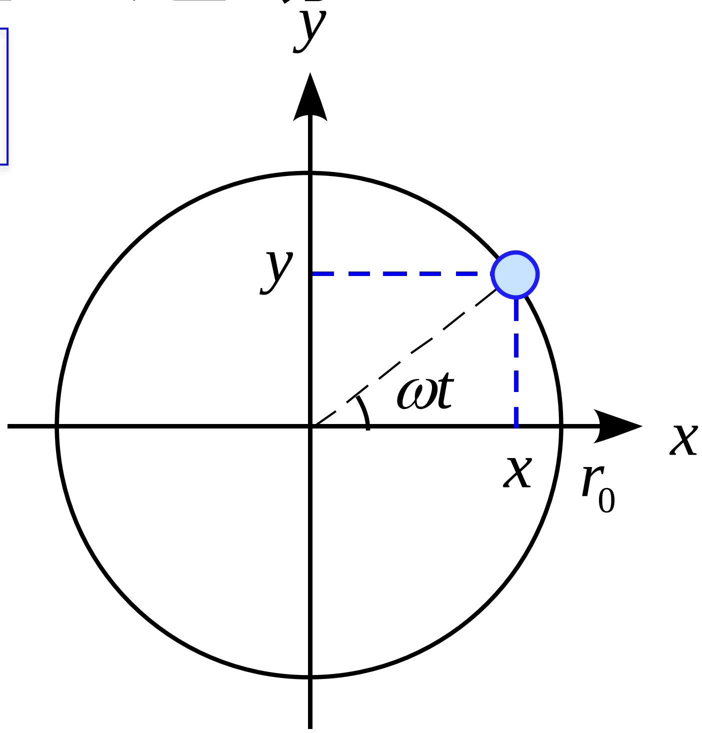
力学基礎演習

4.6.1 振り子の運動
問題24　40ページ
4.8.2 角運動量保存の法則
問題39　52ページ

円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動



ある時刻 t での位置は

$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$ とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt}\left[r_0 \cos \omega t\right] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left[r_0 \sin \omega t\right] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。

円運動～等速円運動

従って、

$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(-r_0\omega\sin\omega t\right)^2+\left(r_0\omega\cos\omega t\right)^2}$$

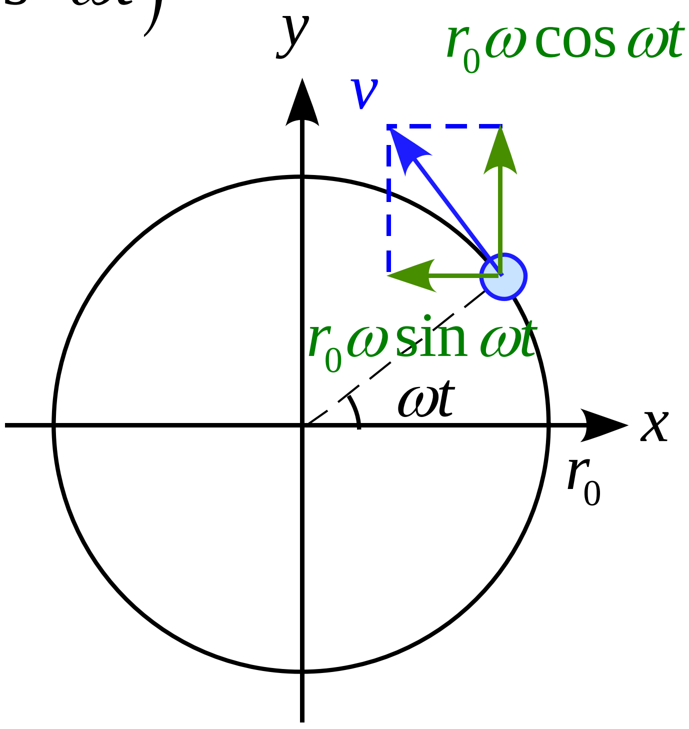
$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\sin^2\omega t+{r_0}^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)}$$

$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2}$$

$$=r_0\omega$$

となる。

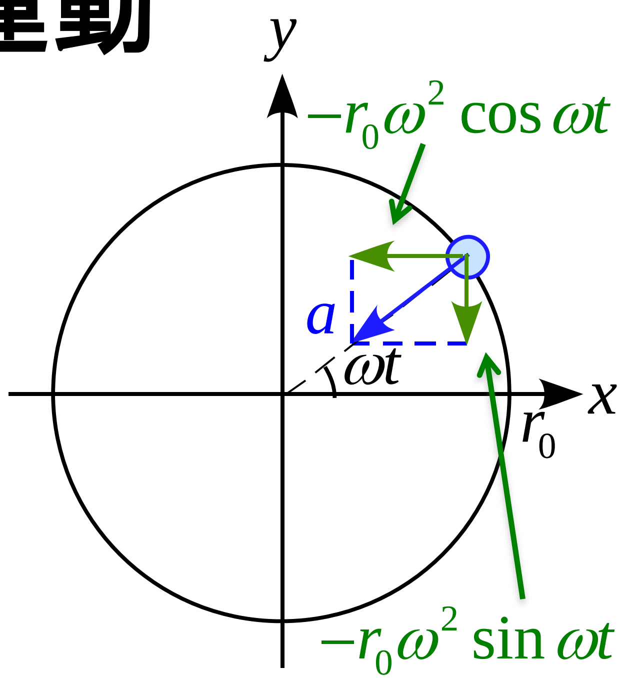


円運動～等速円運動

加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}\left[-r_0\omega\sin\omega t\right] = -r_0\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}\left[r_0\omega\cos\omega t\right] = -r_0\omega^2\sin\omega t$$



と表される。

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega^2\cos\omega t\right)^2 + \left(-r_0\omega^2\sin\omega t\right)^2}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4\cos^2\omega t + {r_0}^2\omega^4\sin^2\omega t}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4} = r_0\omega^2$$

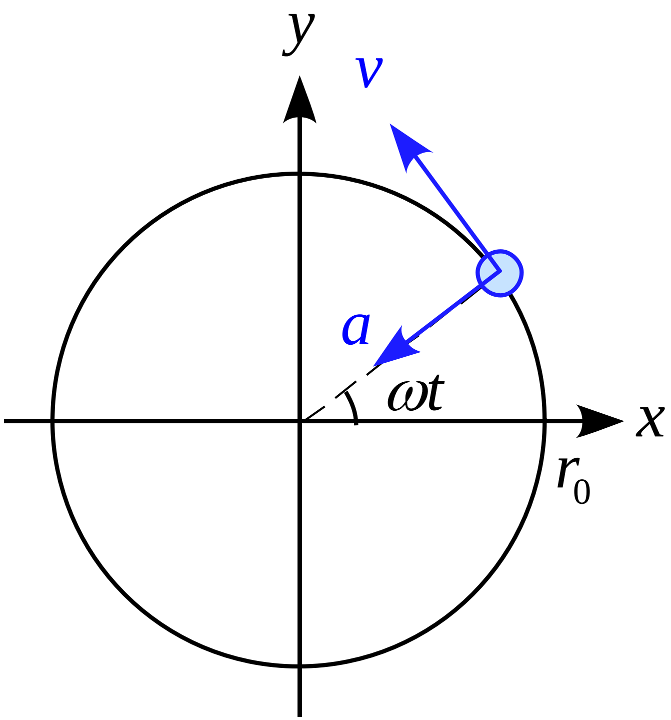
となる。

円運動～等速円運動

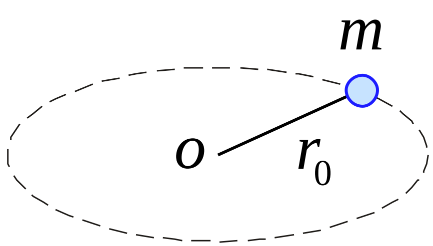
等速円運動 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ **(一定)**

$$v = r_0 \omega$$

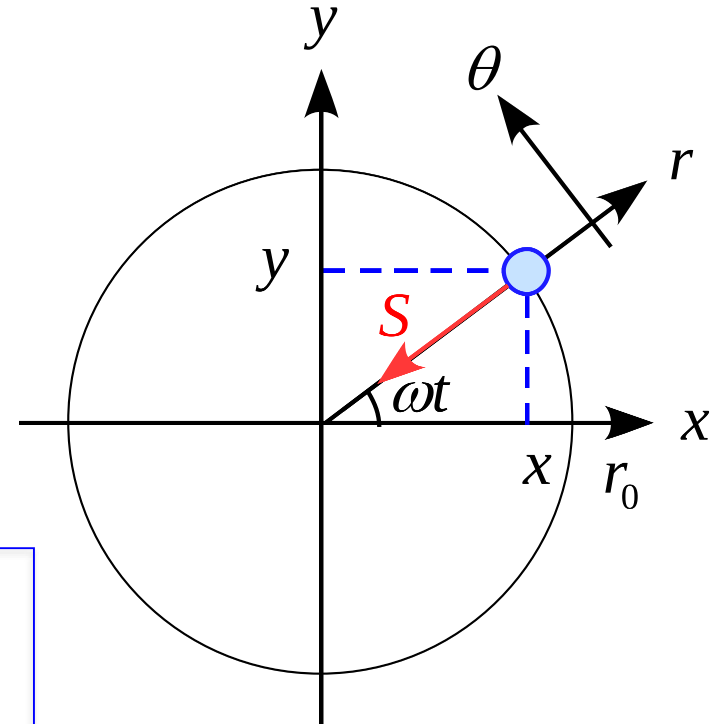
$$a = r_0 \omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



円運動～運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定) なので $\dfrac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = S$$

$$mr_0\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

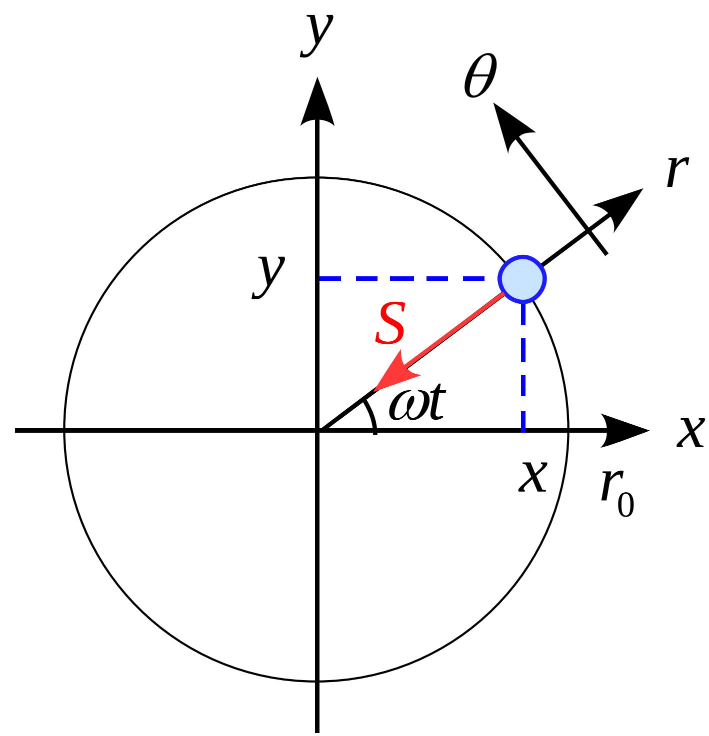
角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

とすると、

$$m\boxed{r_0\omega^2} = S$$

$$ma = S$$

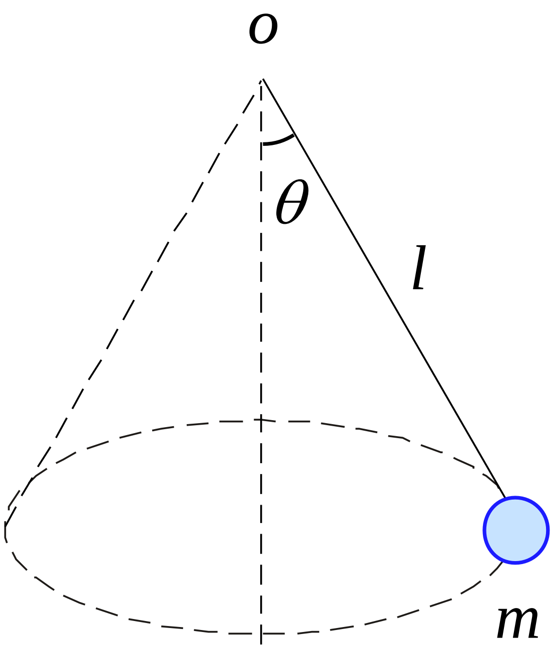
中心方向に加速度があると考えられる



力学基礎演習

4.2.2 等速円運動
問題5　26ページ

円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問いに答えよ。

1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

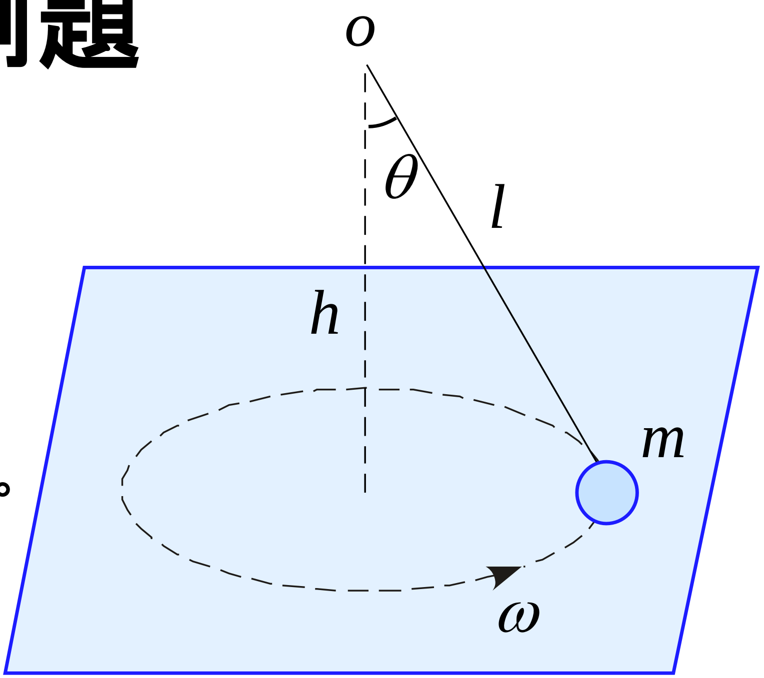
3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表すことができる。

糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面上で角速度 ω の円運動している。
糸は水平面から高さ h の地点に設置されている。
水平面は滑らかで摩擦は無視できるとする。
以下の問いに答えよ。

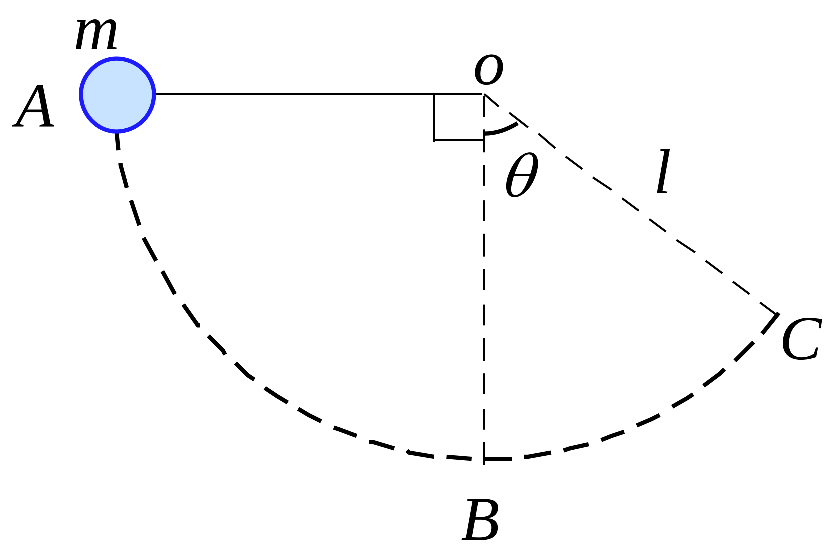
1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3. 糸の張力 S 、水平面からの垂直抗力 N を求めよ。

4. 角速度 ω が ω_0 を超えると水平面から離れる。ω_0 を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

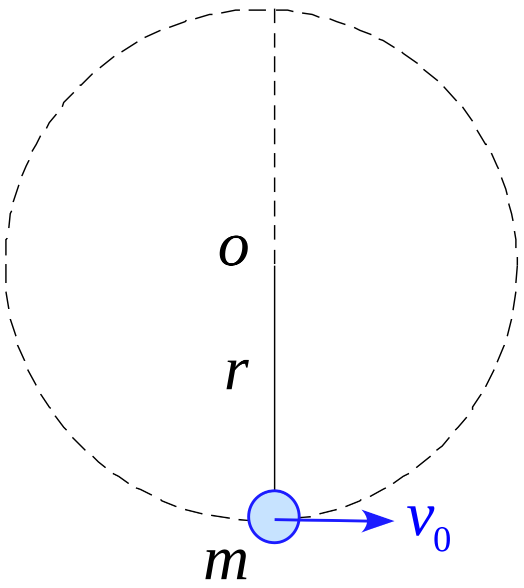
以下の問いに答えよ。

1. r **方向、** θ **方向の加速度を** a_r, a_θ **としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。**

2. 最下点 B **での糸の張力** T_B **を求めよ。**

3. 点 C **での糸の張力** T_C **を求めよ。**

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは r 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

最下点で初速 v_0 を与えたとき

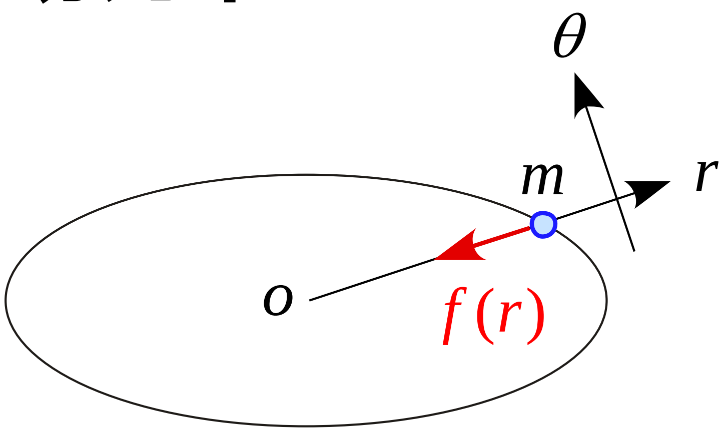
以下の問いに答えよ。

1. **r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。**

2. 物体が1回転するために必要な初速 v_0 の条件を求めよ。

面積速度～運動方程式

中心力が作用するモデルを考える



運動方程式は

$$ma_r = -f(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

θ 方向の式に着目し、a_θ を代入すると

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = const.$$

となる。

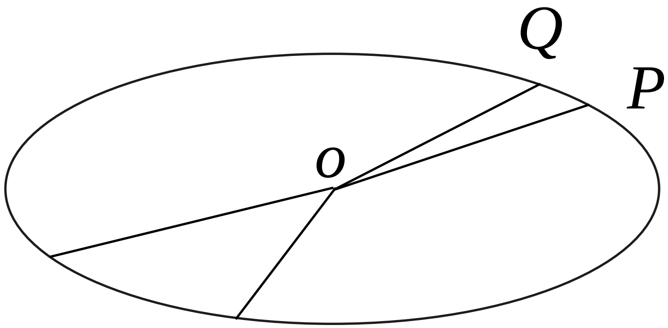
一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

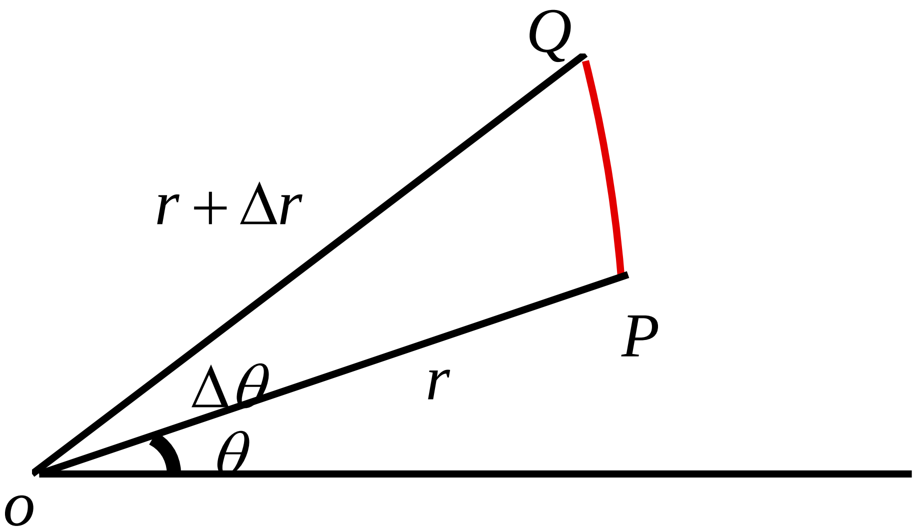
$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

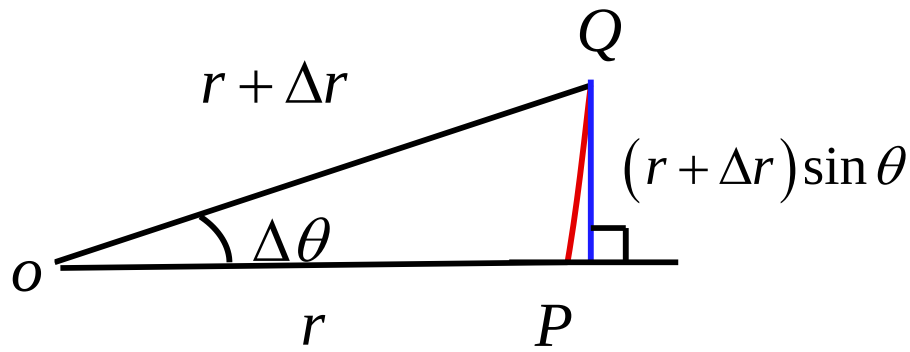
面積速度～運動方程式

面積速度：動径ベクトルが
単位時間に描く面積



面積 oPQ に着目すると





よって、面積は

$$\Delta S = \frac{1}{2} r\left(r+\Delta r\right)\sin\Delta\theta$$

とみなすことができる。

動径によって面積が描かれる速さは

Δt を無限小にした時の

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

の極限値で与えられる。

面積速度～運動方程式

この極限を考えると

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}r\left(r+\Delta r\right)\sin\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\frac{1}{2}r\cdot r\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)\sin\Delta\theta}{\Delta t}$$

$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{2}r^2\frac{\sin\Delta\theta}{\Delta t}\left(1+\frac{\Delta r}{r}\right)$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

となる。

この式と、θ方向の運動方程式を比較すると

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=const.$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=const.$$

となる。

従って、

どんな中心力であっても

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}=const.$$

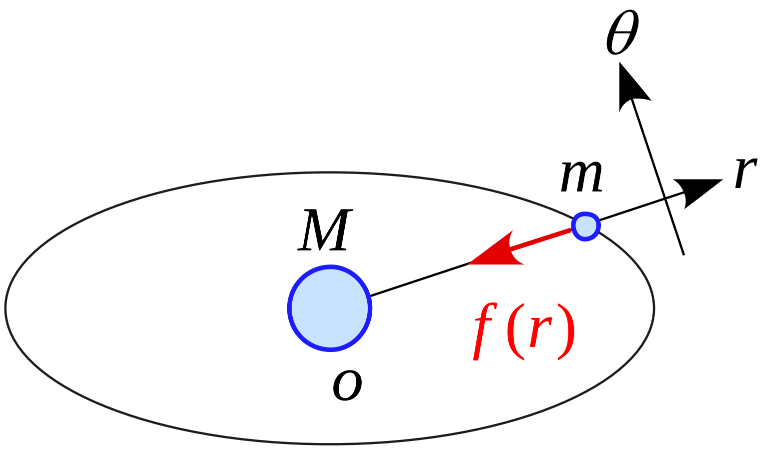
面積速度が一定である。

ケプラーの第2法則

面積速度～万有引力

太陽のまわりを回る惑星のモデルを考える

太陽の質量を M、惑星の質量を mとする。



運動方程式は

$$ma_r = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$ma_\theta = 0$$

θ 方向の式に着目し、a_θ を代入すると

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \quad (const.)$$

となる。

一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

面積速度～万有引力

面積速度を考えると

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$2m\frac{dS}{dt}=2m\left[\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}=L$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2m}$$

と表される。

これは面積速度が一定であることを示していて、ケプラーの第2法則に相当する。

一方、r 方向の運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\right]=-G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{L}{mr^3}=-G\frac{Mm}{r^2}$$

が得られる。

実際の惑星の軌道は楕円であるが、円からのずれが小さいことを考慮し、軌道を半径 a の円であると近似する。

面積速度～万有引力

よって、 $\dfrac{dr}{dt}=0$ となり

$$\frac{L^2}{ma^3}=G\frac{Mm}{a^2}$$

$$L^2=GMm^2a$$

が得られる。

公転周期 T は

$$T=\frac{\pi a^2}{\frac{dS}{dt}}=\frac{\pi a^2}{\frac{L}{2m}}=\frac{2m\pi a^2}{L}$$

と表される。

従って、

$$T=\frac{2m\pi a^2}{\sqrt{GMm^2a}}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}$$

となる。この式は

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

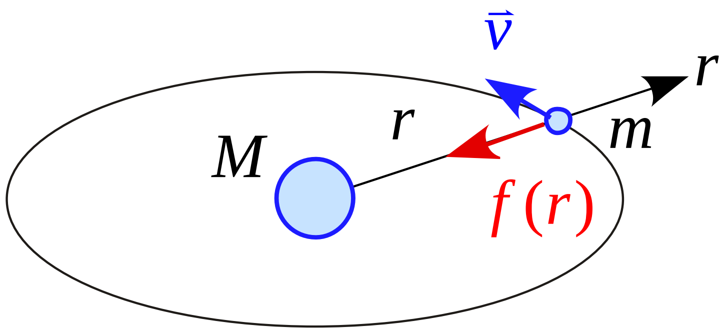
と変形でき、これは

ケプラーの第3法則
「惑星の周期の二乗は長半径の三乗に比例する」

に相当することを意味している。

万有引力～エネルギー

質量 M の天体のまわりを質量 m の人工衛星が速度 $\vec{v}$ でまわっている。天体と人工衛星の距離を r とする。



運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

と表される。

両辺に $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ の内積を取ると

$$m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = -G\frac{Mm}{r^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = -G\frac{Mm}{r^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -G\frac{Mm}{r^3}\frac{1}{2}2r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

となる。

万有引力～エネルギー

途中計算について

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{v}\right|\left|\vec{v}\right|\cos 0\right)=2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{v}\right|^2\right)=2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

ここで $\left|\vec{v}\right|^2=v^2$ と書き変えると

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

と表される。

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{r}\right|\left|\vec{r}\right|\cos 0\right)=2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{r}\right|^2\right)=2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

ここで $\left|\vec{r}\right|^2=r^2$ と書き変えると

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

と表される。

万有引力～エネルギー

従って、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = const.$$

となり、エネルギー保存則が成立する。

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{運動エネルギー}} + \underbrace{\left(-G\frac{Mm}{r}\right)}_{\text{万有引力による位置エネルギー}} = const.$$

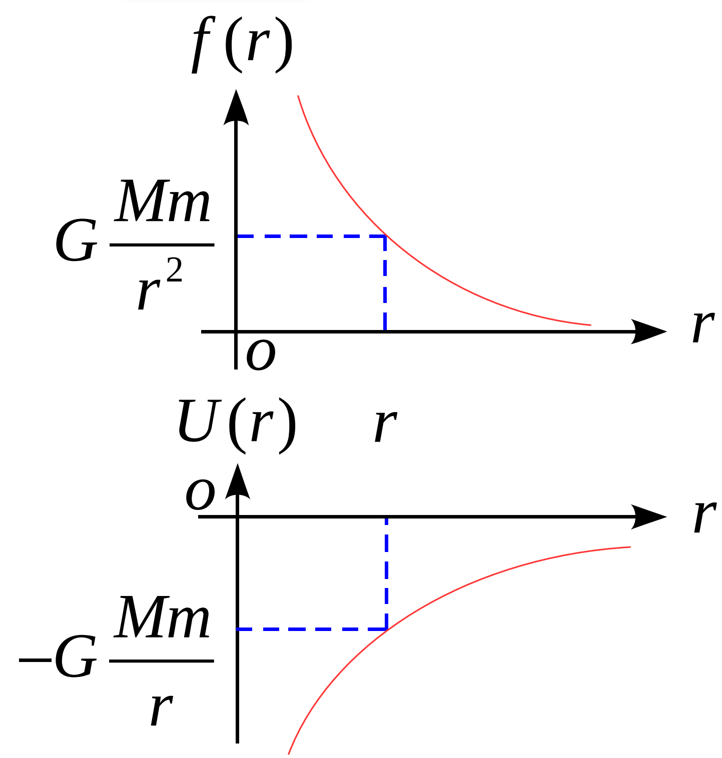
基準点について

エネルギーの式について、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

となる $r = \infty$ の点を基準として扱う。

無限遠



力学基礎演習

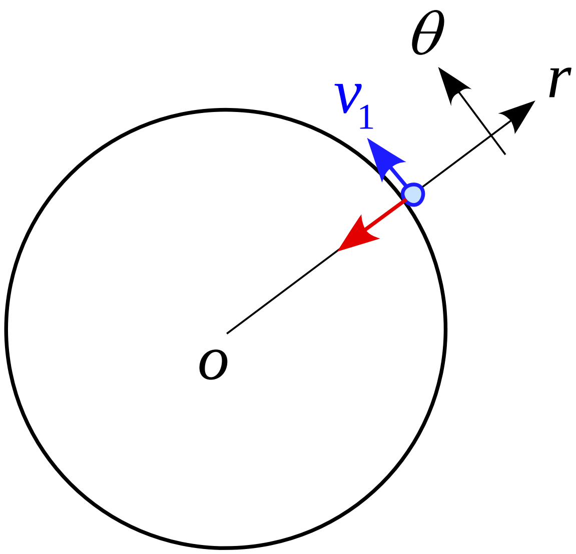
4.7.3 ポテンシャルエネルギー
問題33　47ページ

万有引力～例題

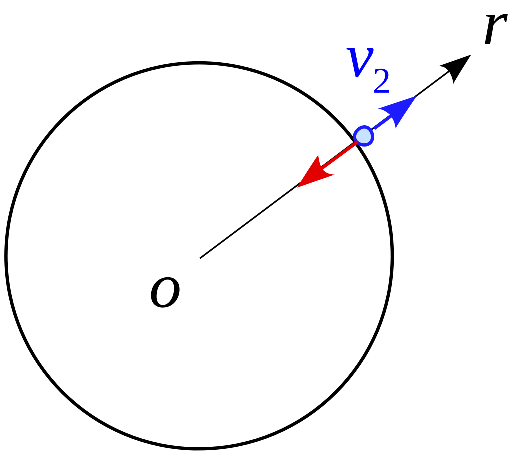
例題

地球の半径を R、地球の質量 M、万有引力定数を G として以下の問い に答えよ。

地球の表面上で物体に水平方向に初速度 v_1 を与えた。
すると物体は地表すれすれに円運動した。
v_1 を求めよ。



地球の表面上で物体に上空方向に初速度 v_2 を与えた。
すると物体は無限遠方に飛び去った。
このような運動をする為の v_2 の条件を求めよ。
但し、エネルギー保存則が成立するモデルとする。

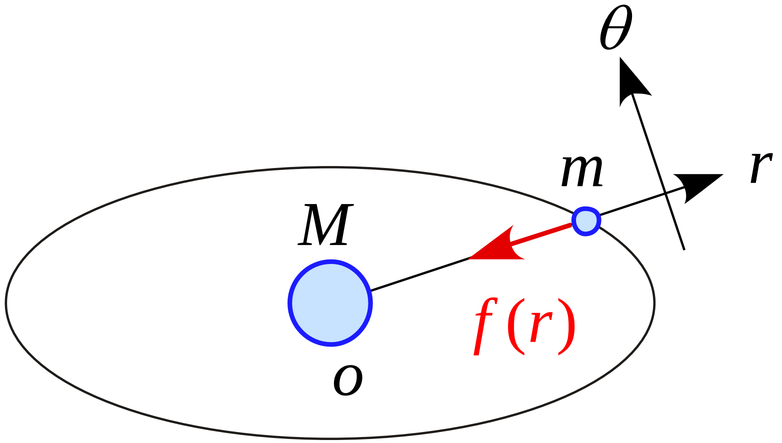


万有引力～例題

例題

極座標における運動方程式

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-G\frac{Mm}{r^2}$$

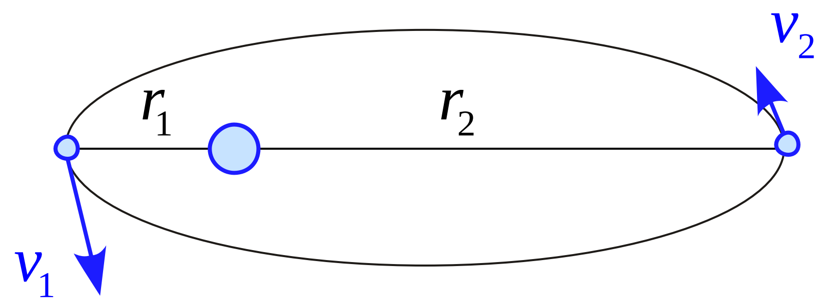


より、力学的エネルギー保存則を導け。

惑星のモデル～例題

例題

質量 m の惑星が質量 M の太陽のまわりを楕円軌道上で運動している。
近日点 r_1 での速さを v_1 遠日点 r_2 での速さを v_2 とする。
万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。



1. 角運動量から v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。

2. 面積速度を求め、v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。

3. 近日点と遠日点でのエネルギーの関係を記述せよ。