運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

x で積分

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\vec{r} \times \vec{p}}\right) = \boxed{\vec{r} \times \vec{F}}$$

角運動量

モーメント

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

t で積分

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

・問題文で指定されている場合はそれを利用する
・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
・一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける

$$m\frac{dv}{dt}=F \quad \Rightarrow \quad v = \bigcirc \quad \Rightarrow \quad x = \bigcirc$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$$

t で積分　　t で積分

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

解くことが困難

どの物理量の関係が必要か検討する

t で積分

左側から $\vec{r}$ で外積

x で積分

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B-\vec{p}_A=\int\vec{F}dt$$

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

力学の講義を終えて

取り扱った内容

- 加速度 / 速度 / 変位
- ニュートンの運動の法則
- 仕事とエネルギー
- エネルギー保存則
- 運動量と力積
- 運動量保存則
- 力のモーメント
- 角運動量
- 角運動量保存則
- 円運動
- 単振動 / 単振り子
- 万有引力の法則
- ケプラーの法則

取り扱っていない内容

- 剛体の運動
- 慣性モーメント

2017 物理学基礎 総合練習問題

注) 解答は全て解答用紙に記述すること。

途中式などは省略せず記述すること。

必要であれば重力加速度はgとして用いよ。

出題されているモデルの物体はいずれも質点であり、
大きさは無視できるものとする。

1. 力学の基礎的な物理量について答えよ。

(1) 速度vの定義式とその次元を記述せよ。

(2) 加速度aの定義式とその次元を記述せよ。

(3) 力Fは $\boxed{\qquad = F}$ と表される。

その次元は $\boxed{\qquad}$ である。

(4) (3)の式は運動方程式であり、この式を変形することにより

さまざまな物理量を導くことができる。

(3)の式の両辺をxで積分し、式を整理すると

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int F dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int F dx$$

$$\int \left(m \frac{dv}{dt} v \right) dt = \int F dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\boxed{①} \right) dt = \int F dx$$

となる。

左辺の①の部分は運動エネルギーを右辺は仕事を
表している。運動エネルギーの次元は $\boxed{}$ であり、
仕事の次元は $\boxed{}$ である。

(5) また、(3)の式を変形すると

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{②}\right)=F$$

と表される。

②の部分は運動量であり、その次元は $\boxed{}$ である。

②を p とおくと

$$\frac{d}{dt}(p)=F \qquad dp=Fdt$$

この左辺 Fdt が力積であり、その次元は $\boxed{}$ である。

(6) さらに、(3)の式をベクトルで考え、両辺に左側から位置ベクトル $\vec{r}$ の外積を取ると

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\quad ③ \quad}\right) = \boxed{\quad ④ \quad}$$

と表される。

左辺の③は角運動量 $\vec{L}$ であり、その次元は $\boxed{\qquad\qquad}$ である。

右辺の④は力のモーメント $\vec{N}$ であり、その次元は $\boxed{\qquad\qquad}$ である。

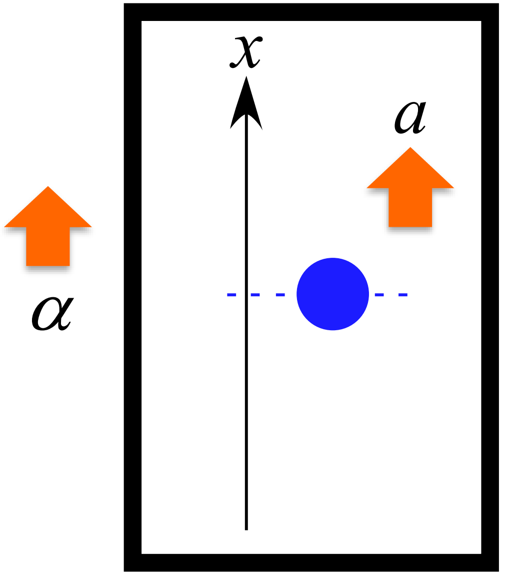
この式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

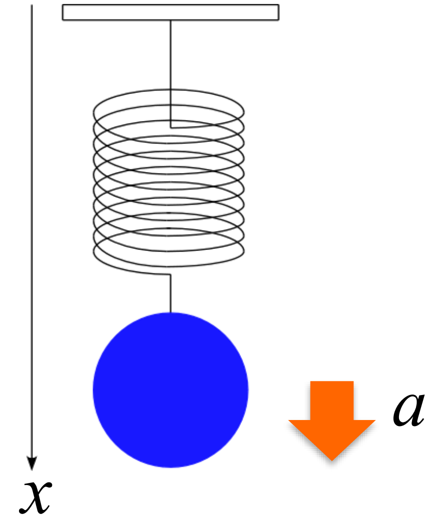
と表すことができ、これを「回転の運動方程式」と呼ぶ。

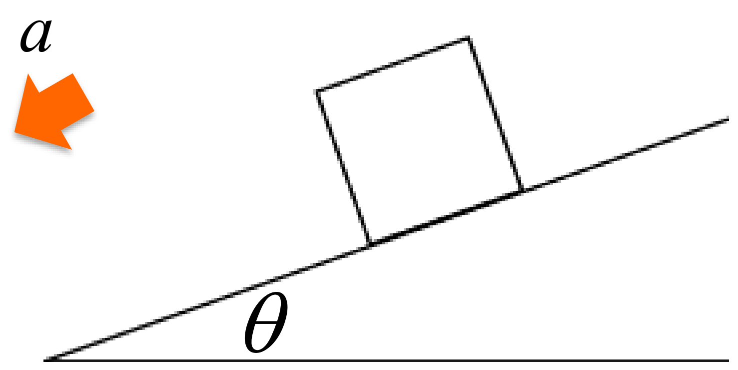
2. 以下の運動について物体に作用する力を図に書き込み、
その運動の運動方程式を記述せよ。
いずれの運動も物体の質量は m とし、重力加速度は g とする。

(1) 一定の加速度 α で上昇するエレベータ内で物体を
鉛直投げ上げさせる運動 (初速度 v_0)



(2) 物体をバネを吊るした状態での単振動運動
(バネ定数は k として用いよ)





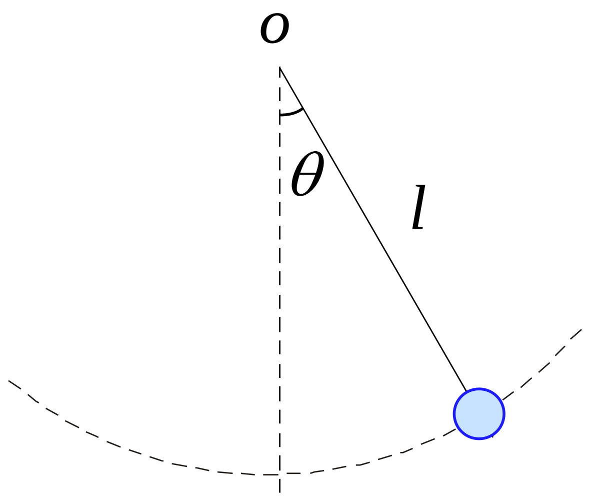
(3) 摩擦力が働く斜面を滑り降りる運動

(動摩擦係数は $\mu_k = \dfrac{f}{N}$ とする)

(4) 単振り子の運動

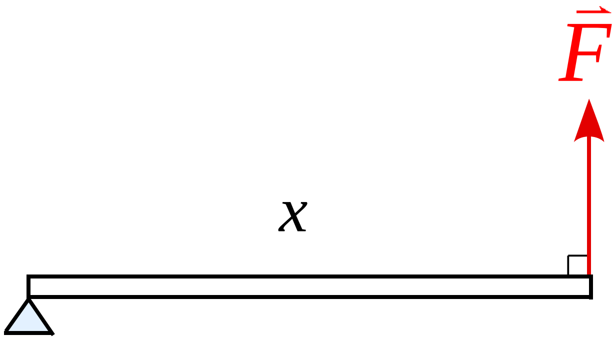
極座標で軸を考え記述せよ。

(糸の張力は S とし、r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ とする。)

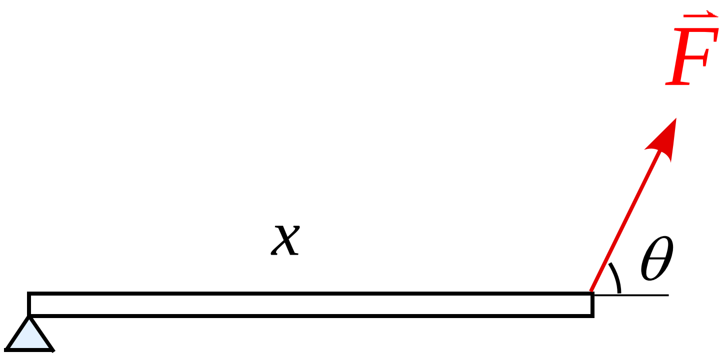


3. 以下の図の力のモーメント $|\vec{N}|$ を表せ。但し、棒の質量は無視できるとする。

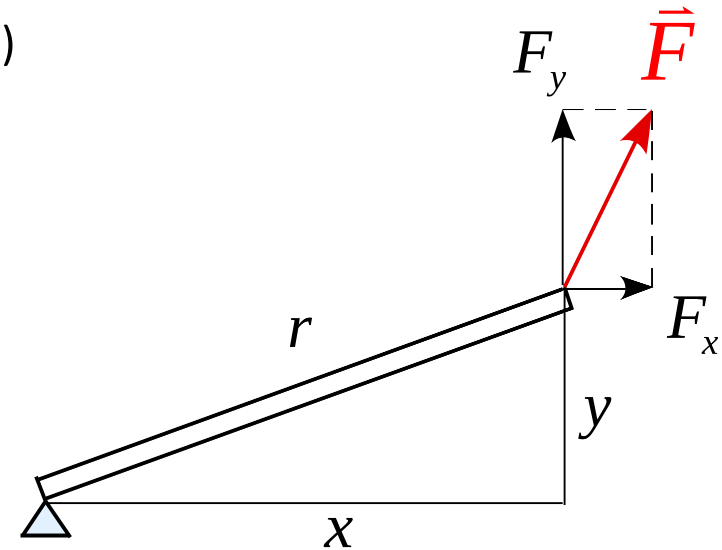
(1)



(2)



(3)



4. 単振動の一般解 $x(t) = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$ において、
以下の条件を満たすような $x(t)$ を求めよ。

(1) $x(0) = 0, v(0) = v_0$

(2) $x(0) = x_0, v(0) = 0$

(3) $x(0) = x_0, v(0) = v_0$

(4) $x(t_1) = x_0, v(t_1) = 0$

5. なめらかな水平面上に壁からバネが取り付けられている。
バネは自然長の状態で静止しているとする。
以下の問いに答えよ。

$t=0$ で初速度 v_0 を壁向きに与えると、物体は単振動をした。
物体の質量を m 、バネ定数を k とする。

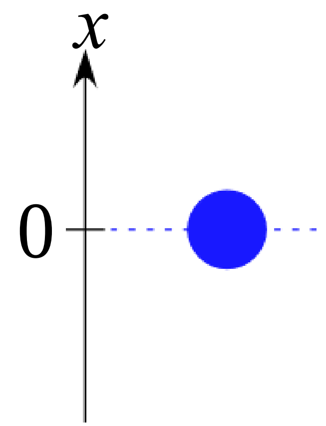
(1) 物体の運動方程式を記述せよ。

(2) 物体の変位 $x(t)$ 、速度 $v(t)$ 、加速度 $a(t)$ を求めよ。

(3) $v(t), x(t), a(t)$ のグラフを横軸 t として描け。

選択問題 (力学) 以下の問題6〜9のうち1題を選択して解答せよ。

6. 質量m の物体を自由落下させる。
以下の問に答えよ。
但し、重力加速度はgとする。

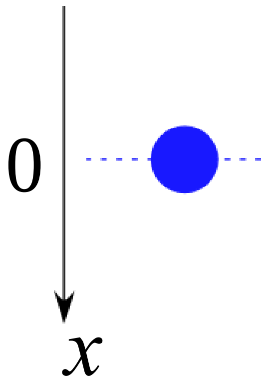


(1) 物体に作用する力を書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

(3) この運動において力学的エネルギーが保存していることを
運動方程式をx で積分することで導け。

7.質量mの雨滴が落下する運動を考える。
このとき、空気抵抗が働くものとし、
その空気の抵抗力の大きさはkvとする。
以下の問に答えよ。



(1) 物体に作用する力を書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

運動方程式を解くと、速度$v(t)$は $v(t)=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$
となる。

(3) $v-t$ グラフを書け。また、原点での傾きを求めよ。

(4) 十分時間が経過した状態の速度を記述せよ。

8. 摩擦がある斜面を質量mの物体がすべり降りる運動の運動を考える。以下の問に答えよ。
但し、動摩擦力は$f = \mu_k N$として用いてよいとする。

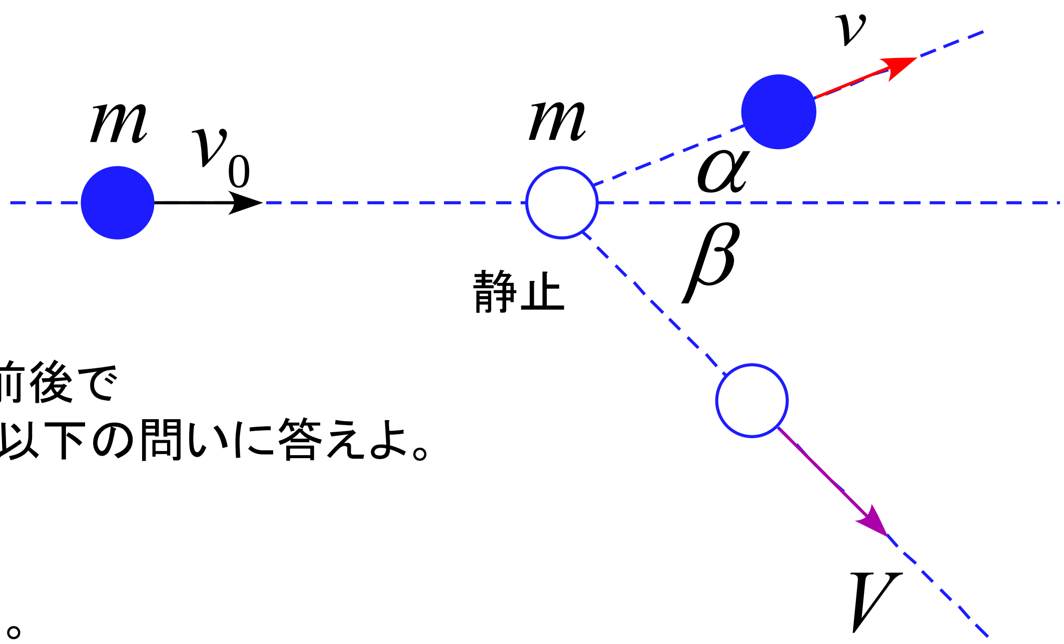
(1) 物体に作用する力を図に書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

(3) この運動の加速度 a を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

(4) この運動で物体が距離 L を移動したとするとき、動摩擦力がした仕事 $W_{摩}$ を求めよ。

9.斜衝突において、質量が同じであるとする。



衝突は弾性衝突であり、衝突の前後で
エネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

(1) 図の角 $\alpha + \beta$ を求めよ。

(2) 速度比 $\dfrac{v}{V}$ を β を使って表せ。

選択問題 (力学) 以下の問題10～14のうち1題を選択して解答せよ。

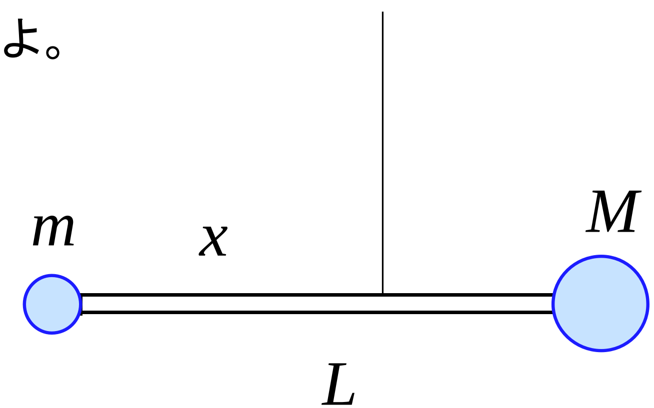
10.図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点が取り付けられ、糸でつるさている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

(1) 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

(a) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(b) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

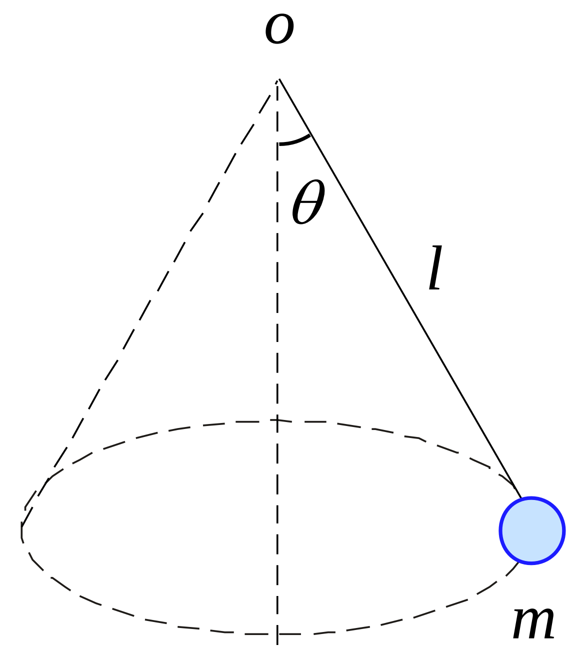


(2) 棒の質量がm の場合

(a) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(b) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

11. 図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問いに答えよ。



(1) 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

(2) r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

(3) 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表すことができる。
糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

12. 図のような円運動のモデルを考える。

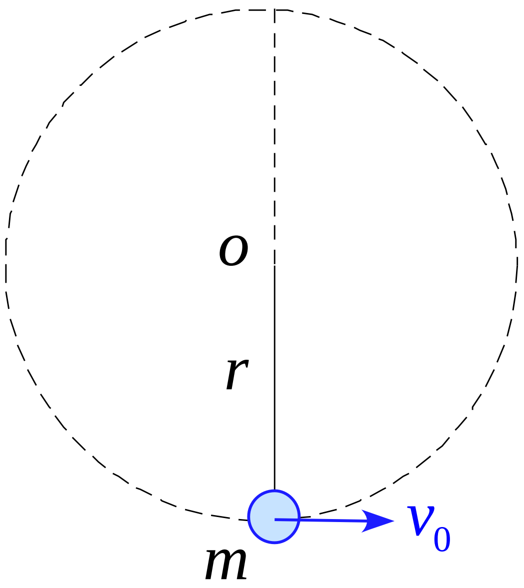
糸の長さは r 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

最下点で初速 v_0 を与えたとき

以下の問いに答えよ。



(1) r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

(2) 物体が1回転するために必要な初速 v_0 の条件を求めよ。

13.物体が半径 r_0 の円周上を速さ v_0 で等速円運動している。
r_0, v_0 は定数である。以下の問いに答えよ。

(1) 速度 $\vec{v}$ と位置ベクトル $\vec{r}$ が直交していることを示せ。

(2) 速度 $\vec{v}$ と加速度 $\vec{a}$ が直交していることを示せ

(3) 加速度の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

14. 右図の単振り子において、

エネルギー保存について論じ、

最下点を基準にしたエネルギーの式を導け。