}$ $\quad m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$

ベクトル表記

両辺に左側から $\vec{r}$ の外積をする

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

この式変形ができる理由

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$=\underline{\vec{v}\times m\vec{v}}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

同じベクトルの外積はゼロ

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{r}\times\vec{p}}_{\vec{L}})=\underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\vec{N}}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

$\vec{L}$: 角運動量

$\vec{N}$: 力のモーメント

力学のモデルの考え方

運動方程式を立てる

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

速度、変位を求める

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

加速度

t で積分

$v = \bigcirc$

速度

t で積分

$x = \bigcirc$

変位

積分定数は初期条件が決める

求めた速度、変位を使って
問題で問われている量を計算する

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad W = Fx$$

$$U = mgx$$

など

運動方程式を立てる手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

・問題文で指定されている場合はそれを利用する
・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
・一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

x で積分

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

t で積分

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\text{角運動量}}) = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\text{モーメント}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける ⇒

$$m\frac{dv}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad v = \bigcirc \quad \Rightarrow \quad x = \bigcirc$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

t で積分　　t で積分

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

解くことが困難 ⇓

どの物理量の関係が必要か検討する

t で積分

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = \vec{r}\times\vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

x で積分

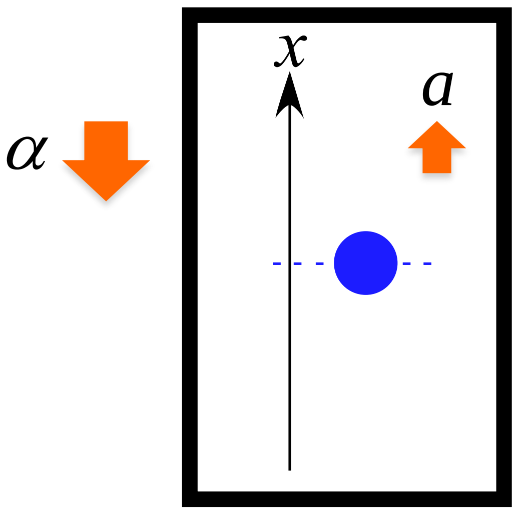
仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}\,dt$$

2. (1) エレベータ内



何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = \boxed{}$$

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ 無し

・慣性力・・・ $m\alpha$

慣性力は**進行方向と逆向き**に

(エレベータ)

運動する物体の質量 × 動いている座標の加速度

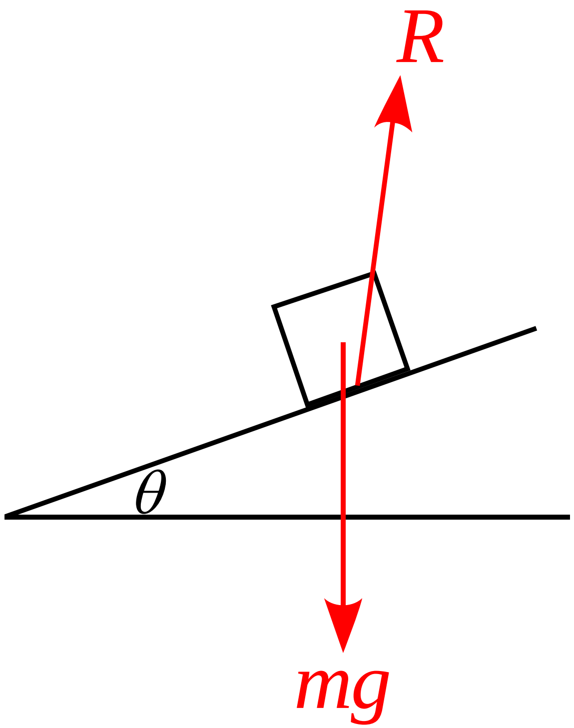
m α

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (上向き正)

注）向き、正負が重要！

斜面を滑る物体の作図について



物体に作用する力は

重力： mg

接触面から受ける抗力　： R

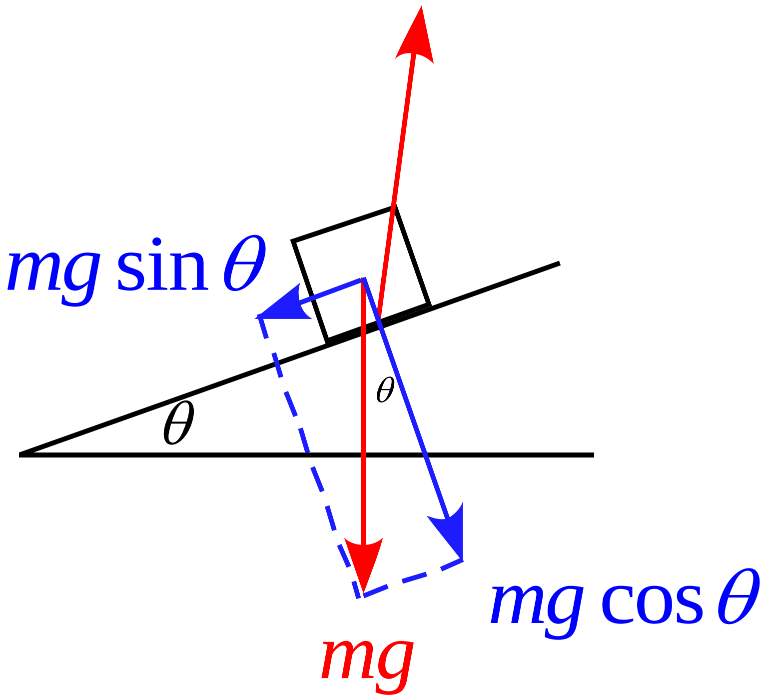
の2つとなります。

このままの状態では考え難いので、

斜面に水平な方向
斜面に垂直な方向

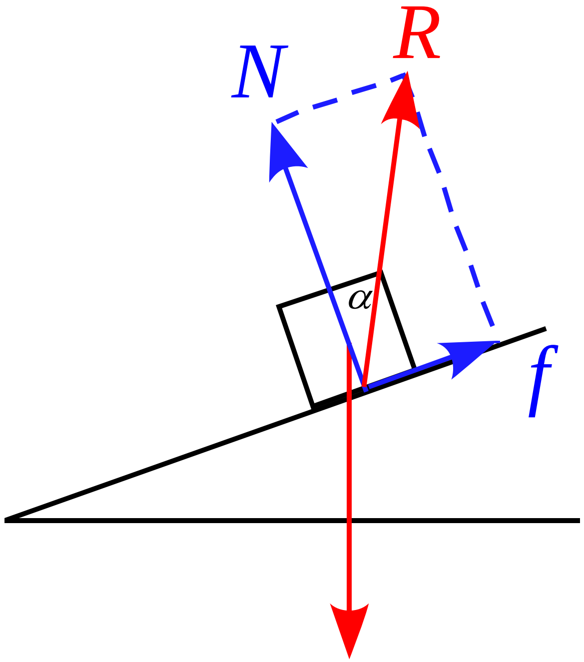
の2つの軸を取ります

重力 mg を軸に沿って分解すると



斜面の角度 θ から
mg を分解します

抗力 Rを軸に沿って分解すると

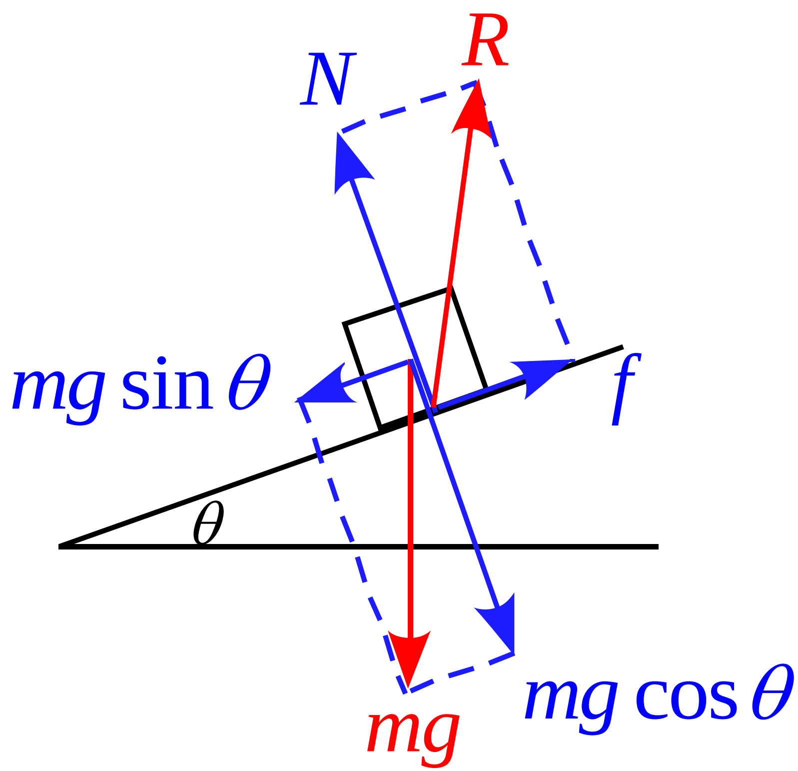


接触面から受ける抗力は

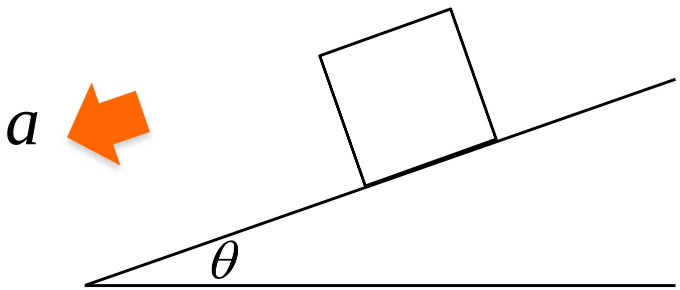
面に垂直な成分: N

面に平行な成分: f

の2つとなります。



2. (2) , 8. 斜面を滑り降りる物体



何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

軸ごとに運動方程式を立てる

$$ma_x = \boxed{}$$

$$ma_y = \boxed{}$$

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

2. 軸の設定を確認する

運動の方向に合わせたほうが都合が良い

斜面に平行に
斜面に垂直に

軸と違う方向を向いている力は
分解して軸にそろえる

3. 初期条件を書き出す

注）向き、正負が重要！

次にそれぞれの条件を適用する

$$f = \mu_k N \quad \Rightarrow \quad ma_x = \boxed{\qquad\qquad}$$

斜面から飛び出ない $\Rightarrow$ $a_y = 0$

$$m \cdot 0 = \boxed{\qquad\qquad}$$

$$N = mg\cos\theta$$

$$ma_x = \boxed{\qquad\qquad}$$

問題文で使用されている文字に合わせると

$$ma = \boxed{\qquad\qquad}$$

となる

等加速度運動を示す ⇒ $a = \bigcirc$ ← これが時間に依らないことを示せばよい

$a = \boxed{}$

g, μ_k, θ は定数なので a は時間に依らず一定である。

従って、この運動は等加速度運動である。

摩擦力がした仕事

運動方程式を見ると

$$ma = mg\sin\theta - \underbrace{\mu_k mg\cos\theta}_{\text{摩擦力}}$$

両辺を x で積分すると

仕事とエネルギーの関係

が導かれる。

従って、

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int (mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int (mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int (mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta)dx$$

ここで、$t = 0, x = 0, v = v_0$ から $t = t_1, x = L, v = v$ まで動いたとすると

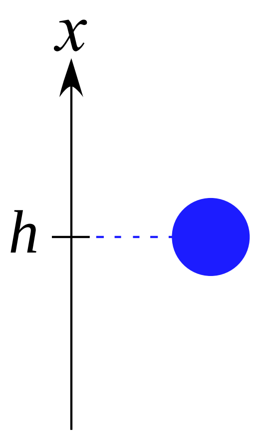
$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = (mg\sin\theta \underbrace{- \mu_k mg\cos\theta)L}_{\text{摩擦力による仕事}}$$

従って、摩擦力がした仕事は

$$W_{摩} = \boxed{}$$

となる。

6. 自由落下



・作図は丁寧に！

問題で軸の設定はどうなっているか？

問題で設定されていなければ、
自分の都合が良いように設定する

この問題では、上向きが正に
軸が設定されている

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = \boxed{}$$

注）向き、正負が重要！

この運動方程式 x で積分し、エネルギー保存則を導く

$$ma = -mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int(-mg)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int(-mg)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int(-mg)dx$$

$$\frac{1}{2}mv^2 = \boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = C$$

となり、運動エネルギーと
位置エネルギーの和が一定の値に
なることがわかる。
ここで、初期条件を考えると

$$x(0) = h, v(0) = 0$$

であるから

$$E(0) = \frac{1}{2}mv(0)^2 + mgx(0) = C$$

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mgh = C$$

$$mgh = C$$

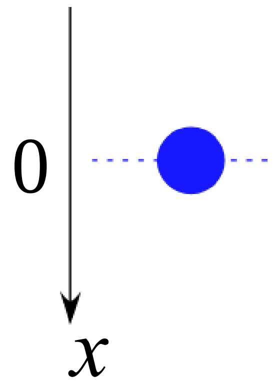
従って

$$E(t) = \frac{1}{2}mv(t)^2 + mgx(t) = \boxed{\qquad}$$

となる。

7. 雨滴の落下

・作図は丁寧に！



1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ kv（空気抵抗力）

・慣性力・・・無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている（下向き正）

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = \boxed{}$$

注）向き、正負が重要！

この式から $v(t), x(t)$ を求めることになる

式変形すると

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

(この微分方程式の解き方は数学の授業で)

この微分方程式を解くと

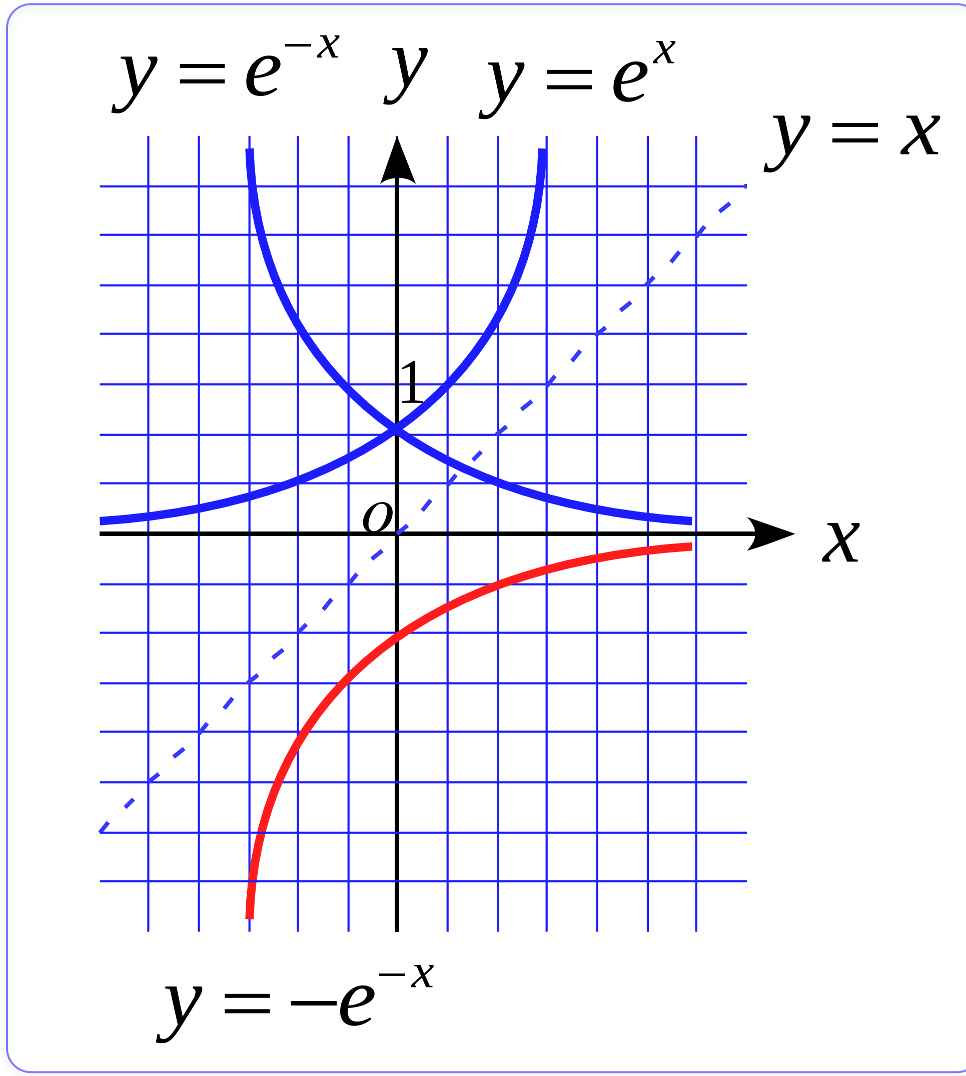
$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

この式を見てみると

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

ざっくりみると $\boxed{}$ のグラフ

であることがわかる



$t=0$ のとき

$$v(0)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}\right)=\boxed{\qquad\qquad}=\boxed{\qquad\quad}$$

$t=\infty$ のとき

$$v(\infty)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot \infty}\right)=\boxed{\qquad\qquad}=\boxed{\qquad}$$

グラフを書く時のpoint

- 始点　$t=0$
- 終点　$t=\infty$
- 概形
- 特殊な点

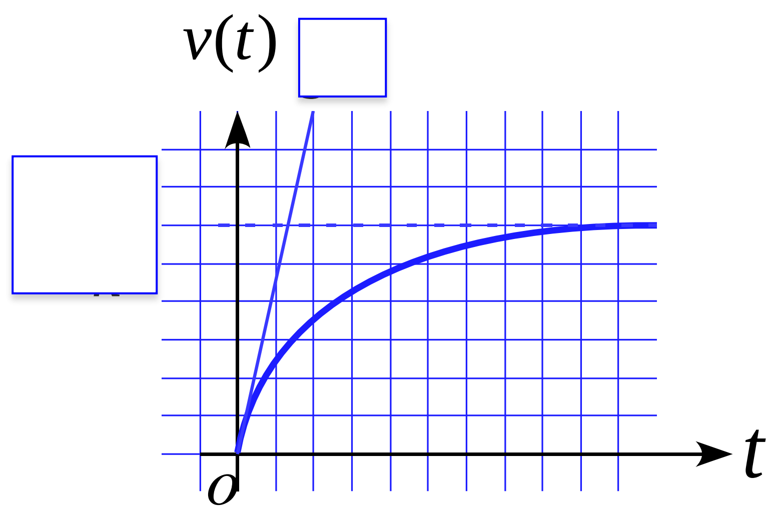
$t=0$ のときの傾きは

$$\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

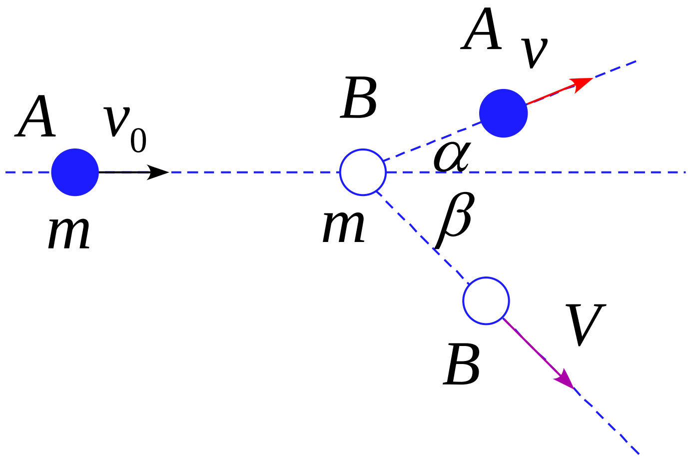
$$=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{d}{dt}v(0)=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}=\boxed{\qquad\qquad\qquad}$$

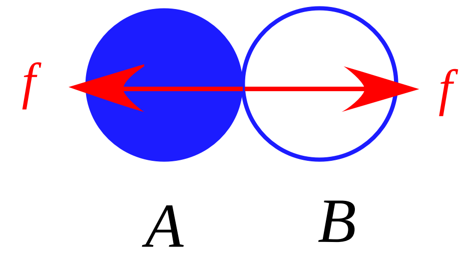
$$=\boxed{\qquad\qquad}$$



9. 斜衝突



衝突した瞬間



何はともあれ、運動方程式

衝突した瞬間の運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}_A}{dt} = -\vec{f}$$

$$m\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{f}$$

である

2式の和を取ると

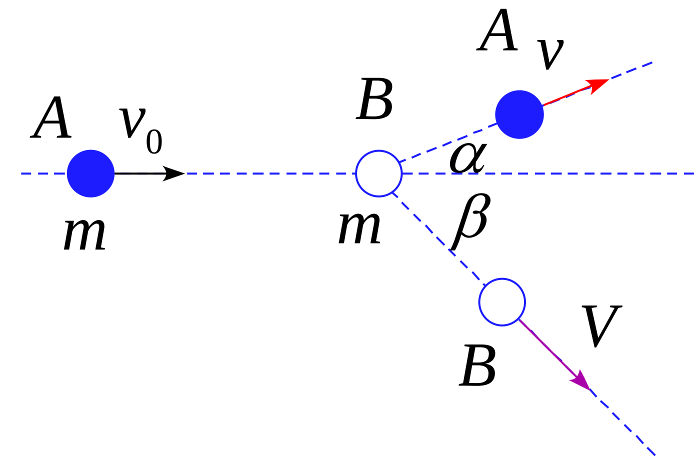
$$m\frac{d\vec{v}_A}{dt} + m\frac{d\vec{v}_B}{dt} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_A + m\vec{v}_B\right) = \vec{0}$$

となり、衝突の前後で運動量の和は変化しないことが判る

衝突前の速度を$\vec{v}_A, \vec{v}_B$ 衝突後の速度を$\vec{v}\,'_A, \vec{v}\,'_B$ と表すと

$$m\vec{v}_A + m\vec{v}_B = m\vec{v}\,'_A + m\vec{v}\,'_B$$



問題に合わせると

$$\square = \square$$

$$\vec{v}_0 = \square$$

と表せる

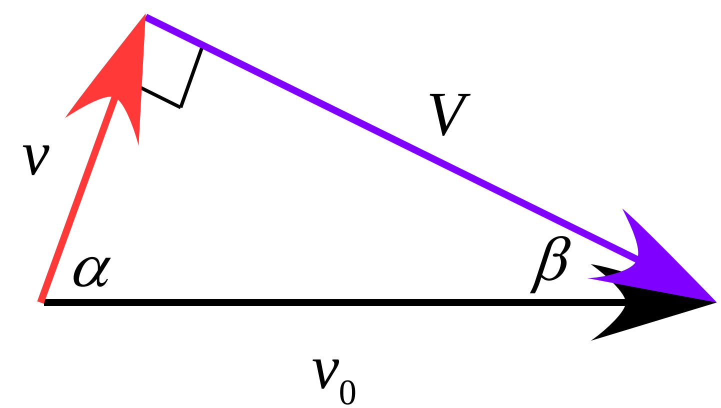
この衝突は弾性衝突であるので
エネルギー保存も成立する

$$\square = \square$$

$$v_0^2 = \square$$

である

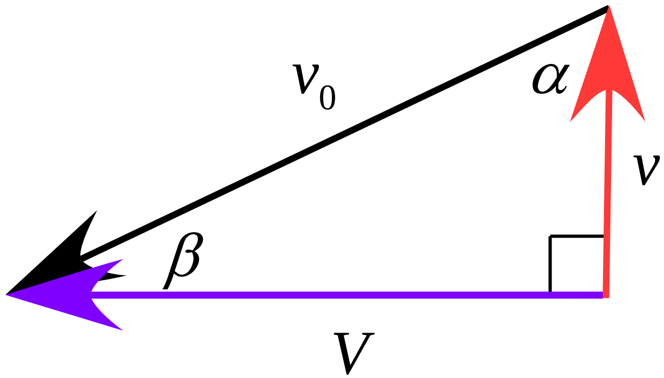
この2つの条件を満たすように図示すると

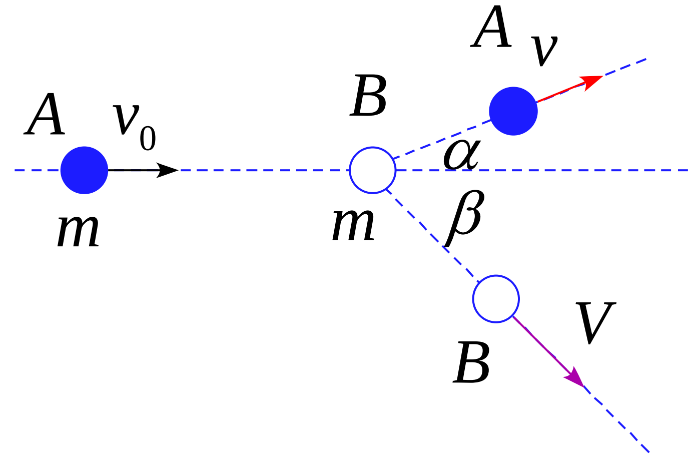


従って、なす角の和は

$$\alpha + \beta = \square$$

衝突後の速度の比は図より





$v = \boxed{}$

$V = \boxed{}$

$\dfrac{v}{V} = \boxed{} = \boxed{}$

となる

3. , 10. 力のモーメント

回転の運動方程式

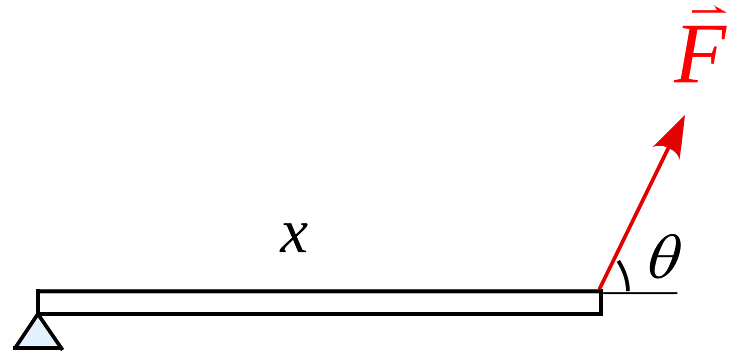
$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\vec{r}\times m\vec{v}}_{\vec{L}}\right)=\underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\vec{N}}$$

力のモーメントは

$$\boxed{\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

で求めることができる

(1)



$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}=\begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ベクトルの外積

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_yF_z-r_zF_y \\ r_zF_x-r_xF_z \\ r_xF_y-r_yF_x \end{pmatrix}$$

2つのベクトルの外積は

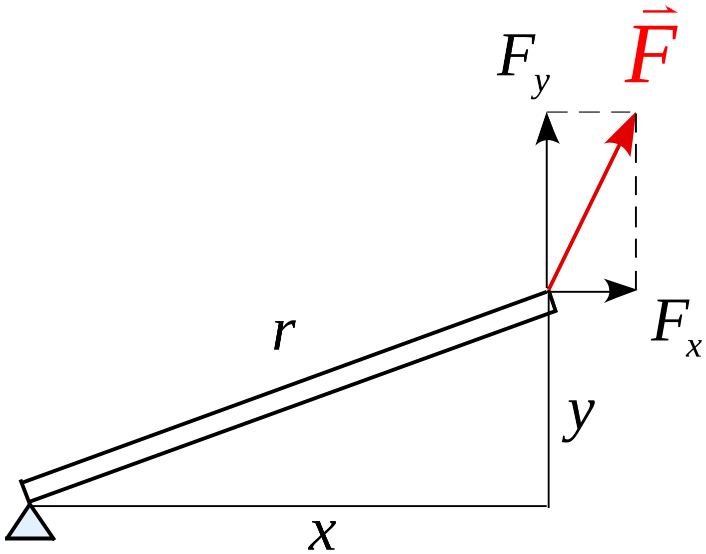
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{} \end{pmatrix}$$

このベクトルの大きさは

$$|\vec{N}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\boxed{}\right)^2}$$

$$= \boxed{}$$

(2)



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

2つのベクトルの外積は

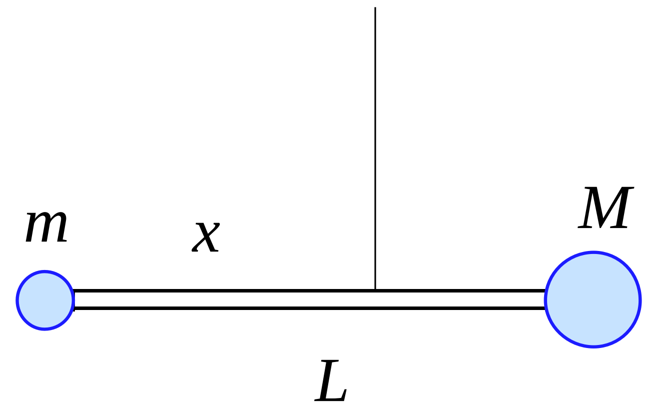
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\boxed{\qquad\qquad} \right) = \left(\boxed{\qquad\qquad} \right)$$

このベクトルの大きさは

$$|\vec{N}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(\boxed{\qquad\qquad} \right)^2}$$

$$= \boxed{\qquad\qquad}$$

棒が回転しない条件



回転の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\vec{r}\times m\vec{v}}_{\vec{L}}\right)=\underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\vec{N}}$$

力のモーメントと角運動量の関係を導く

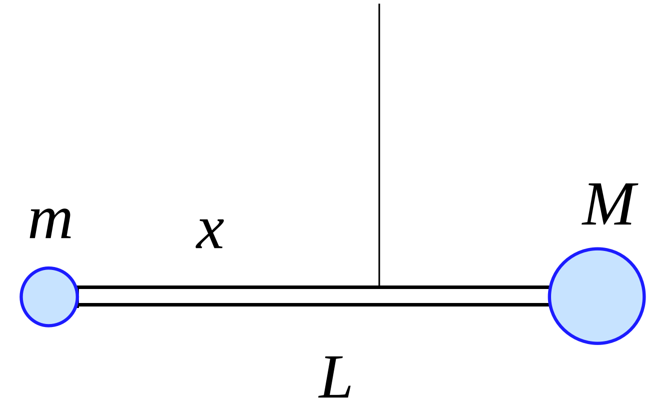
左側の物体について

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-x\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\vec{F}=\begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_1=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{pmatrix}-x\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\qquad\qquad}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boxed{\quad}\end{pmatrix}$$

右側の物体について

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{N}_2 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\qquad} \end{pmatrix}$$

従って、回転の運動方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\qquad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\qquad} \end{pmatrix}$$

成分で表示すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dL_x}{dt} \\ \dfrac{dL_y}{dt} \\ \dfrac{dL_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix}$$

角運動量の時間変化が $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ であれば棒は回転しない

即ち、

$$\frac{dL_z}{dt} = \boxed{\qquad\qquad} = 0$$

であればよい

従って、

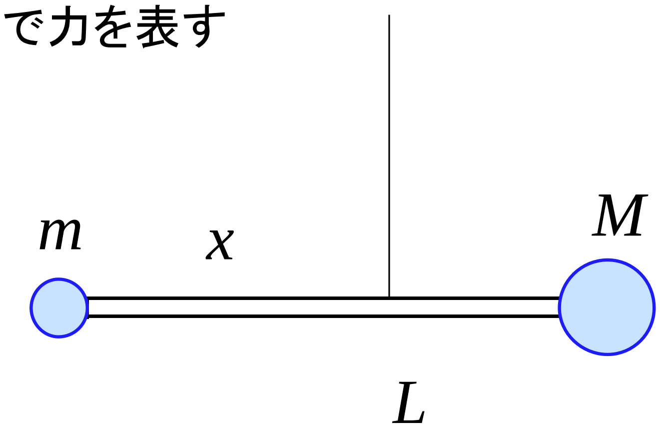
$$\frac{dL_z}{dt} = \boxed{\qquad\qquad\qquad} = 0$$

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad} = 0$$

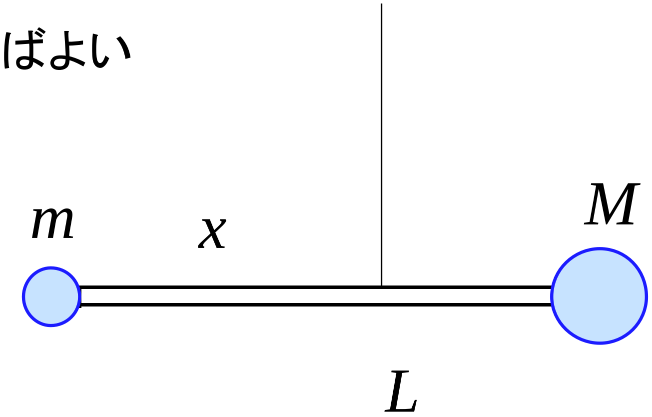
$$\left(\boxed{\qquad}\right) x = \boxed{\qquad}$$

$$x = \boxed{\qquad}$$

棒の質量を考える ⇨ 棒の重心で力を表す



全問に棒の重心に作用する力のモーメントを追加すればよい



棒のについて

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -\left(x - \dfrac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_3 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -\left(x - \dfrac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

従って、回転の運動方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\quad} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\qquad\qquad} \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{dL_x}{dt} \\ \dfrac{dL_y}{dt} \\ \dfrac{dL_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad} \end{pmatrix}$$

となる

角運動量の時間変化が $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ であれば棒は回転しない

即ち、

$$\frac{dL_z}{dt}=\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}=0$$

であればよい

計算をすると

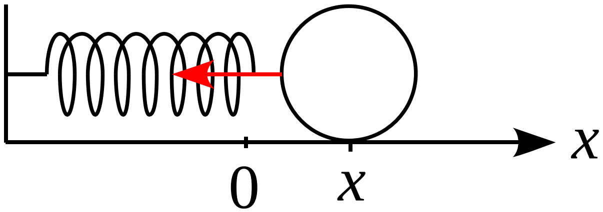
$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}=0$$

$$(\boxed{\qquad})x=\boxed{\qquad\qquad}$$

$$x=\boxed{\qquad\qquad}$$

となる

4. , 5. 単振動



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right)\ ,\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

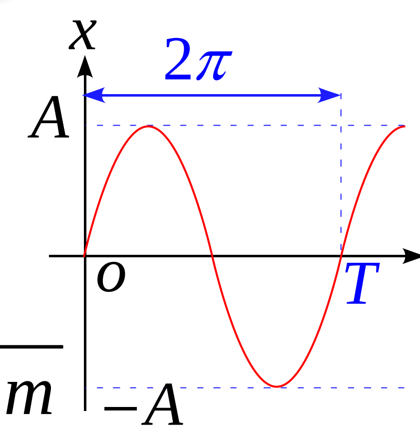
ωについて

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos\left(\omega t + \delta\right)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}A\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

周期 T について



$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

初期条件から単振動の式を計算する

(1) $x(0)=0, v(0)=v_0$

(2) $x(0)=x_0, v(0)=v_0$

単振動の一般解の式に初期条件を代入し

A,ϕ or α,β

を求める

(1) $x(0)=A\sin\left(\omega\cdot 0+\phi\right)=0$

$$\boxed{\quad\quad}=0$$

$$\boxed{\quad\quad}=0$$

$$v(0)=A\omega\cos\left(\omega\cdot 0+0\right)=v_0$$

$$\boxed{\quad\quad}=v_0$$

$$A=\boxed{\quad}$$

単振動の一般解

$$x(t)=A\sin\left(\omega t+\phi\right)$$
$$=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t$$

$$v(t)=\omega A\cos\left(\omega t+\phi\right)$$
$$=\omega\alpha\cos\omega t-\omega\beta\sin\omega t$$

$$x(t)=\boxed{\quad\quad\quad}$$

(2) $x(0)=x_0, v(0)=v_0$

$$x(0)=\alpha\sin\omega\cdot 0+\beta\cos\omega\cdot 0=x_0$$

$$\boxed{}=x_0$$

$$v(0)=\omega\alpha\cos\omega\cdot 0-\omega\beta\sin\omega\cdot 0=v_0$$

$$\boxed{}=v_0$$

$$\alpha=\boxed{}$$

従って

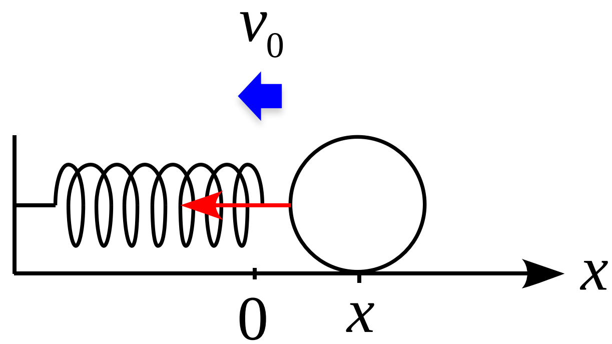
$$x(t)=\boxed{}$$

単振動の一般解

$$x(t)=A\sin\left(\omega t+\phi\right)$$
$$=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t$$

$$v(t)=\omega A\cos\left(\omega t+\phi\right)$$
$$=\omega\alpha\cos\omega t-\omega\beta\sin\omega t$$

単振動



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

微分方程式を解くと

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right) \ ,\omega^2 = \frac{k}{m}$$

このモデルの初期条件は

この条件を単振動の一般解に代入し、

A, ϕ を求める

$$x(0) = A\sin\left(\omega\cdot 0 + \delta\right) = 0$$

$$\qquad = 0$$

$$\qquad = 0$$

$$v(0) = \omega A\cos\left(\omega\cdot 0 + \delta\right) = -v_0$$

$$A = \qquad$$

従って

$$x(t) = \qquad$$

となる

問題で指定されている文字を用いると

$$x(t) = \square \sin \omega t = \square$$

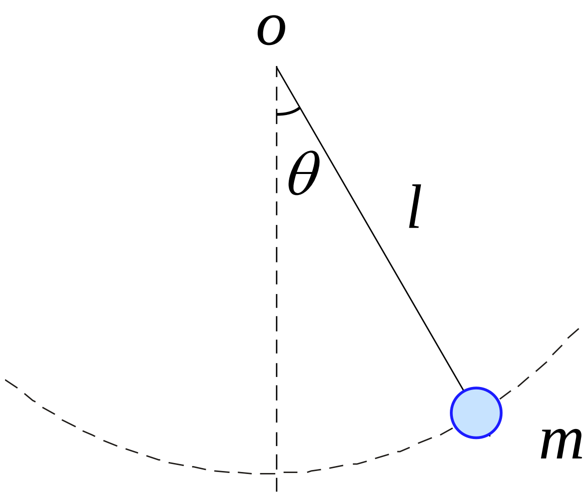
$$v(t) = \square \cos \omega t = \square$$

$$a(t) = \square \sin \omega t = \square$$

となる

2. (3) , 11. 12. 13. 単振り子～円運動

・作図は丁寧に！



1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ S (糸の張力)

・慣性力・・・ 無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (極座標)

何はともあれ、運動方程式

$$ma_r = \boxed{}$$

$$ma_\theta = \boxed{}$$

a_r , a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = \boxed{}$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = \boxed{}$$

運動方程式の θ 方向の式に着目

一般的な極座標表示 (速度)

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = \boxed{}$$

糸の長さは $r = l$ **(一定) なので** $\frac{dr}{dt} = 0$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = \boxed{}$$

さらに、極座標表示において θ 方向の速度は一般的に $\boxed{v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}}$ **であるから**

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \boxed{}$$

と表される。

ここで両辺に $v_\theta = l\dfrac{d\theta}{dt}$ をかけると

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}v_\theta = -mg\sin\theta\, l\frac{d\theta}{dt}$$

代入

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

$$ml\frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}v_\theta = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$mv_\theta\frac{dv_\theta}{dt} = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{}\right) = \frac{d}{dt}\left(\boxed{}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{}\right) = 0$$

となる。

従って、この運動においてエネルギーが保存することがわかる。

$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}mv_\theta^2}_{\text{運動エネルギー}}+\underbrace{\left(-mgl\cos\theta\right)}_{\text{位置エネルギー}}\right]=0$$

ここで、この式において、最下点を基準にするため $\boxed{}$ を加えると

$$\frac{d}{dt}\left[\boxed{}\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\boxed{}\right]=0$$

と表される。