中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている

力 $\vec{F}$ の作用線が常にある任意の点 O を通る

中心力

$$\vec{F}(r) = \underbrace{F(r)}_{\text{力の大きさ}} \boxed{\frac{\vec{r}}{r}}$$

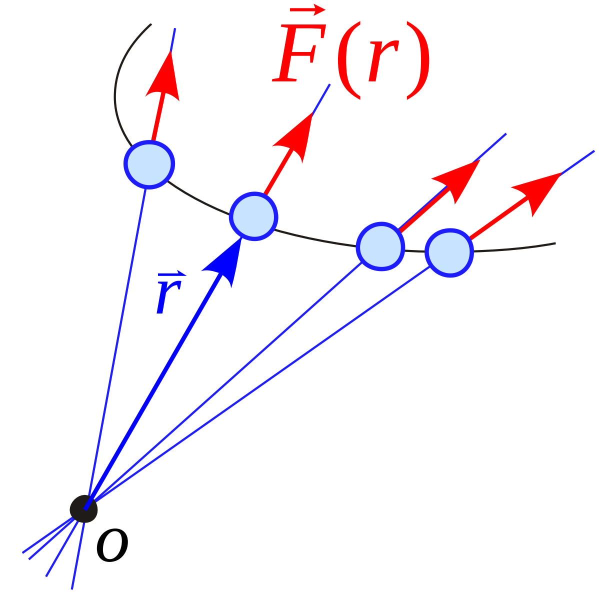
力の大きさ

力の向き

単位ベクトル

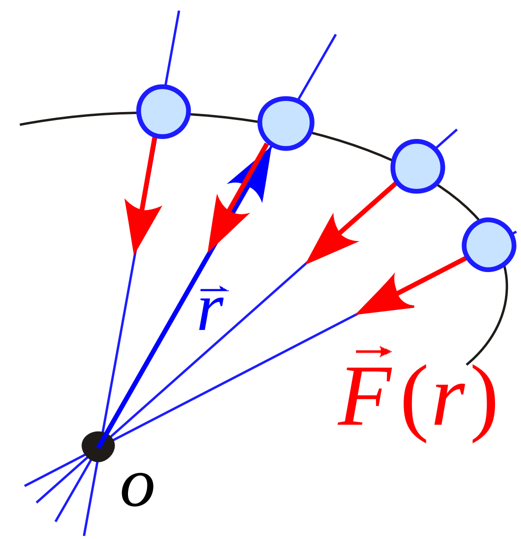
$F(r) > 0$

(斥力)



$F(r) < 0$

(引力)



中心力～角運動量保存

角運動量の変化を計算すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)$$

$$= m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= 0 + \vec{r} \times \boxed{F(r)\frac{\vec{r}}{r}}$$

中心力

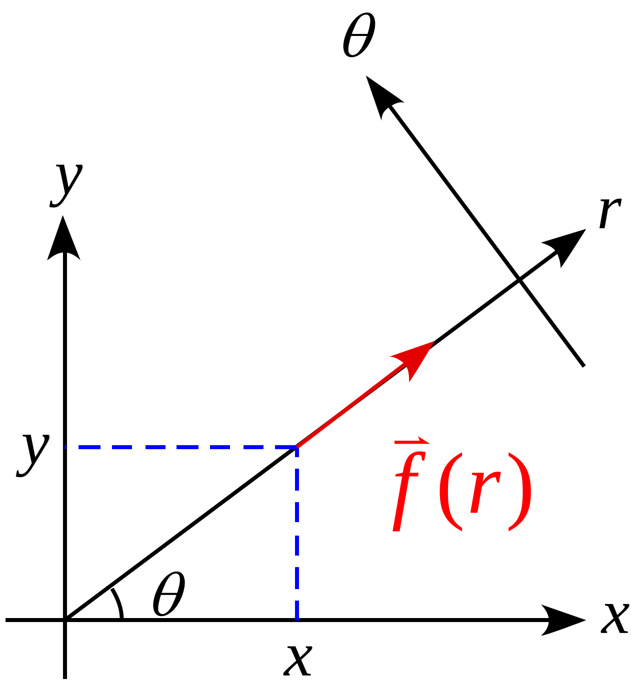
$$= 0$$

従って、中心力が働く運動では角運動量が保存する

中心力～運動方程式

運動方程式から考えるとする

極座標表示を使用する



中心力は

r 方向 $F_r = F(r)$

θ 方向 $F_\theta = 0$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、a_r, a_θ は

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表されるので、

課題6 (2)

中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F(r)$$

動径方向の運動方程式

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

と表される

中心力～運動方程式

ここで、θ方向の式が何を示しているか検討してみよう

変位は

$$x(t) = r\cos\theta$$

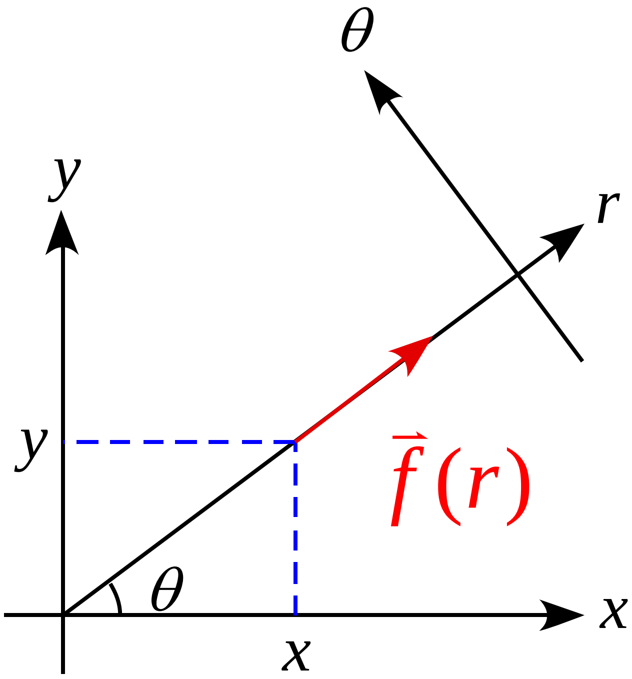
$$y(t) = r\sin\theta$$

である。
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 L は

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

中心力～運動方程式

ここで、角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - r_x \cdot 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix}$$

と表される

課題 1 (1)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

中心力～運動方程式

従って、Z 成分だけ考えればよく

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

$$= r\cos\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] - r\sin\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= rm\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - rm\frac{dr}{dt}\sin\theta\cos\theta + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}$$

と表される

中心力～運動方程式

従って、θ 方向の式において

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{dL}{dt}=0$$

となる

即ち、

$$ma_\theta=0$$

は角運動量保存則を表している

単振り子～例題

例題

質量 m の物体が長さ l のひもにつるされている。

ひもをつるしている点を通る鉛直線を基準とし、ひもの振れ角 θ を取る。

以下の問いに答えよ。

1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

   と表すことができる。
   振れ角 θ が十分小さいときの周期 T を求めよ。

3. 物体を θ_0 まで傾け、$t=0$ で離したとする。
   振れ角 $\theta(t)$ と、糸の張力 S を求めよ。
   但し、θ_0 は十分に小さな角度であるとする。

角運動量～例題

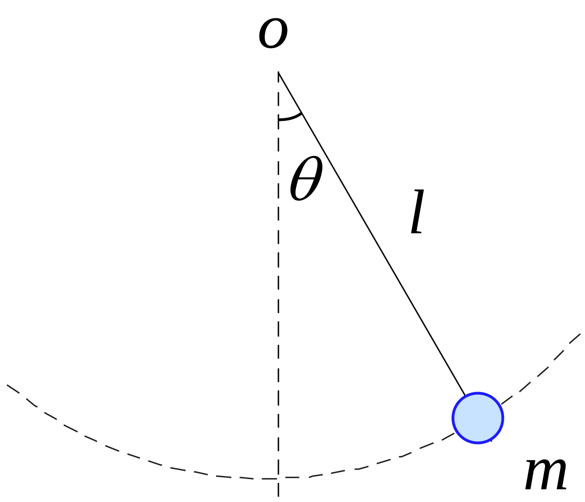
例題

質量 m の質点が xy 平面で半径 r_0 の円運動をしている。
$t=0$ で $(x,y)=(r_0,0)$ にあり、反時計まわりに角速度 ω で回転するとする。

1. 運動量 $\vec{p}=(p_x,p_y)$ を求めよ。

2. この運動における質点の角運動量 $\vec{L}$ を求めよ。

角運動量～例題



例題

図のような単振り子において、振れ角を θ としたとき、

回転の運動方程式から

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

となることを示したい。以下の問いに答えよ。

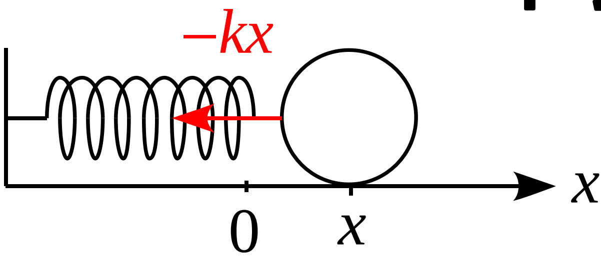
1. 質点の速さを v としたとき、点 o まわりの角運動量を表せ。

2. 点 O まわりの力のモーメントを求めよ。

3. 回転の運動方程式を記述せよ。

4. 題意の式を導け。

単振動～まとめ



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \delta)\ ,\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

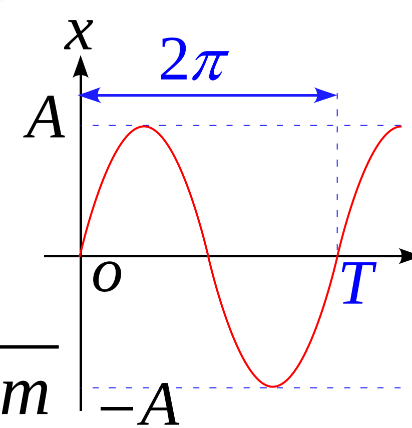
ωについて

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}A\sin(\omega t + \delta)$$

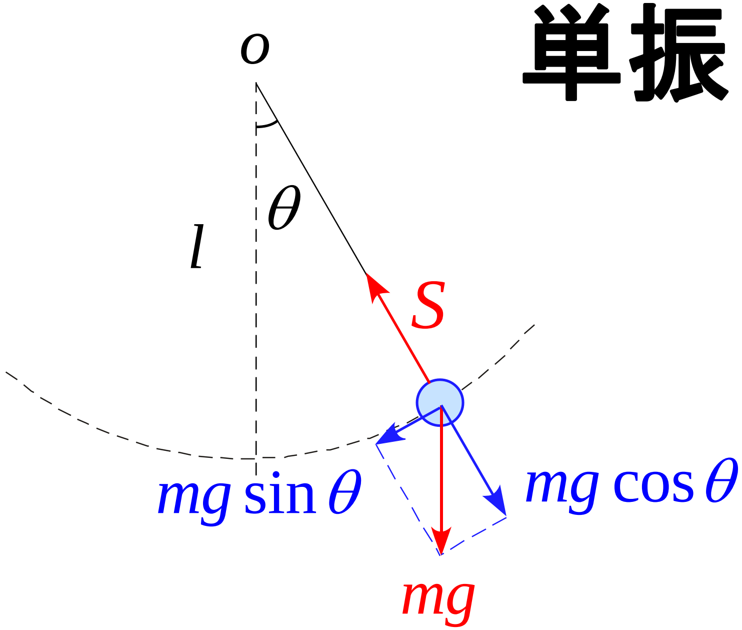
周期 T について



$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

単振り子～まとめ



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg\cos\theta - S$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] = mg\cos\theta - S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = -mg\sin\theta$$

単振り子～まとめ

糸の長さは $r=l$ (一定) なので

$$\frac{dr}{dt}=0$$

従って、

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=mg\cos\theta-S$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}=-mg\sin\theta$$

となる。
2式目は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\theta$$

と変形できる。

振れ角 θ が十分に小さければ

$$\sin\theta\simeq\theta$$

と近似ができ、

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{\theta(t)=A\sin(\omega t+\delta)\ ,\omega^2=\frac{g}{l}}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

単振り子～まとめ

ω について

$$\frac{d\theta}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

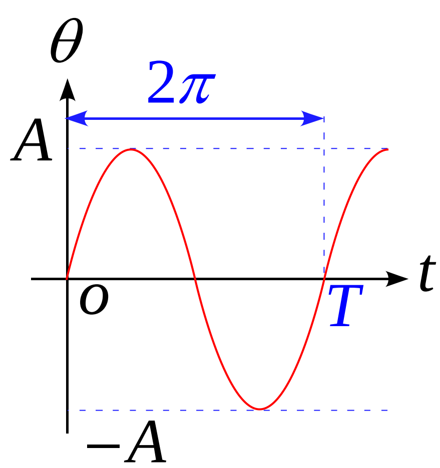
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\boxed{\frac{g}{l}}A\sin(\omega t + \delta)$$

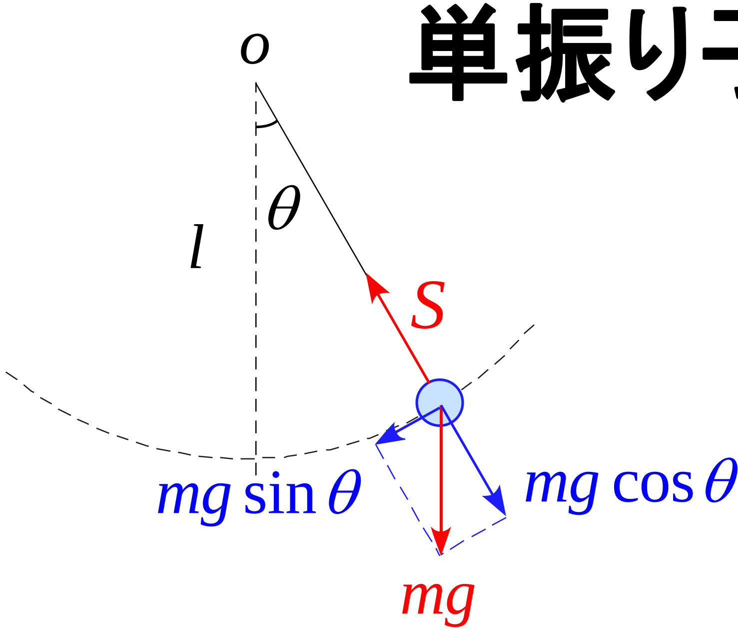
周期 T について

$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



単振り子～エネルギー



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg\cos\theta - S$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = mg\cos\theta - S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

単振り子～エネルギー

一般的な極座標表示 (速度)

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

運動方程式の θ 方向の式に着目

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

糸の長さは　$r = l$ (一定) なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

さらに、極座標表示において θ 方向の速度は一般的に $\boxed{v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}}$ であるから

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

と表される。

単振り子～エネルギー

ここで両辺に $v_\theta = l\dfrac{d\theta}{dt}$ をかけると

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}v_\theta = -mg\sin\theta l\frac{d\theta}{dt}$$

代入

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

$$ml\frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}v_\theta = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$mv_\theta\frac{dv_\theta}{dt} = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right) = \frac{d}{dt}(mgl\cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2 - mgl\cos\theta\right) = 0$$

となる。

単振り子～エネルギー

従って、この運動においてエネルギーが保存することがわかる。

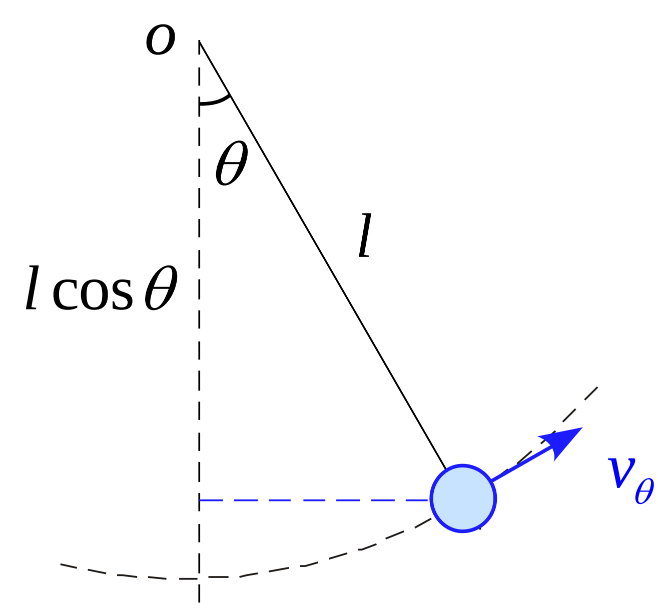
$$\frac{d}{dt}\left[\boxed{\frac{1}{2}mv_\theta^2}+\left(\boxed{-mgl\cos\theta}\right)\right]=0$$

運動エネルギー　　位置エネルギー

ここで、この式において、最下点を基準にするため mgl を加えると

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2+mgl-mgl\cos\theta\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2+mgl\left(1-\cos\theta\right)\right]=0$$



と表される。