

エネルギー

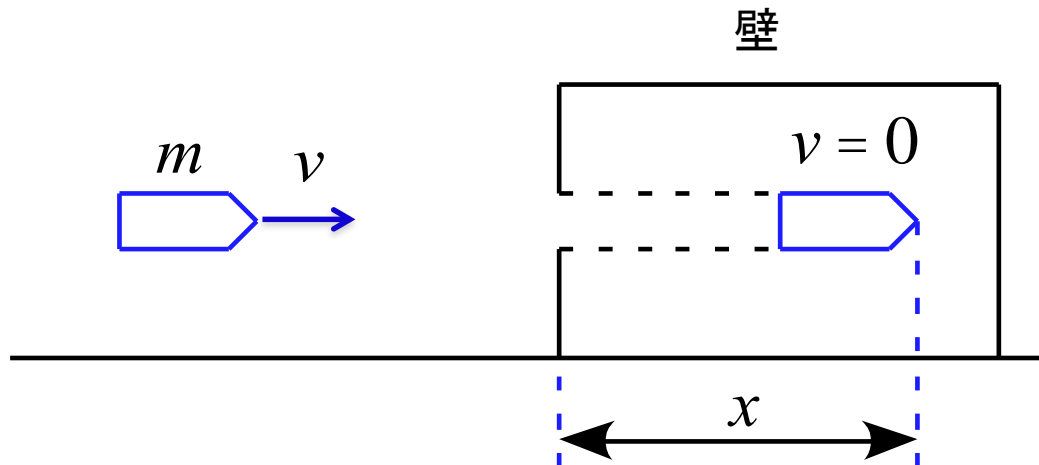
ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという



仕事をする能力＝エネルギー

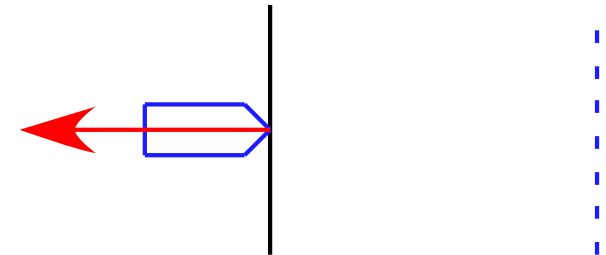
例

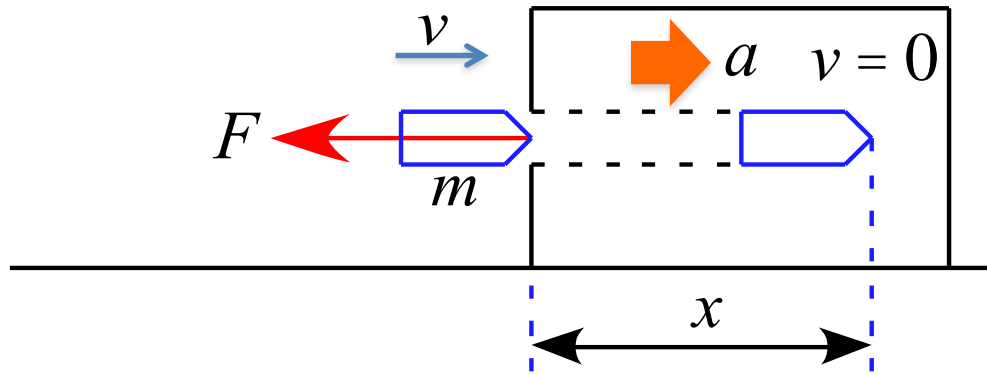
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





水平方向の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -F$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (-F) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (-F) dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int (-F) dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_0^x -F dx$$

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_v^0 = \left[-F x \right]_0^x$$

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m v^2 = -F x + F \cdot 0$$

エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot v^2 = -Fx$$

最後の運動能力

最初の運動能力

弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [J = \text{kg m}^2 / \text{s}^2]$$

次元

$$[M] \left(\frac{[L]}{[T]} \right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

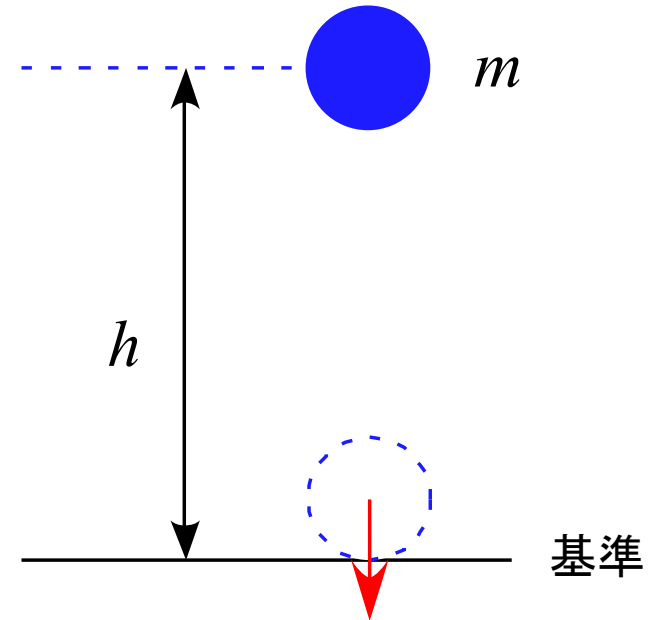
エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた
下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

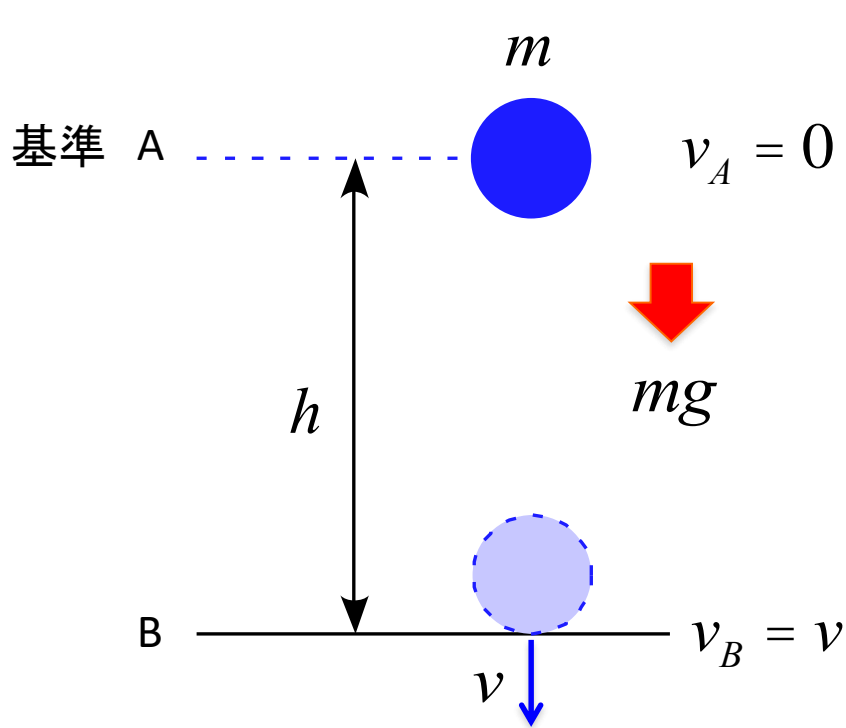
$$U = mgh \quad [\text{J} = \text{kg m}^2 / \text{s}^2]$$

基準からの高さに比例

次元

$$[M] \frac{[L]}{[T^2]} [L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

運動エネルギーと位置エネルギー



外力の仕事

重力 mg が物体を
 h だけ引きずりおろした

仕事をした

B点で運動エネルギーを
持つことができた

これを式で表すと

$$mg \cdot h = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

外力の仕事

運動エネルギーの変化

$$= \frac{1}{2}mv^2$$

運動エネルギーの変化は外力の仕事による

エネルギー保存則

この式は、高さ h の位置エネルギーが運動エネルギーに変換されたとも考えられる

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

位置エネルギー

運動エネルギー

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

(重力場の運動)

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$m \mathbf{v} \frac{dv}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F \frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1$$

$$x(t_1) = 0$$

$$v(t_2) = v_2$$

$$x(t_2) = x$$



と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_0^x F dx$$

エネルギーの変化量

$x = 0$ から x まで

物体に働く力 F がした仕事


運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$ をかける  単位時間あたりの変位をかけた

$$m \mathbf{v} \frac{dv}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する  最初から最後まで時間に対して和を取る

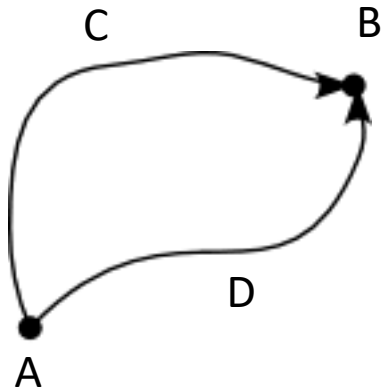
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路



点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える
 ここでの運動が保存力による運動とすると

点A - C - 点Bの経路を通り、
 そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A - D - 点Bの経路を通り、同じ道を通って
 点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える

鉛直投げ上げ運動

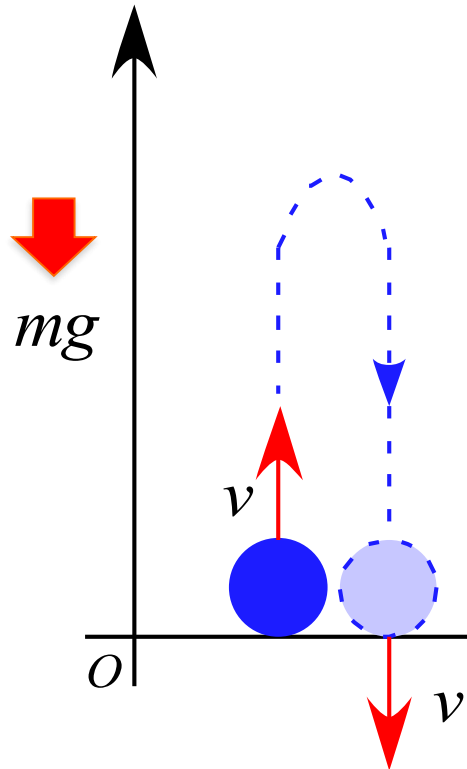
この運動における仕事は

$$W = \int_0^0 F dx = \int_0^0 (-mg) dx = 0$$

元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる



保存力



エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動

運動方程式は

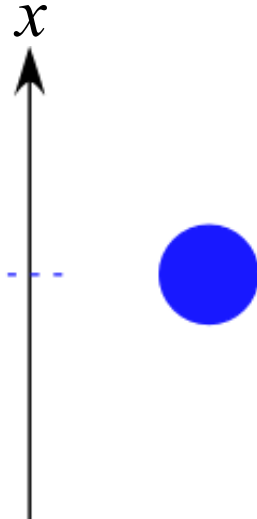
$$m \frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$m v \frac{dv}{dt} = -mg \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} (-mgx)$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + mgx \right) = 0$$

となる
よって、 $\frac{1}{2} m v^2 + mgx$ は時間に対して
変化しない一定量

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgx = \text{一定}$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が
一定であるからエネルギー保存則が
成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

バネの単振動

運動方程式は

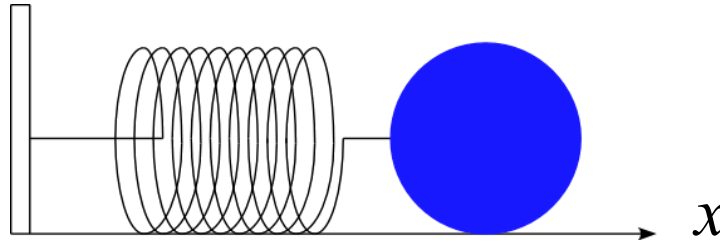
$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$m v \frac{dv}{dt} = -kx \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} k x^2 \right)$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 \right) = 0$$

となる

よって、 $\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$ は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = \text{一定}$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

力学基礎演習

4.7 仕事とエネルギー

問題27 43ページ

追加設問

物体の運動方程式を書け。

4.7.1 動摩擦力

問題28 44ページ

追加設問

物体の運動方程式を書け。

力学基礎演習

4.7.3 ポテンシャルエネルギー

問題30 46ページ

追加設問

物体の運動方程式を書け。

問題31 46ページ

問題32 47ページ

問題34 48ページ

運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $ma = F$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

運動量～定義

質量 m の質点が力 \vec{F} を受けて運動している

運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

加速度の定義から

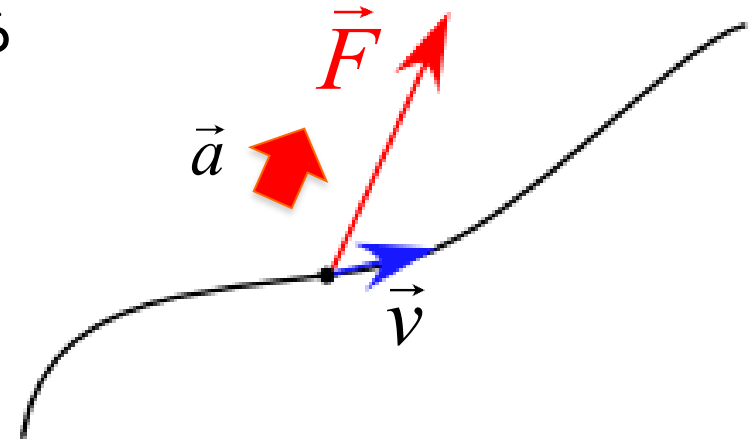
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

であるから、

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} \left(m\vec{v} \right) = \vec{F}$$

運動量



ここで、 $\vec{p} = m\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となる。

運動量～力積

運動量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量 = 質量 × 速度

次元

$$[M] \frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

単位時間あたりの
運動量の変化

この式を書き換えると

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

運動量の
微小変化

力積

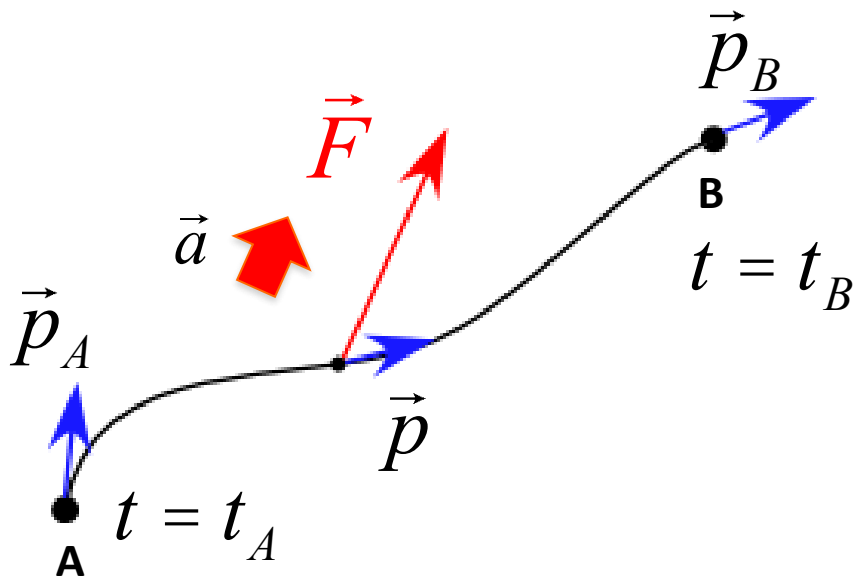
力 \vec{F} が微小時間
 dt だけ働いた

次元

力積

$$\vec{I} = \vec{F}dt \quad \left[\frac{ML}{T^2} \right] [T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

運動開始と運動終了を図のように
設定する



$$d\vec{p} = \vec{F} dt$$

積分すると

$$\int_{p_A}^{p_B} d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt$$

$$\vec{p}_A - \vec{p}_B = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt$$

運動量の変化

受けた力積の総和

運動量～エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか?)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか?)

運動量の変化は力積による

運動量～保存則

物体が衝突した前後について
考えてみよう

運動方程式はA, Bそれぞれ

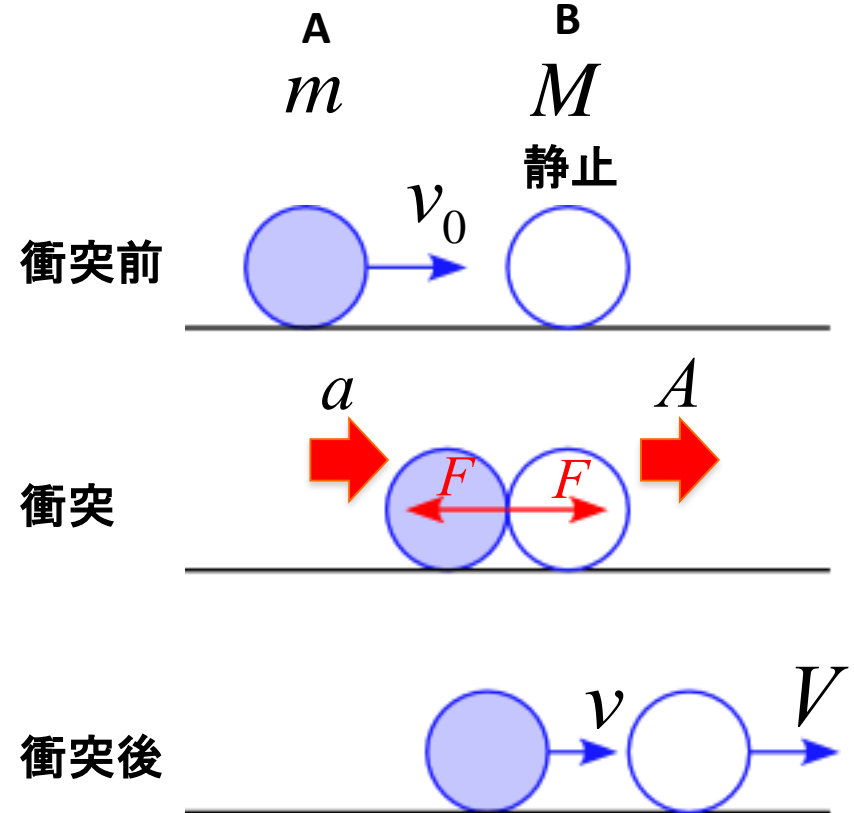
$$A: ma = -F$$

$$B: MA = F$$

従って、

$$m \frac{dv}{dt} = -F$$

$$M \frac{dV}{dt} = F$$



運動量～保存則

この2式の和をとると

$$m \frac{dv}{dt} + M \frac{dV}{dt} = -F + F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) + \frac{d}{dt}(MV) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mv + MV) = 0$$

となる

従って、

この衝突において運動量の和は
時間的に変化していない。

運動量が保存している

即ち、この例のモデルでは

$$mv + MV = mv_0 + M \cdot 0$$

衝突後の運動量

衝突前の運動量

が成立する。

運動量保存則

運動量保存則

外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない

$$\frac{d}{dt}(mv + MV) = 0$$

$$mv + MV = mv_0 + MV_0$$

衝突後の全運動量

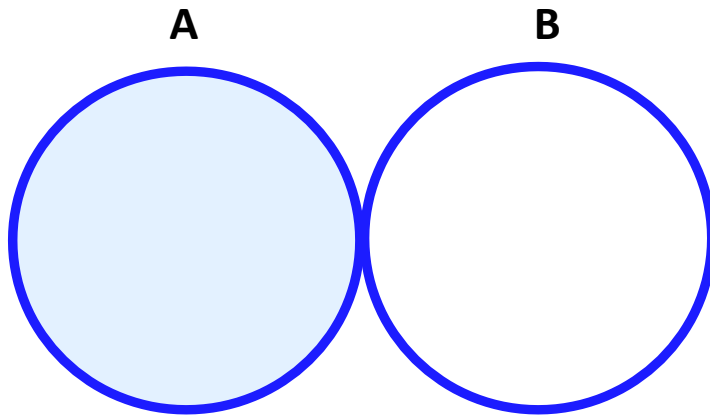
衝突前の全運動量

運動量保存則～例題

例題

2球の正面衝突を考える。

1. 衝突した瞬間の力を図に書き込め。
2. この運動で運動量が保存していることを示せ。



力学基礎演習

4.5 力積と運動量

問題18 35ページ

追加設問

衝突時の物体の運動方程式を書け。

問題19 36ページ

追加設問

衝突時の物体の運動方程式を書け。

4.5.1 運動量保存の法則

問題20 36ページ

追加設問

衝突時の物体の運動方程式を書け。

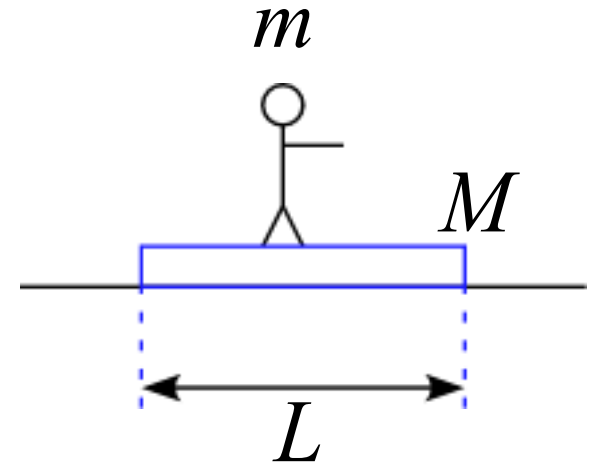
運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上に質量 M 、長さ L の板がある。
この板の上を質量 m の人が端から端まで歩くとする。

1. この運動に作用する力を図に書き込め。
但し、板が人から受ける水平方向の力を F とする。
2. この運動で人と板の運動方程式を書け。
但し、板の変位 $x_1(t)$ 、人の加速度 $x_2(t)$ とする。

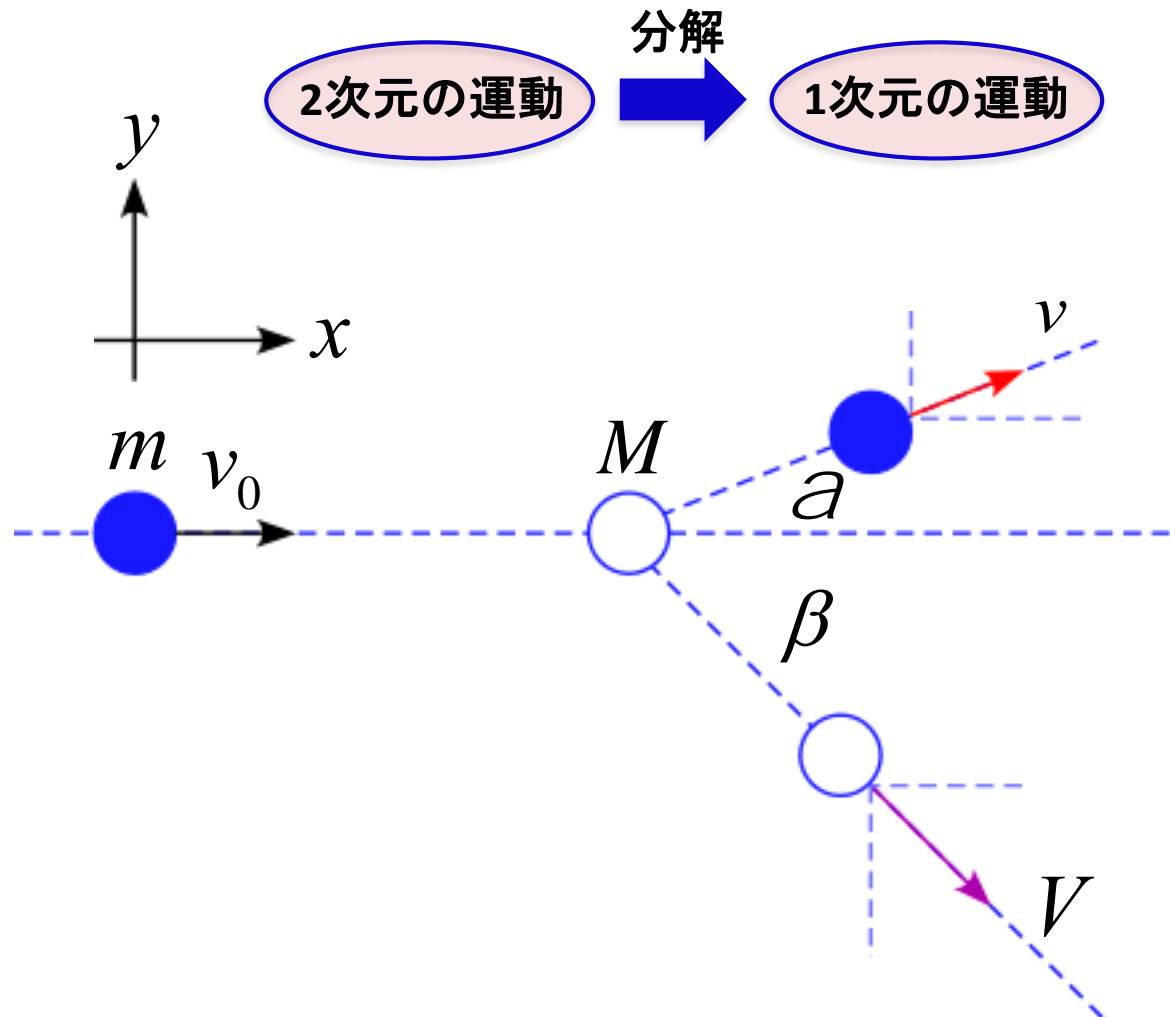
3. 初速度 $v_0 = 0$ のとき、板の移動距離を求めよ。



斜衝突

斜衝突 (ビリヤード)

静止している白球に青玉を完全弾性衝突させる運動 (床との摩擦は無いとする)



運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_1) = -\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(M\vec{V}_2) = \vec{F}$$

衝突時に力 \vec{F} が作用し、
青玉の速度 \vec{v}_1 とする
白玉の速度 \vec{V}_2

外から外力が加わっていない



前後の運動量については保存している

$$m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2 = m\vec{v}_1' + M\vec{V}_2'$$

衝突前の
全運動量

衝突後の
全運動量

$$m \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} V \cos \beta \\ -V \sin \beta \end{pmatrix}$$

従って、

$$x \text{ 方向: } mv_0 + M \cdot 0 = mv \cos \alpha + MV \cos \beta$$

$$y \text{ 方向: } m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv \sin \alpha - MV \sin \beta$$

$$x \text{ 方向: } mv_0 = mv \cos a + MV \cos b$$

$$y \text{ 方向: } 0 = mv \sin a - MV \sin b$$

完全弾性衝突

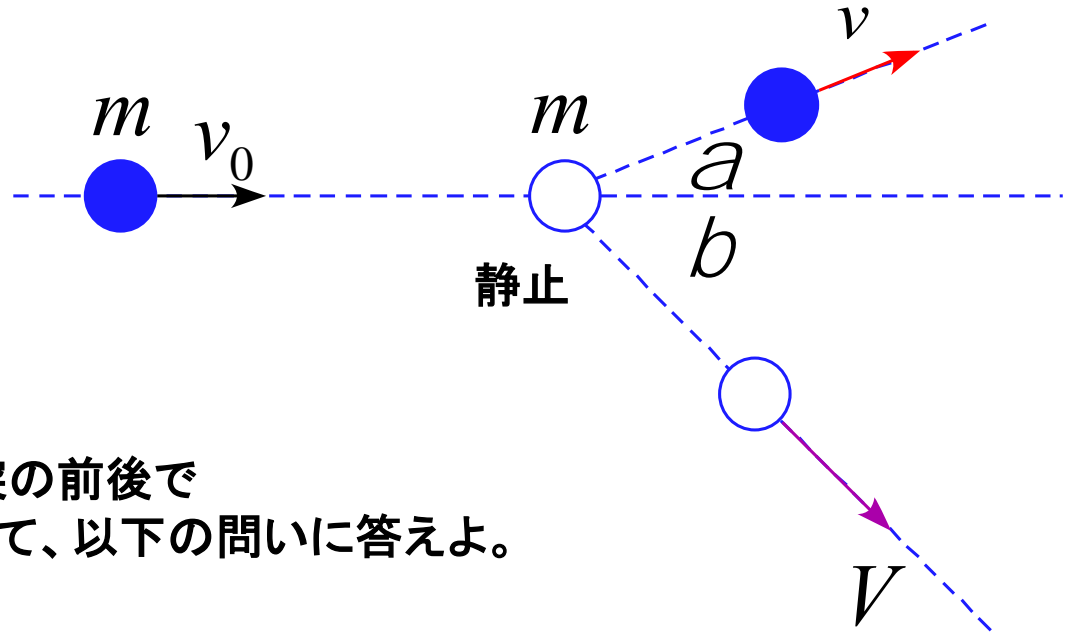


前後でのエネルギーロスはない

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

斜衝突～例題

斜衝突において、質量が同じであるとする。



衝突は弾性衝突であり、衝突の前後でエネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

1. 図の角 $\alpha + \beta$ を求めよ。

2. 速度比 $\frac{v}{V}$ を β を使って表せ。

反発係数

1次元の衝突

運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

であるが、速度の情報が不十分である
そこで

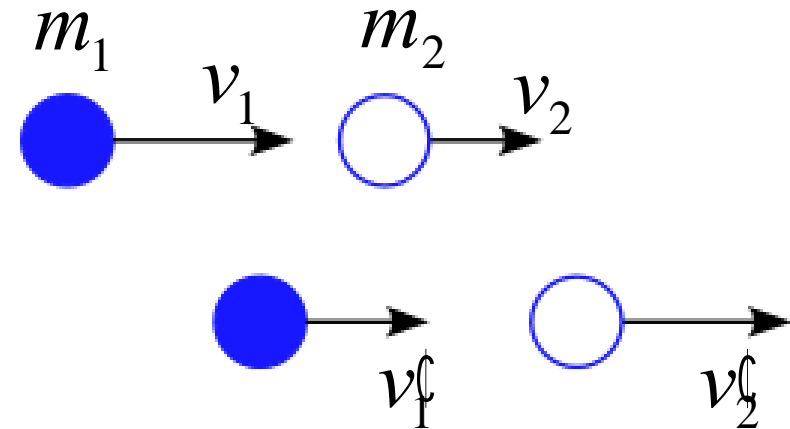
同じ2物体の衝突では、
衝突前後の相対速度の大きさの比は一定
(経験的法則)

を用いてその比率を定義すると

反発係数 (跳ね返り係数) e

$$e = - \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

衝突後の相対速度
衝突前の相対速度



反発係数

2体の相対運動のエネルギーの変化を考えると

$$\begin{aligned}
 DK &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v'_1 - v'_2)^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (e^2 - 1)
 \end{aligned}$$

完全弾性衝突: $e = 1$ 理想的によく弾む場合

非弾性衝突: $0 \leq e < 1$

完全非弾性衝突: $e = 0$ 2物体が一体になる場合

エネルギー保存則が成立

力学基礎演習

問題21 37ページ 追加問題

衝突時に力 F が作用したとしてそれぞれ
運動方程式を記述せよ。

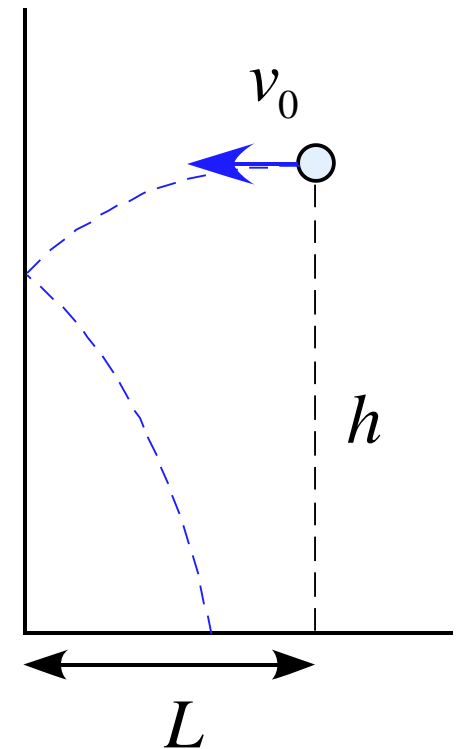
運動量～例題

例題

質量 m の物体を高さ h の地点から壁に向かって水平方向に初速度 v_0 で投げたところ、壁に当たって跳ね返り、地面に落下した。

壁からの距離は L であり、壁と物体との間の反発係数は e である。
重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

1. 物体が壁に当たる直前までの運動方程式を記述せよ。
2. 物体が壁に当たる時刻 t_1 を求めよ。
3. 物体が壁に衝突した瞬間の運動方程式を記述せよ。
(水平方向のみでよい)
4. 物体が壁から受けた力積 I を求めよ。
5. 物体が壁に当たった後の運動方程式を記述せよ。
6. 落下点に到達する時刻 t_2 を求めよ。
7. 壁から落下点までの距離 l を求めよ。



運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたり m_0 の物質を噴出しながら運動する物体がある

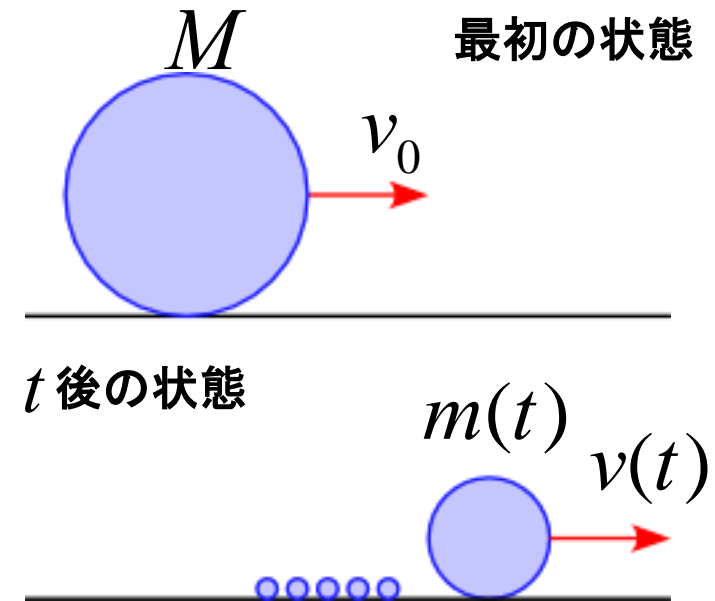
物体の初期質量を M 、初速度を v_0 とする

噴出物質の速度は常に 0 になるように噴出されるものとする

1. 時間 t 後の質量 $m(t)$ を記述せよ

2. 時間 t 後の速度 $v(t)$ を求めよ

3. 時間 t 後の移動距離 $x(t)$ を求めよ



運動量保存則～例題

例題

床の上に線密度 ρ の鎖が置いてある。

この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。

重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

引き上げた部分の長さが x 、速度が v 、加速度が a となったとき

1. 引き上げた部分の質量 m を記述せよ。

2. この時の運動方程式を記述せよ。

3. 引き上げる力 F の大きさを求めよ。

4. 一定の速度 v で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。

