

2018講義ノート
物理学基礎 (力学)
情報科学部・情報工学科

Introduction

物理 (Physics)

扱う範囲



$\sim 10^{-18}$ [m]

45 桁



$\sim 10^{27}$ [m]

分野

古典物理学 (マクロな世界)

ニュートン力学
解析力学
古典電磁気学
古典熱力学

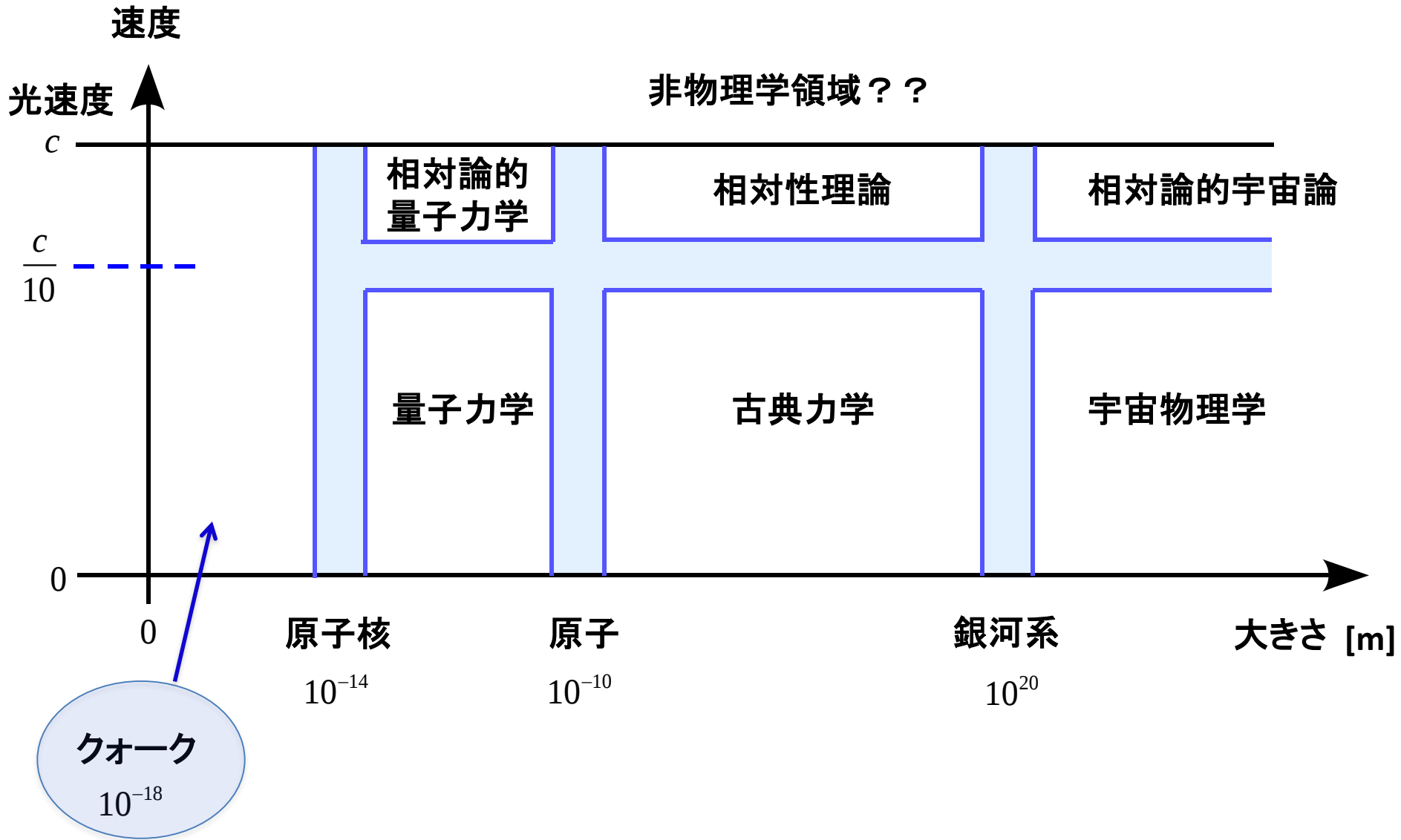
量子力学が発達



現代物理学 (ミクロな世界)

量子力学
量子統計力学
特殊相対性理論
一般相対性理論
その他、専門分野

Introduction



物理量～単位系

物理量

MKS単位系

(参考)

Length :長さ Time :時間 Mass :質量

m

sec

kg

[L]

[T]

[M]

長さ: 1m

光が真空中で1/299792458 s の間に進む距離

時間: 1s

133Cs原子が吸収する電磁波の周期の9192631770倍

質量: 1kg

パリの国際度量衡局に保管されている

白金イリジウム合金円柱の質量

国際単位系の基本単位

物理量	単位記号	名称
長さ	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (second)
電流	A	アンペア
熱力学的温度	K	ケルビン
物質량	mol	モル
光度	cd	カンデラ
平面角	rad	ラジアン
立体角	sr	ステラジアン

国際単位系(SI)

国際度量衡委員会が基本量の
標準を定めた単位系

次元解析～誘導単位

次元解析

次元：物理的性質を表している

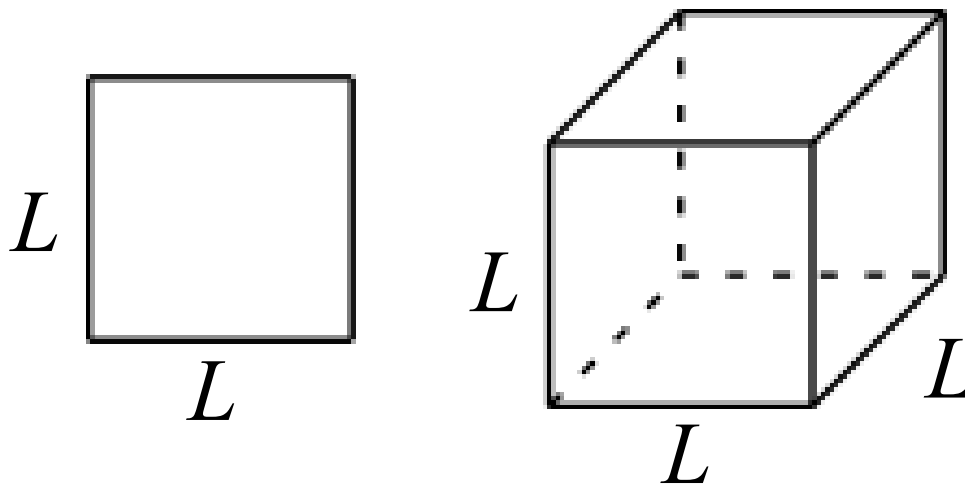
式の導出などの検証の手段になる

計算をされていて、何かオカシイ？
と思ったら、次元解析をするとよい

例

物理量	関係式	単位記号	次元
面積 (Square)	$S = L \times L$	m^2	$[L^2]$
体積 (Volume)	$V = L \times L \times L$	m^3	$[L^3]$
密度 (Density)	$r = m / V$	g / cm^3	$[M / L^3]$

← CGS 単位系



次元解析～誘導単位

物理量	関係式	単位記号	次元
速度、速さ (Velocity , Speed)	$v =$	m / s	[LT ⁻¹]
加速度 (Acceleration)	$a =$	m / s ²	[LT ⁻²]
力 (Force)	$f =$	kg ・ m / s ² = N	[LMT ⁻²]
仕事 (Work)	$W =$	kg ・ m ² / s ² = N ・ m = J	[L ² MT ⁻²]
運動エネルギー (Kinetic energy)	$K =$	kg ・ m ² / s ² = N ・ m = J	[L ² MT ⁻²]
力積 (Impulse)	$I =$	kg ・ m / s = N ・ s	[LMT ⁻¹]
運動量 (Momentum)	$p =$	kg ・ m / s = N ・ s	[LMT ⁻¹]

接頭語

単位の10の整数乗倍を表すために接頭語を用いる

例

$$10^3 \text{ m} = 1 \text{ km}$$

k は 10^3 を示している

国際単位系における接頭語

接頭語	記号	ベキ
ペタ (peta)	P	10^{15}
テラ (tera , terra)	T	10^{12}
ギガ (giga)	G	10^9
メガ (mega)	M	10^6
キロ (kilo)	k	10^3
ヘクト (hecto)	h	10^2
デカ (deka , deca)	da	10^1
デシ (deci)	d	10^{-1}
センチ (centi)	c	10^{-2}
ミリ (milli)	m	10^{-3}
マイクロ (micro)	μ	10^{-6}
ナノ (nano)	n	10^{-9}
ピコ (pico)	p	10^{-12}
フェムト (femto)	f	10^{-15}

番外編

オングストローム
(angstrom)

$$\text{\AA} = 10^{-10}$$

例

$$1 \text{ km} = \text{m}$$

$$= \text{m}$$

$$1 \text{ cm} = \text{m}$$

$$100 \text{ cm} = \text{m}$$

$$= \text{m}$$

数学の復習

力学基礎演習

1.1 平均変化率

1.1.1 微分係数

1.1.2 導関数

1.2 不定積分

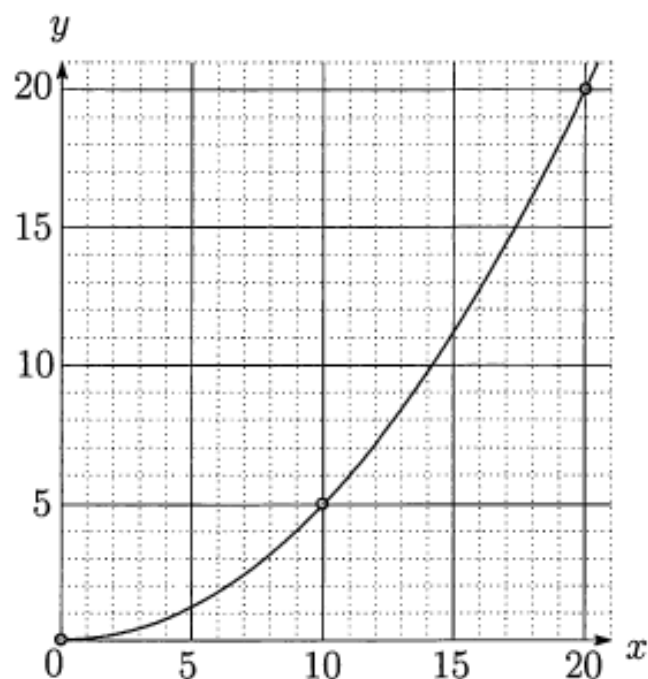
1.2.1 定積分

1.2.2 区分求積法

1.3 時間微分と時間積分

1.1 平均変化率

問題 1 関数 $f(x) = \frac{1}{20}x^2$ を $y = f(x)$ とおいて得られる x - y 平面内の $x \geq 0$ を満たす下図の放物線について, 下記空欄に定数 (整数) を書き込め。



(1) x が 0 から 10 まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率を $\bar{f}_1$ とおく。上図に示された実線は, 点 $(10, \boxed{})$ を通るから, $\bar{f}_1$ は,

$$\bar{f}_1 = \frac{\boxed{}}{10} = \frac{\boxed{}}{2}$$

である。

(2) x が 10 から 20 まで変化するときの関数 $f(x)$ の平均変化率を $\bar{f}_2$ とおく。上図の実線は, 二点 $(10, \boxed{}), (20, \boxed{})$ を通るから, $\bar{f}_2$ は,

$$\bar{f}_2 = \frac{\boxed{} - \boxed{}}{20 - 10} = \frac{\boxed{}}{2}$$

である。

1.1.1 微分係数

問題 2 関数 $f(x) = \frac{1}{20}x^2$ において、 $x = x_1$ が次の値をとる場合について、下記空欄に定数(整数)を書き込め。

(1) $x_1 = 5$ における微分係数は、

$$\begin{aligned} f'(5) &= \lim_{x_2 \rightarrow 5} \frac{\frac{1}{20}x_2^2 - \frac{1}{20} \times \boxed{}^2}{x_2 - 5} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 5} \frac{(x_2 + \boxed{})(x_2 - \boxed{})}{20(x_2 - 5)} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 5} \frac{1}{20} (x_2 + \boxed{}) = \frac{\boxed{}}{2} \end{aligned}$$

である。

x を変数とする関数 $f(x)$ について、

$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

によって定義される $f'(x_1)$ を $x = x_1$ における関数 $f(x)$ の“微分係数”という。これを $\frac{df(x_1)}{dx}$ 、すなわち、

$$\frac{df(x_1)}{dx} = \lim_{x_2 \rightarrow x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

によって定義することもある。

原点 O とする x - y 平面を考えると、 $f'(x_1)$ や $\frac{df(x_1)}{dx}$ は、関数 $y = f(x)$ の表すグラフ上の点 $A(x_1, f(x_1))$ における接線(下図の破線)の傾きを表す。

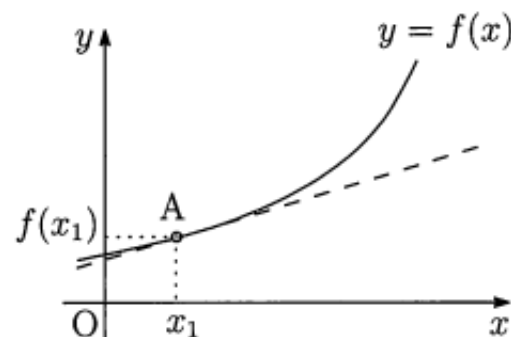


図 1.3: 曲線 $y = f(x)$ と微分係数

(2) $x_1 = 15$ における微分係数は,

$$\begin{aligned} f'(15) &= \lim_{x_2 \rightarrow 15} \frac{\frac{1}{20}x_2^2 - \frac{1}{20} \times \boxed{}^2}{x_2 - \boxed{}} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 15} \frac{\left(x_2 + \boxed{}\right) \left(x_2 - \boxed{}\right)}{20 \left(x_2 - \boxed{}\right)} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 15} \frac{1}{20} \left(x_2 + \boxed{}\right) = \frac{\boxed{}}{2} \end{aligned}$$

である。

(3) $y = f(x)$ とおくと、関数 $y = f(x)$ の表すグラフが得られる。こうして得られた放物線の $x_1 = 10$ における接線 (図 1.4 の破線) の傾きは、

$$\begin{aligned} f'(10) &= \lim_{x_2 \rightarrow 10} \frac{\frac{1}{20}x_2^2 - \frac{1}{20} \times \boxed{}^2}{x_2 - 10} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 10} \frac{(x_2 + \boxed{})(x_2 - \boxed{})}{20(x_2 - 10)} \\ &= \lim_{x_2 \rightarrow 10} \frac{1}{20} (x_2 + \boxed{}) = \boxed{} \end{aligned}$$

である。

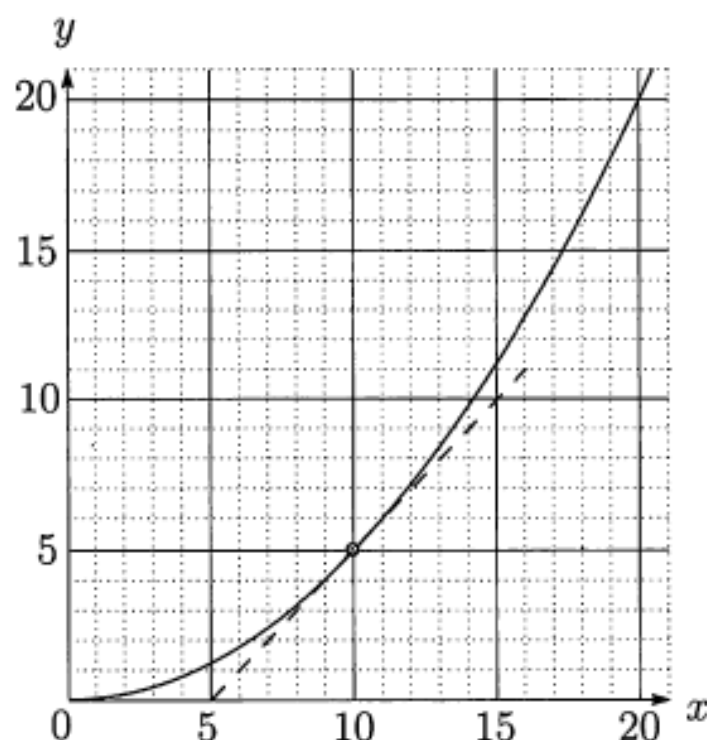


図 1.4: $x = 10$ における放物線の接線

1.1.2 導関数

問題 3 次の (1) ~ (3) で与えられる関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を, その定義から導こう。下記空欄に, x を用いた式, または, 定数を書き込め。

(1) $f(x) = x$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\boxed{} + \Delta x) - \boxed{}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \boxed{} \\ &= \boxed{} \end{aligned}$$

(2) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\boxed{} + \Delta x)^2 - \boxed{}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\boxed{} + \boxed{} \Delta x + (\Delta x)^2 - \boxed{}}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\boxed{} + \Delta x) \\ &= \boxed{} \end{aligned}$$

x を変数とする関数 $f(x)$ について,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

によって定義される x の関数 $f'(x)$ を関数 $f(x)$ の“導関数”という。導関数 $f'(x)$ は, 関数 $f(x)$ の任意の x における微分係数を表すことになるから,

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

とかくこともある。関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めることを, 関数 $f(x)$ を x で微分するという。

$$(3) f(x) = x^3$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\boxed{} + \Delta x)^3 - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\boxed{} + \boxed{} \Delta x + \boxed{} (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left\{ \boxed{} + \boxed{} \Delta x + (\Delta x)^2 \right\}$$

$$= \boxed{}$$

$$(4) f(x) = 3$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\boxed{} - \boxed{}}{\Delta x}$$

$$= \boxed{}$$

c を定数, n を自然数とする。以降において関数 $f(x)$ を微分するときには“微分公式”,

$$\text{I. } f(x) = c \implies f'(x) = 0$$

$$\text{II. } f(x) = x^n \implies f'(x) = nx^{n-1}$$

を用いればよい。

1.2 不定積分

問題 4 積分定数を C とする。次の不定積分について、下記空欄に定数を書き込め。

$$(1) \int x \, dx = \frac{1}{\boxed{}} x^2 + C$$

$$(2) \int x^2 \, dx = \frac{1}{\boxed{}} x^3 + C$$

問題 5 積分定数を C とする。次の不定積分について、下記空欄に x を用いた式を書き込め。

$$(1) \int 4 \, dx = \boxed{} + C$$

$$(2) \int 4x \, dx = \boxed{} + C$$

問題 6 積分定数を C とする。下記空欄に、 x を用いた式、または、定数を書き込め。

$$(1) \frac{dF(x)}{dx} = 4$$
$$\Rightarrow F(x) = \int \boxed{} \, dx = \boxed{} + C$$

$$(2) \frac{dF(x)}{dx} = 4x$$
$$\Rightarrow F(x) = \int \boxed{} \, dx = \boxed{} + C$$

1.2.1 定積分

問題 7 次の定積分について, 下記空欄に x を用いた式, または, 定数を書き込め。

$$(1) \int_1^2 4 dx = \left[\boxed{} \right]_1^2 = \boxed{}$$

$$(2) \int_1^2 4x dx = \left[\boxed{} \right]_1^2 = \boxed{}$$

a, b を定数とし, 関数 $f(x)$ の原始関数の 1 つを $F(x)$ とするとき,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

を満たす $\int_a^b f(x) dx$ を関数 $f(x)$ の“定積分”といい, a を“下端”, b を“上端”という。ここで, 新たな記号

$$\left[F(x) \right]_a^b = F(b) - F(a)$$

を定義すれば, 定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = \left[F(x) \right]_a^b$$

と表すことができ便利である。

1.2.2 区分求積法

問題 8 n を自然数とし, $x_0 = 0, x_n = 1$ とする。
 x - y 平面における閉区間 $[0, 1]$ を分点,

$$x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n$$

によって, n 個の閉区間に等分するとき, 単調関数
 $y = f(x) (\geq 0)$ の表すグラフと x 軸, および, 直線
 $x = 1$ によって囲まれた領域の面積を S とすると,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$$

が成り立つ。次の関数 $f(x)$ について, 下記空欄に
 n を用いた式, または, 定数を書き込め。

(1) $f(x) = x$ のとき, $f(x_i) = \frac{i}{\quad}$ とかけ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i &= 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n \\ &= (n+1) + (n+1) + \cdots \\ &= \frac{1}{2} \quad (n+1) \end{aligned}$$

とかけるから,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\quad + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\quad}$$

を得る (図 1.5)。

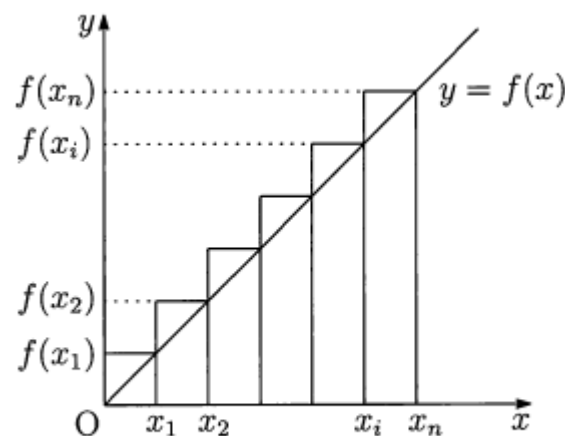


図 1.5: 直線 $y = x$ と区分求積

(2) $f(x) = x^2$ のとき, $f(x_i) = \frac{i^2}{\boxed{}}$ とかけ,

$$\sum_{i=1}^n i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 + n^2$$

$$= \frac{1}{6}n \left(n + \boxed{} \right) \left(\boxed{} + 1 \right)$$

とかけるから¹,

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\boxed{} + \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{\boxed{}}$$

を得る (図 1.6)。

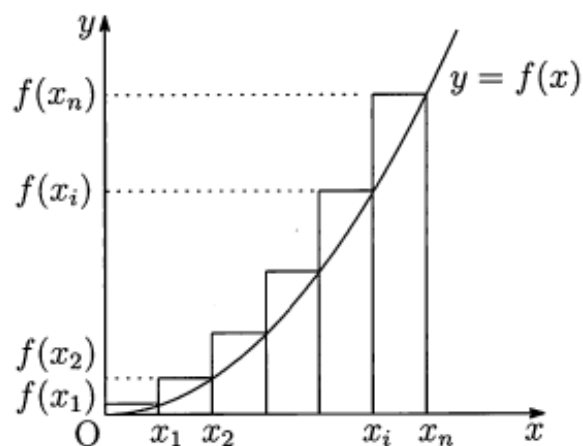


図 1.6: 放物線 $y = x^2$ と区分求積

(3) 下端 0, 上端 1 の関数 $f(x) = x$ の定積分は,

$$\int_0^1 x dx = \frac{1}{\boxed{}} \left[x^2 \right]_0^1 = \frac{1}{\boxed{}}$$

となり, これは (1) の S に一致している。

(4) 下端 0, 上端 1 の関数 $f(x) = x^2$ の定積分は,

$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{\boxed{}} \left[x^3 \right]_0^1 = \frac{1}{\boxed{}}$$

となり, これは (2) の S に一致している。

1.3 時間微分と時間積分

問題 9 x_0, v_0, a_0 をそれぞれ定数とし, C を積分定数とする。次の条件を満たす関数 $x(t)$ や $v(t)$ について, 時間微分や時間積分を行い, 下記空欄に x_0, v_0, a_0 のいずれか, または, 定数を書き込め。

$$(1) \quad x(t) = x_0 + v_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \boxed{}$$

$$(2) \quad v(t) = v_0 + a_0 t \quad \Rightarrow \quad \frac{dv(t)}{dt} = \boxed{}$$

$$(3) \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dx(t)}{dt} = \boxed{} + \boxed{} t$$

$$(4) \quad \frac{dv(t)}{dt} = a_0$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = \int \boxed{} dt = \boxed{} t + C$$

n を自然数, k を定数とし, $f(t), g(t)$ をそれぞれ t の関数とする。変数 t に関する微分を“時間微分”といい,

$$\text{I.} \quad \frac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$$

$$\text{II.} \quad \frac{d}{dt} \{k f(t)\} = k \frac{df(t)}{dt}$$

$$\text{III.} \quad \frac{d}{dt} \{f(t) + g(t)\} = \frac{df(t)}{dt} + \frac{dg(t)}{dt}$$

が成り立つ。また, 変数 t に関する積分を“時間積分”といい,

$$\text{IV.} \quad \int t^n dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$$

$$\text{V.} \quad \int \{k f(t)\} dt = k \int f(t) dt$$

$$\text{VI.} \quad \int \{f(t) + g(t)\} dt$$

$$= \int f(t) dt + \int g(t) dt$$

が成り立つ (C は積分定数である)。

$$(5) \quad \frac{dx(t)}{dt} = v_0$$

$$\Rightarrow x(t) = \int \boxed{} dt = \boxed{} t + C$$

$$(6) \quad \frac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0 t$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x(t) &= \int \left(\boxed{} + \boxed{} t \right) dt \\ &= \boxed{} t + \frac{1}{\boxed{}} a_0 t^2 + C \end{aligned}$$

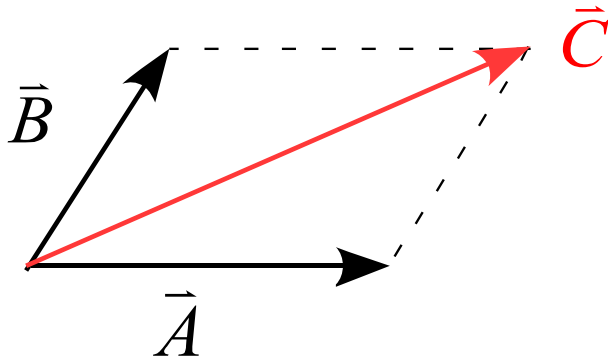
ベクトル

ベクトル

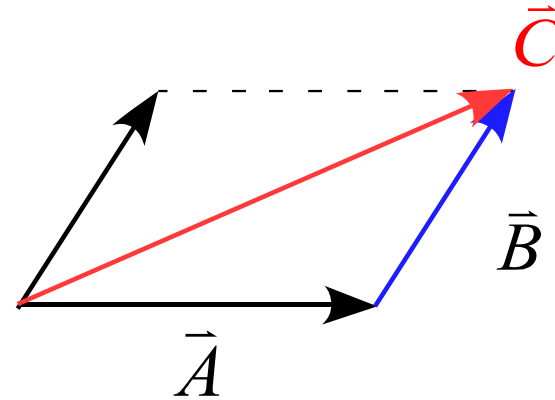
大きさ+向き

ベクトルの和

$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$$

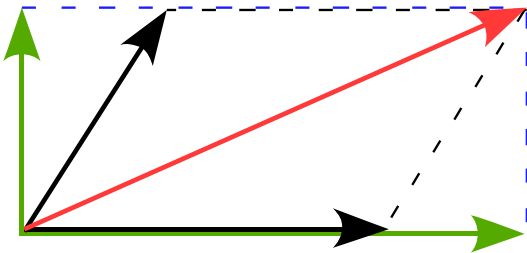


平行四辺形を作る



$\vec{B}$ を平行移動して考える

ベクトルの分解



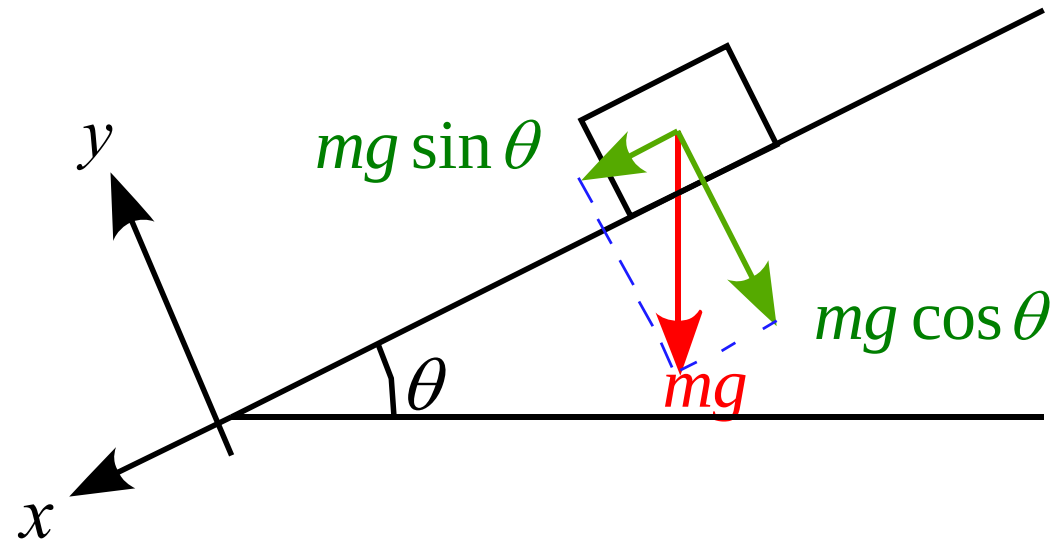
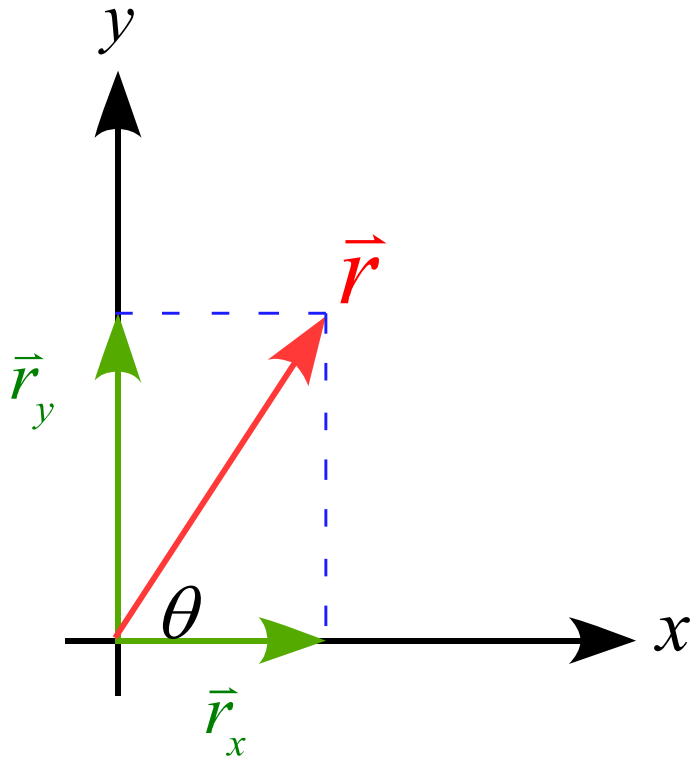
ベクトルの分解の仕方はたくさんある
合成して元に戻ればOK

ベクトル

ベクトルの分解

速度ベクトルの分解 力の分解

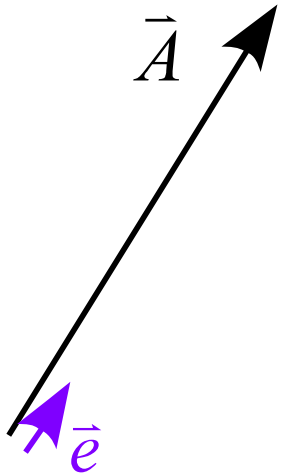
ベクトルの分解を分解して考えるケースは多い



ベクトル

単位ベクトル

大きさが 1 であるベクトル

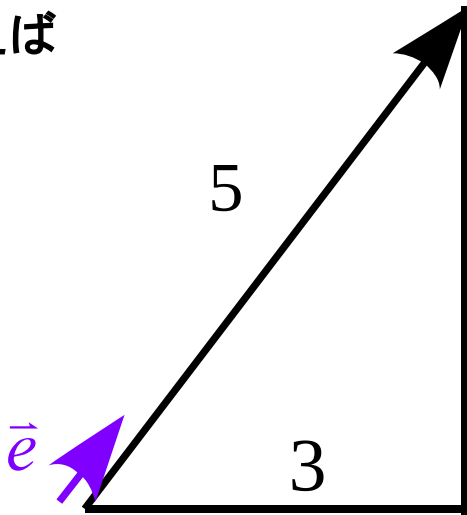


$\vec{A}$ の大きさは $|\vec{A}|$ と表す

向きは同じ、大きさは 1

$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

例えば

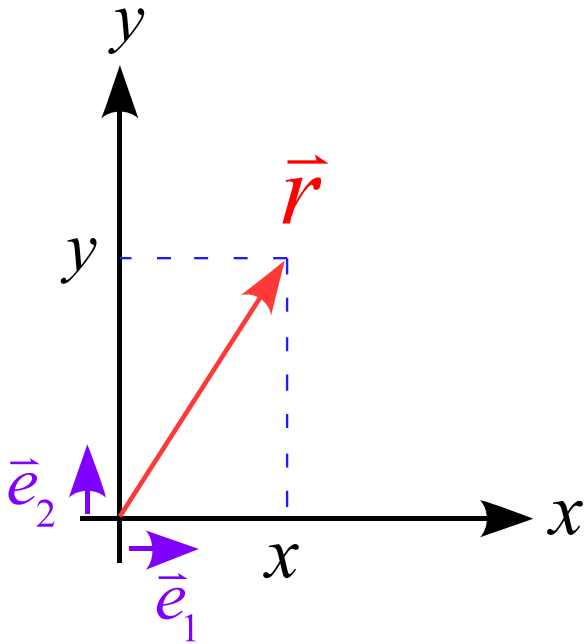


$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(3, 4)}{|5|} = \frac{1}{5}(3, 4)$$

ベクトル

単位ベクトル

2次元 直交座標



$$\vec{r} = (x, y) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

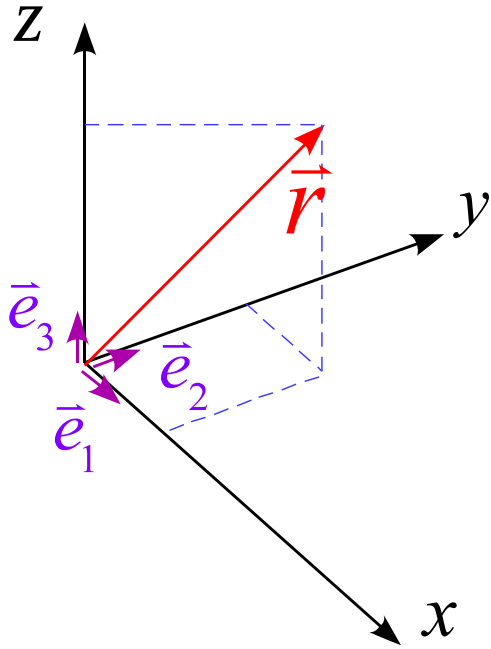
$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ベクトル

単位ベクトル

3次元 直交座標



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

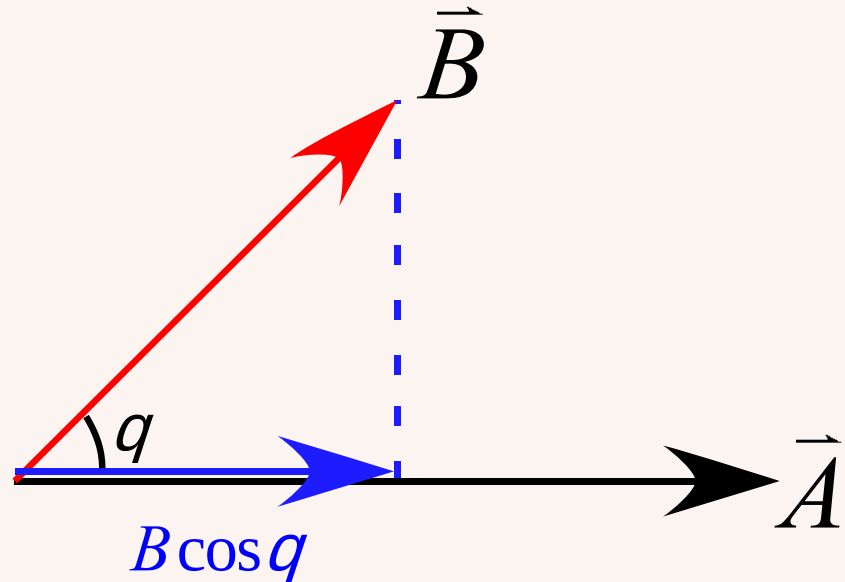
$$= x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

ベクトル～内積

ベクトルの内積

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta$$



これを3次元の直交座標系を考える

ベクトルの成分を

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z) \quad \vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$$

とし、それぞれの単位ベクトルを $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ とすると

ベクトル～内積

ベクトルはそれぞれ

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

となるので、ベクトルの内積は

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \left(A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \right) \cdot \left(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \right) \\ &= A_x \vec{i} \cdot B_x \vec{i} + A_x \vec{i} \cdot B_y \vec{j} + A_x \vec{i} \cdot B_z \vec{k} + \\ &\quad A_y \vec{j} \cdot B_x \vec{i} + A_y \vec{j} \cdot B_y \vec{j} + A_y \vec{j} \cdot B_z \vec{k} + \\ &\quad A_z \vec{k} \cdot B_x \vec{i} + A_z \vec{k} \cdot B_y \vec{j} + A_z \vec{k} \cdot B_z \vec{k}\end{aligned}$$

ベクトル～内積

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

が成立するので

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

となる

任意の2元

$$A = (A_1, A_2, \dots, A_n)$$

$$B = (B_1, B_2, \dots, B_n)$$

に対し

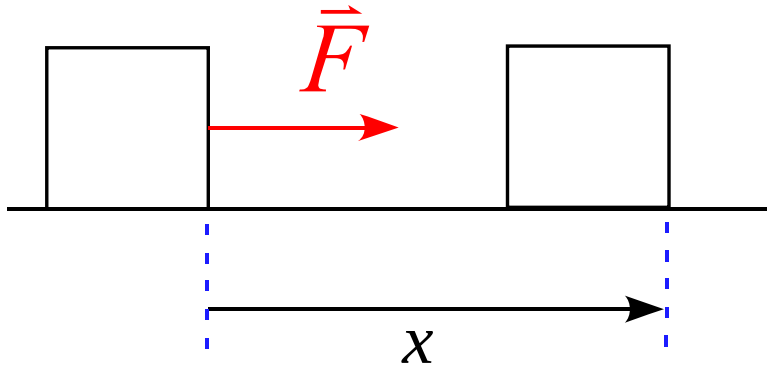
$$A \cdot B = \sum_{i=1}^n A_i B_i$$

それぞれの成分どうしをかけたものの和

ベクトル～内積

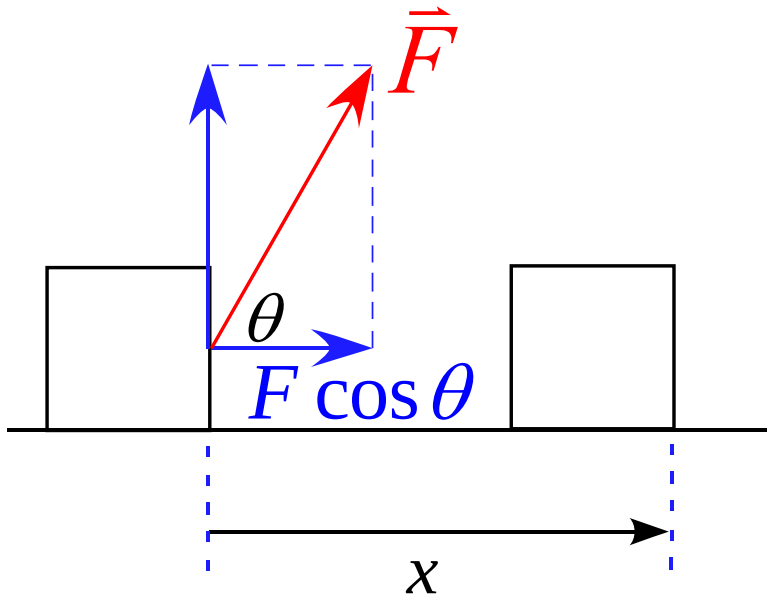
力学で何に使うのか？

仕事を考えるときに使う



仕事 = 力 × 移動距離

$$W = F \times x$$



$$\begin{aligned} W &= F \cos \theta \times x \\ &= Fx \cos \theta \end{aligned}$$

ベクトル～内積

一般化したい

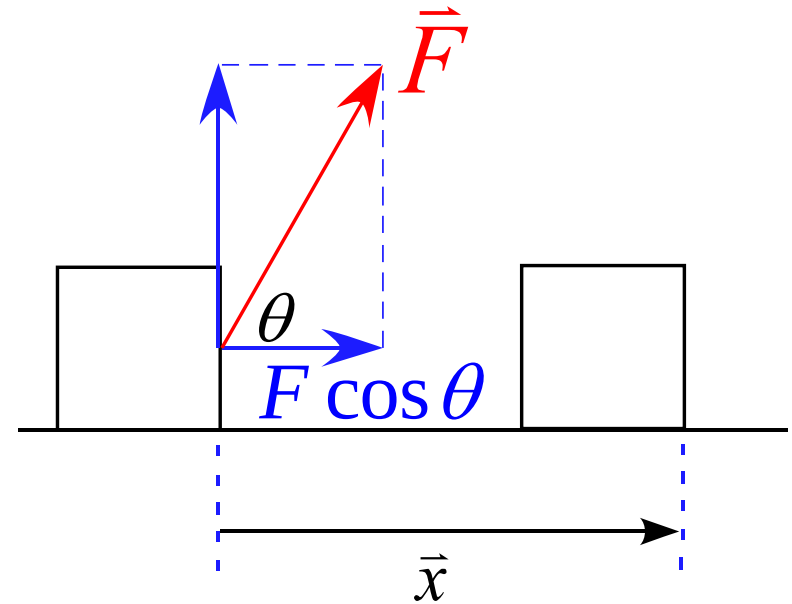
力も変位もベクトルだから
ベクトルを用いて表したい

$$\begin{aligned} W &= \vec{F} \cdot \vec{x} \\ &= |\vec{F}| |\vec{x}| \cos \theta \end{aligned}$$

力と変位が平行の場合は

$$\cos 0 = 1$$

なので $W = |\vec{F}| |\vec{x}|$



ベクトル～外積

ベクトルの外積

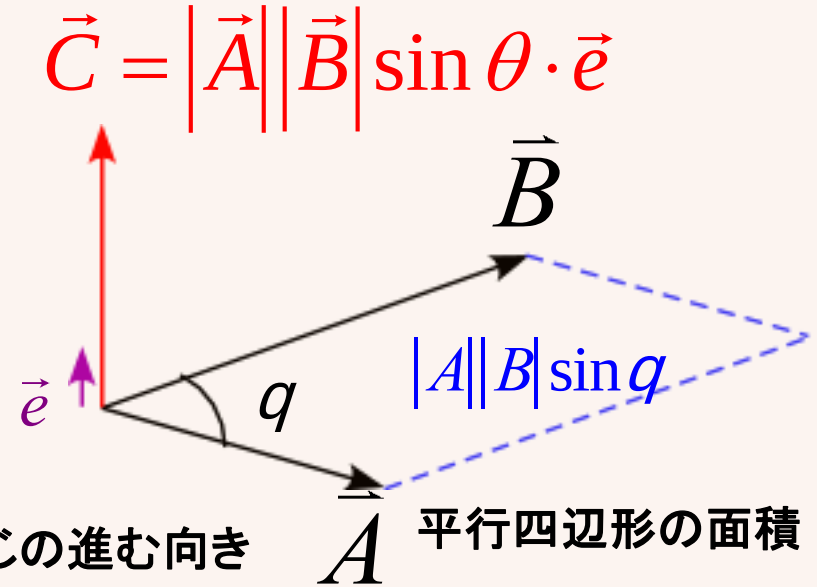
$$\vec{A} \times \vec{B}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta \cdot \vec{e}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

右ねじの進む向き

平行四辺形の面積



内積のときと同様に成分で考えてみると

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$$

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\begin{aligned}
 \vec{A} \times \vec{B} &= \left(A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k} \right) \times \left(B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k} \right) \\
 &= A_x \vec{i} \times B_x \vec{i} + A_x \vec{i} \times B_y \vec{j} + A_x \vec{i} \times B_z \vec{k} + \\
 &\quad A_y \vec{j} \times B_x \vec{i} + A_y \vec{j} \times B_y \vec{j} + A_y \vec{j} \times B_z \vec{k} + \\
 &\quad A_z \vec{k} \times B_x \vec{i} + A_z \vec{k} \times B_y \vec{j} + A_z \vec{k} \times B_z \vec{k}
 \end{aligned}$$

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}, \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

が成立するので

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k} \\ \vec{A} \times \vec{B} &= \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる

回転運動 (角運動量・力のモーメント)

電磁気学

などで使う

ベクトル～座標系

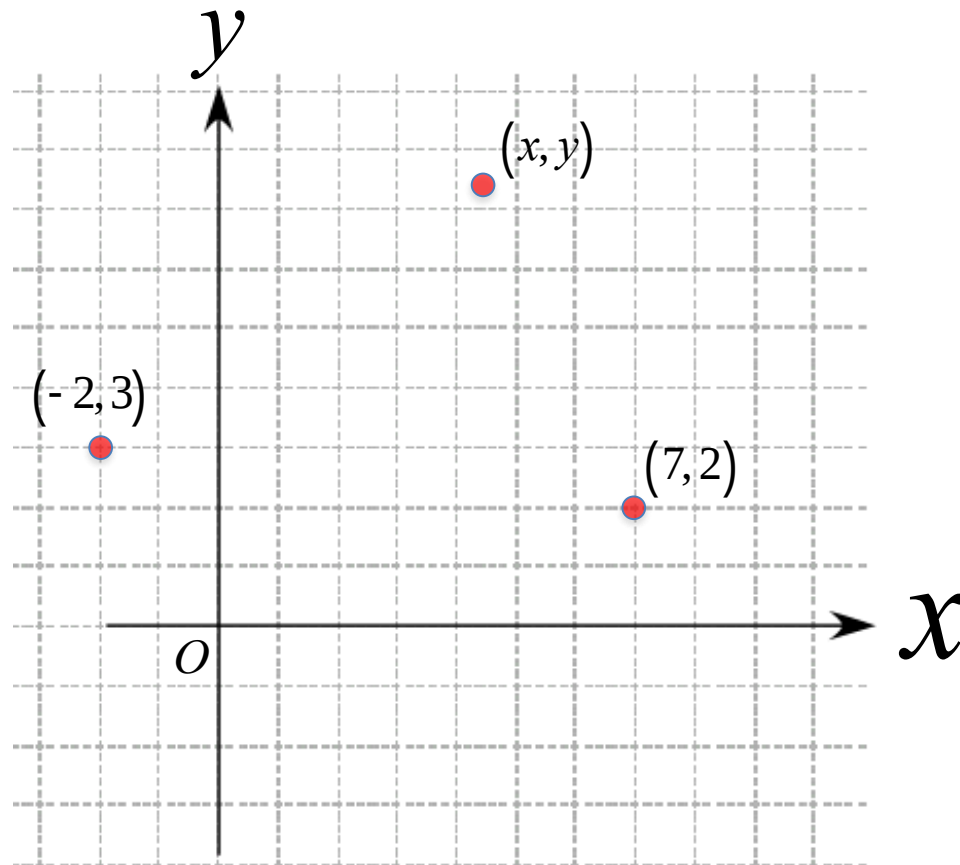
空間内の位置を特定するための座標系は3数の要素で構成される

- 1.基準点 O (原点)
- 2.適当な尺度で標識を目盛った1組の座標軸 (x, y – 2次元)
- 3.原点及び座標軸に対して空間内の点をどのように表記するかという約束

座標系

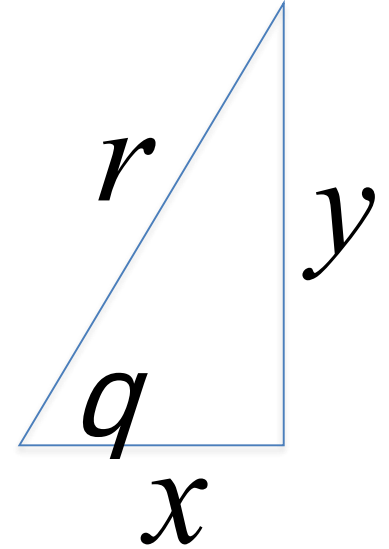
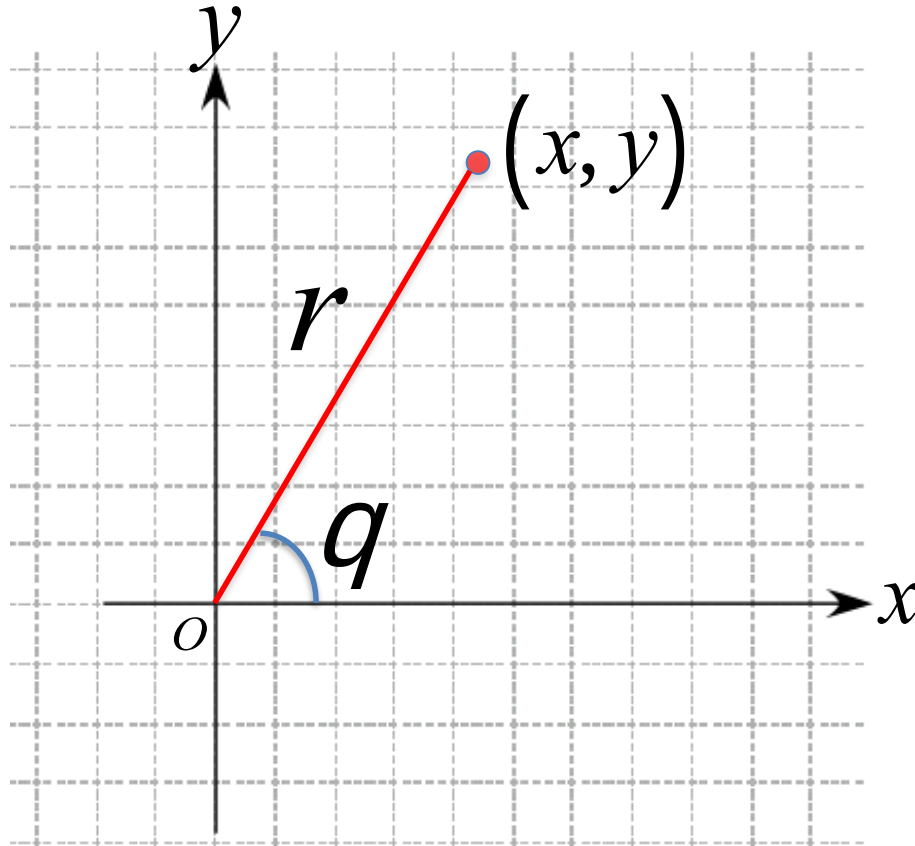
- ・デカルト座標系 (直角座標系)
- ・極座標系

例 (2次元)
直角座標系



座標系～極座標系

例 (2次元)
極座標系



直角座標系で表すと

$$x = r \cos q$$

$$y = r \sin q$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin q = \frac{y}{r}$$

$$\cos q = \frac{x}{r}$$

$$\tan q = \frac{y}{x}$$

ベクトルとスカラー

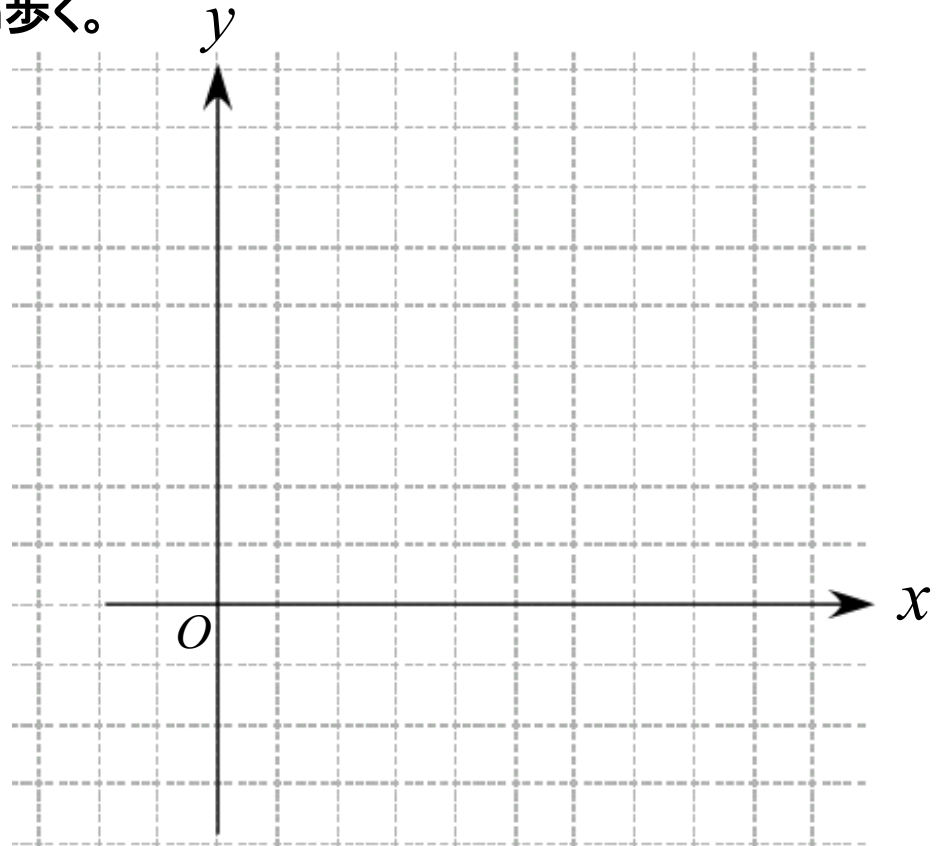
ベクトルとスカラー

ベクトル: 大きさと向き (変位、速度)

スカラー: 大きさのみ (距離、速さ)

例題

ある歩行者が東に7km及び北に4km歩く。
合成変位を作図し、大きさを求めよ。
(1目盛は1km)



2.2.1 力の平行四辺形の法則

問題 6 水平でなめらかな円卓上に置かれた, 同じばね定数の三本のばね A, B, C を糸を介して一点で結び合わせた。ばねの連結点 O には, ばね A, B, C の向きに, 順に $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{F}_C$ なる力が働くとする。1 個当たりのばねの伸びが 1.63 cm となる質量のおもりを用いる場合について⁴, 次の問いに答え, 空欄には値 (小数点第 2 位まで) を書き込め。

(1) どの 2 つのばねも 120° をなすように滑車を介して三個ずつのおもりを取り付けたら, いずれのばねも静止した。それぞれのばねののびを図 2.9 の空欄に記入し, $\vec{F}_C$ を下図に作図せよ。

平面内の二力 $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$ を一点 O に加えたときに生じる“合力”は, これらを隣り合う二辺とする平行四辺形の対角線に大きさが等しく, O からその対角に向けた力に等しい (下図の $\vec{F}$)。これを“力の平行四辺形の法則”という。

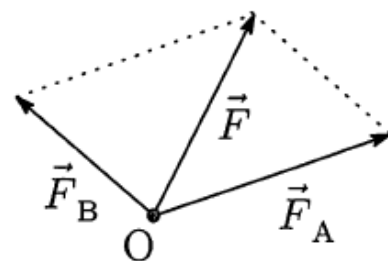


図 2.8: 力の平行四辺形の法則

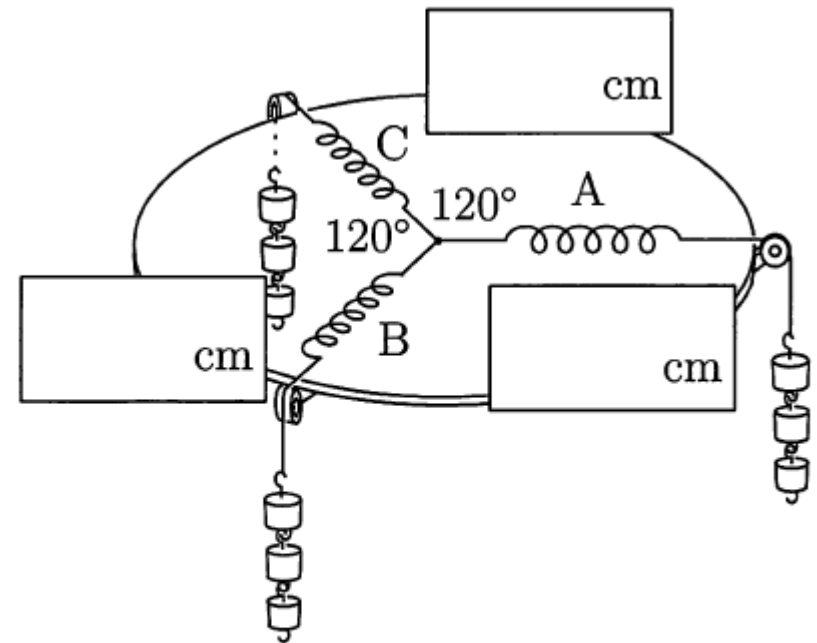
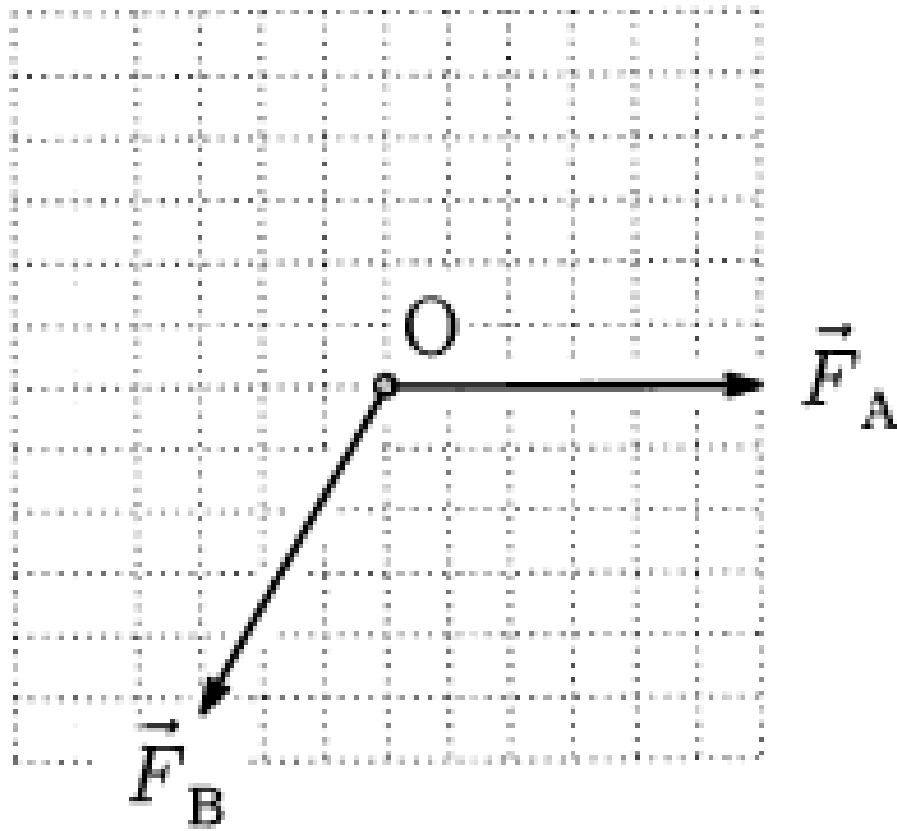


図 2.9: 等方的に引かれた水平面上の
3つのばねののび

(2) ばね A, B, C に取り付けるおもりの個数をそれぞれ 3, 4, 5 個とし, ばね A と B のなす角を 90° に保ち, かつ, ばね C を特定の方角に向けたら, いずれのばねも静止した。それぞれのばねののびを図 2.10 の空欄に記入し, $\vec{F}_C$ を下図に作図せよ。

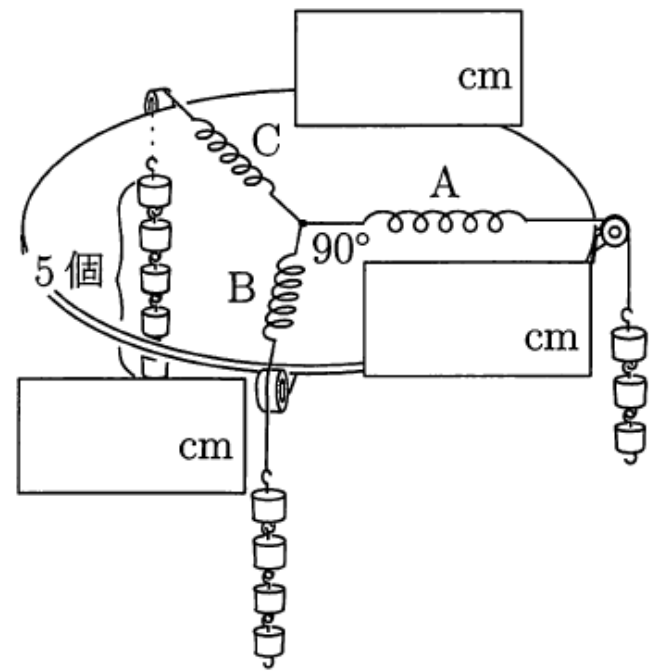
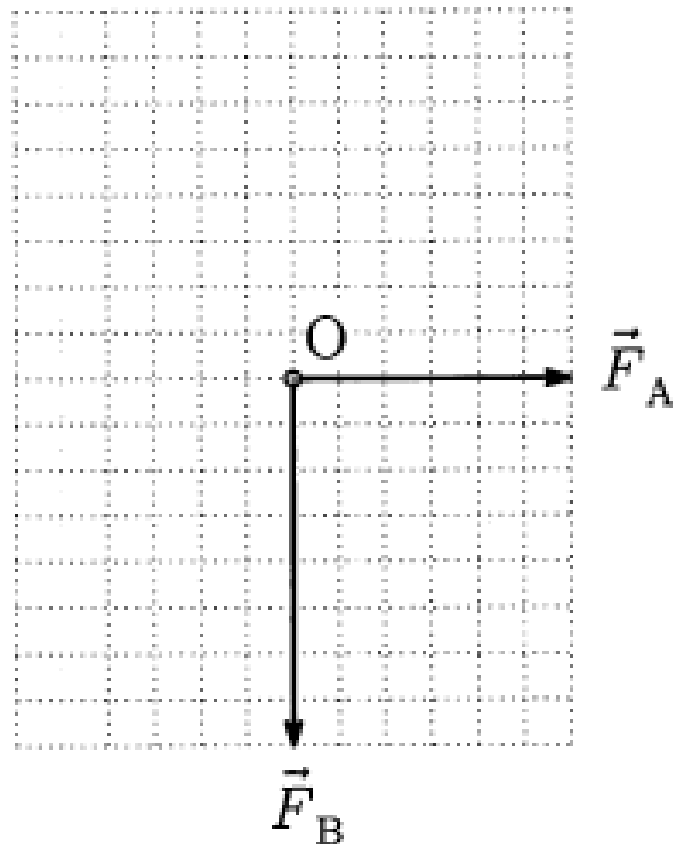


図 2.10: 水平面上の 3 つのばねののび

問題 7 水平な円卓上に置かれた, 同じばね定数の三本のばねをそれぞれ A, B, C とし, これらを糸を介して一点で結び合わせた。

ここで, ばね A とばね B の他端には, 滑車を介して1個当たり 20.1g のおもりを三個ずつ取り付けた。これらのばねのなす角を 60° とし (図 2.11), ばね C には質量 $x[\text{g}]$ のおもりを吊り下げたところ, いずれのばねも静止した。糸の質量は無視できるとするとき, 次の問いに答えよ。

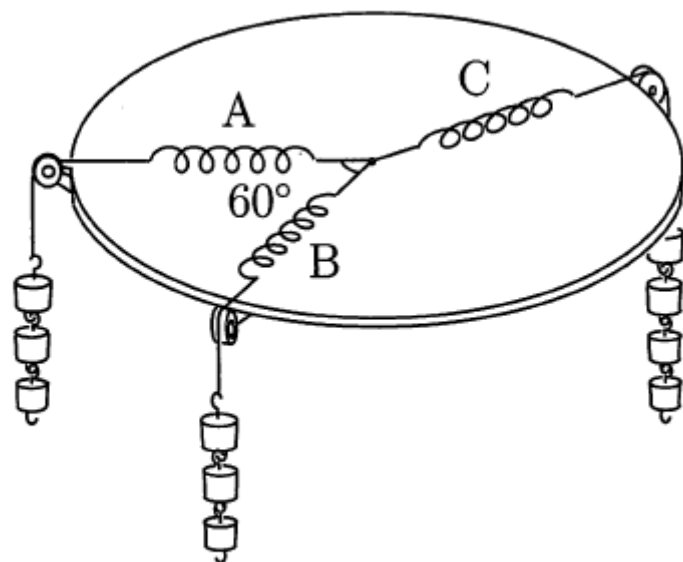


図 2.11: 円卓上の3つのばねののび

(1) 平面内の点 O に、ばね A, B による図 2.12 の二力 $\vec{F}_A, \vec{F}_B$ が働くとする。点 O が始点とするとき、同図内にばね C による力 $\vec{F}_C$ を描き込め。

(2) 図 2.12 より、 $\vec{F}_C$ の大きさ、 $|\vec{F}_C|$ は、

$$|\vec{F}_C| = \boxed{} |\vec{F}_A| = \boxed{} |\vec{F}_B|$$

とかける。上記空欄に値(実数)を書き込め。

(3) $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_B| = \boxed{} [\text{g 重}]$ だから、 $\sqrt{3} \approx 1.73$ とすると、(2) より、 $|\vec{F}_C| = \boxed{} [\text{g 重}]$ を得る。すなわち、 $x = \boxed{} [\text{g}]$ である。上記空欄に値(有効数字3桁)を書き込め。

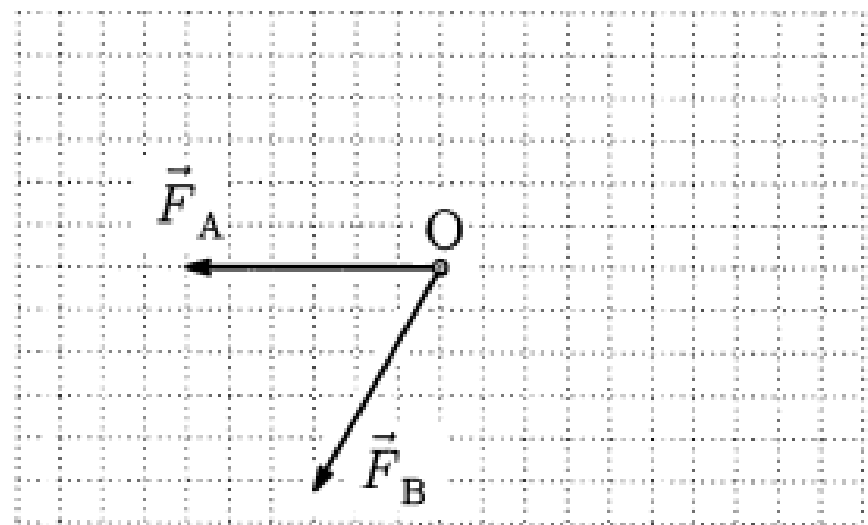


図 2.12: 水平面内における三つの力

位置ベクトル

位置

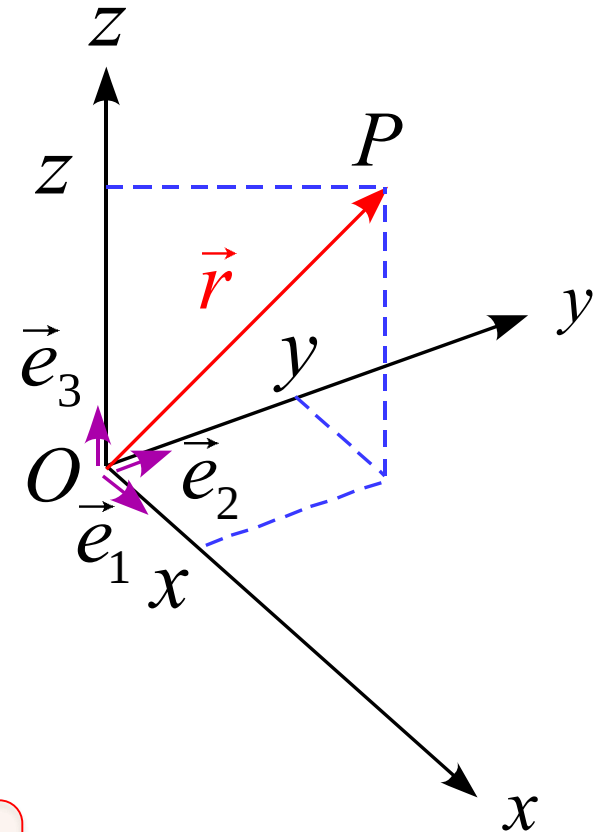
観測者 O に対する (O を始点とする)

物体 P の位置ベクトル

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

この座標系は、観測者 O に対する
相対座標系となる

3次元の運動を考えるときは
このベクトルが時刻 t の関数として追跡する



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$$

位置ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

速度・加速度～速さ

物理では・・・時間変化が重要

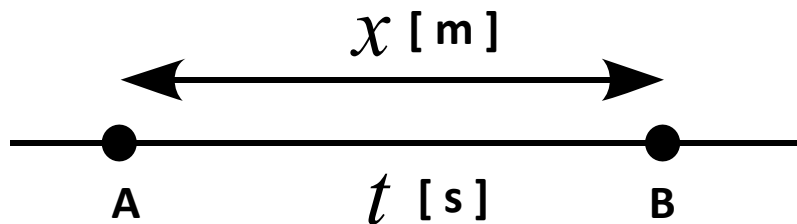
例えば

物が動く・・・

速さ、速度
加速度

が知りたい

平均の速さ： 目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか
「平均するとどの程度の速さです～っと走り続けたのと同じか」

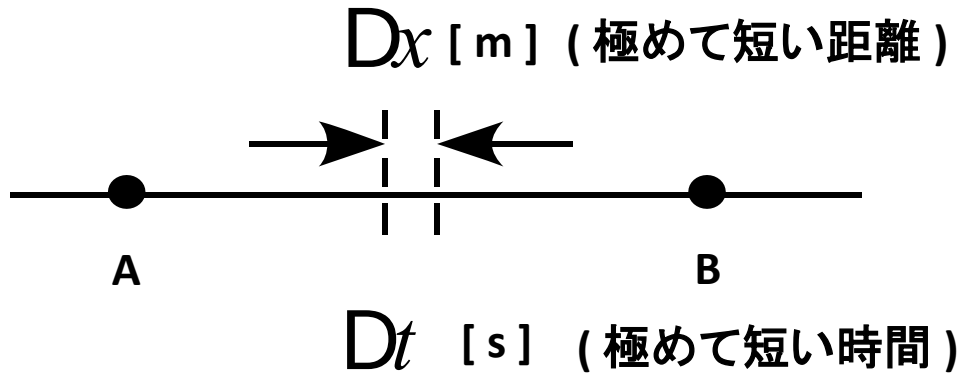


平均の速さ

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \quad [\text{m/s}]$$

速さ

瞬間の速さ : ある時点での「スピード」のこと



瞬間の速さ

$$v = \frac{Dx}{Dt} \quad [\text{m/s}]$$

速さ～速度

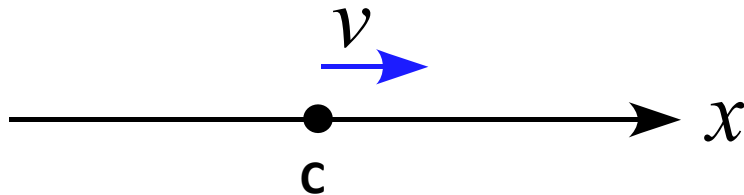
速度＝速さ＋向き ←ベクトル

物理学では
大きさも向きも大事

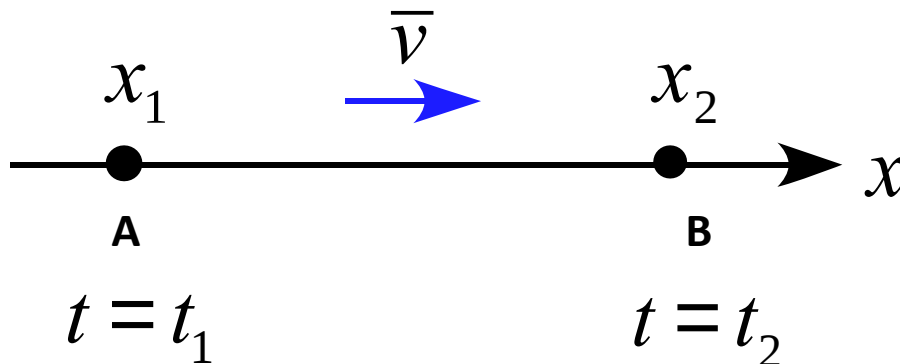
例

5 [m/s]の速さで走っている（どっち向きかわからない）

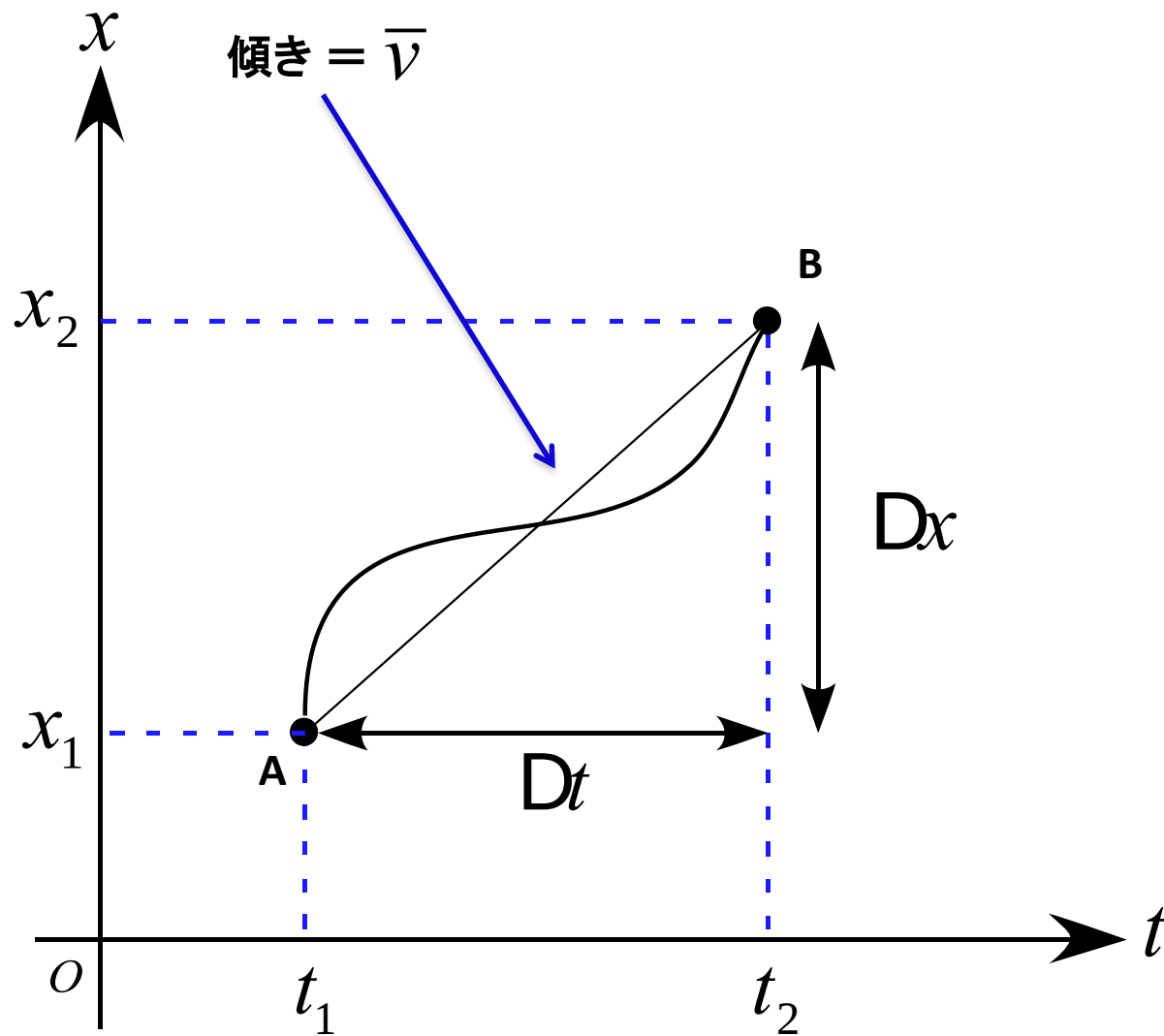
5 [m/s]の速度で走っている（ある特定の向きに走っている＝向きが決まっている）



平均速度：時間 t に対する変位 x の変化



質点の位置 - 時間の関係



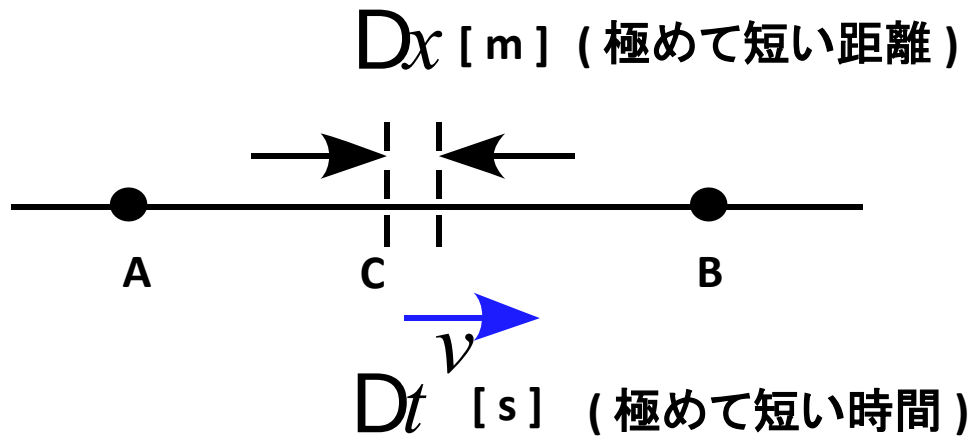
平均速度

平均速度

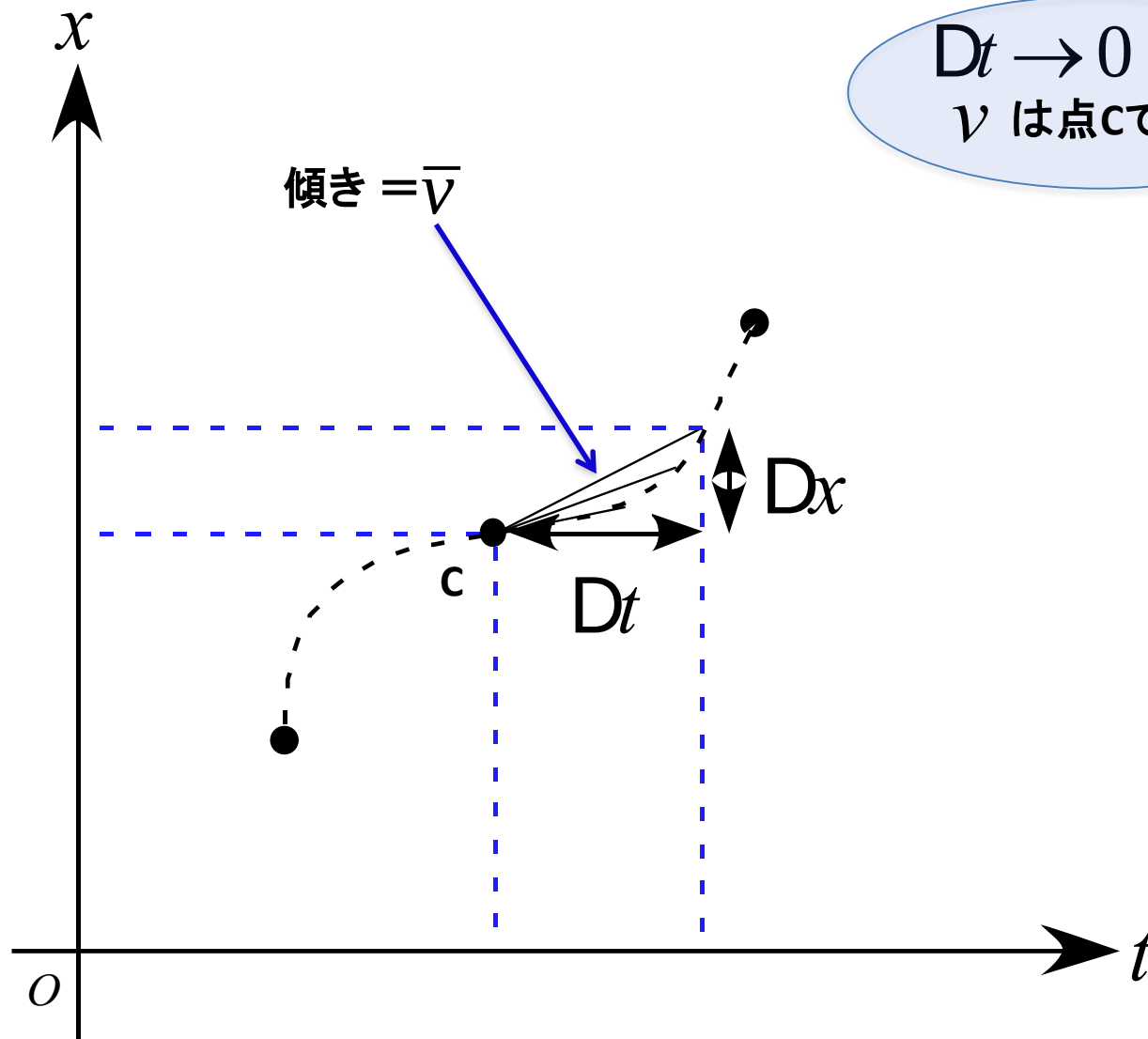
$$\bar{v} = \frac{Dx}{Dt} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

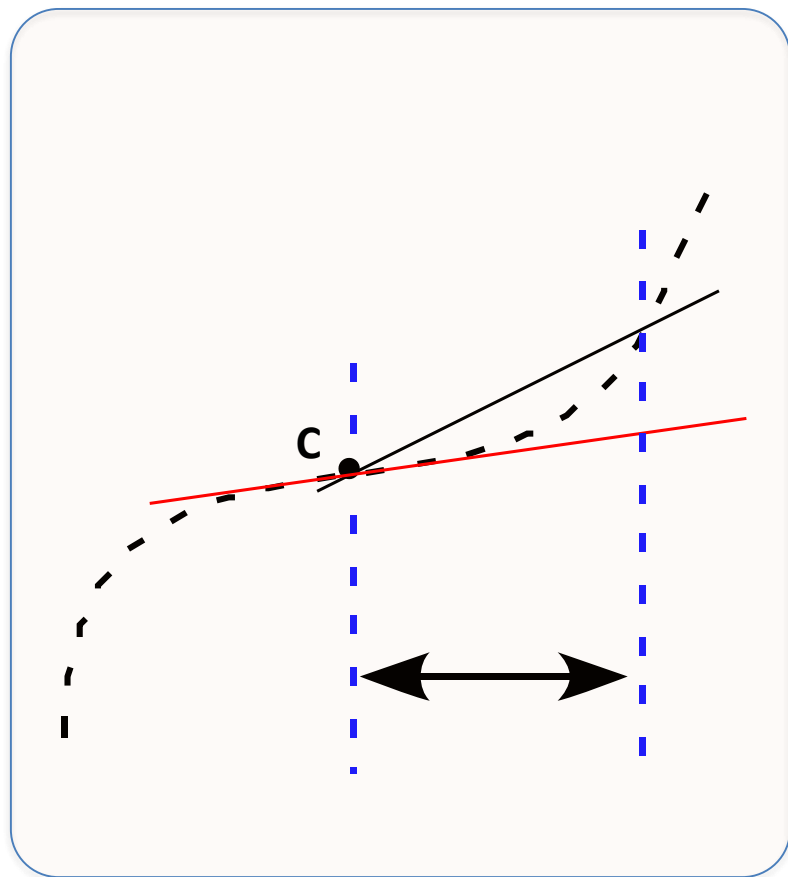
瞬間速度

瞬間速度

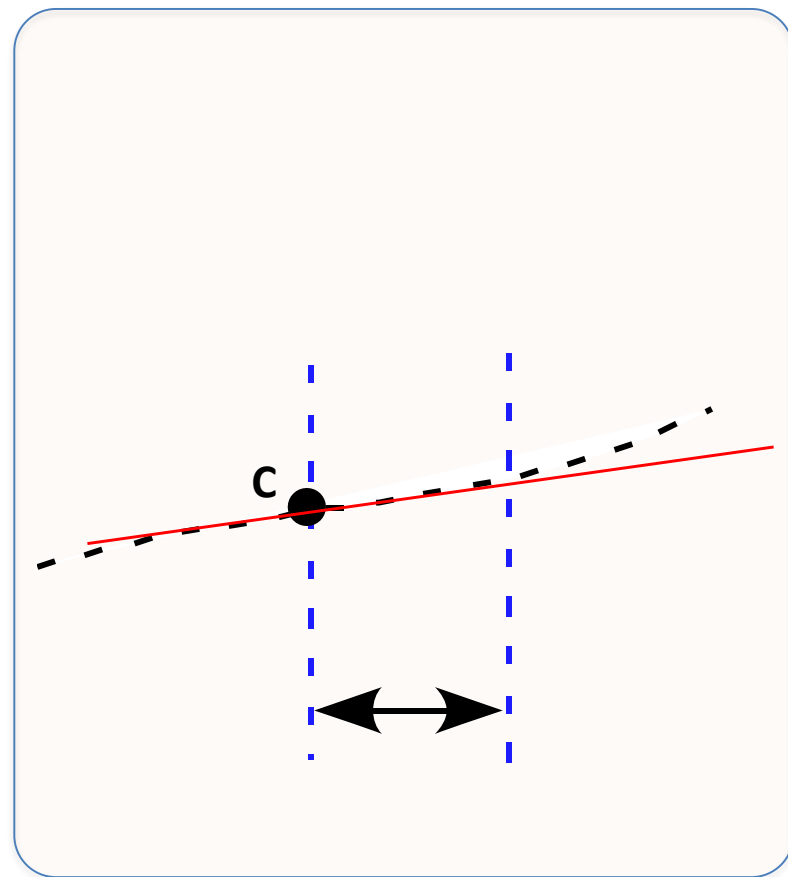


質点の位置 - 時間の関係





拡大



$Dt \rightarrow 0$ で
 ν は点Cでの接線

速度～瞬間速度

瞬間速度

$$v = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dx}{Dt} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{x(t + Dt) - x(t)}{Dt} = \frac{dx}{dt}$$

変位



速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点 $t_1 = 1[s]$ のとき $x_1 = 14 [m]$ の位置にあり、

$t_2 = 3[s]$ のとき $x_2 = 4 [m]$ の位置にある。

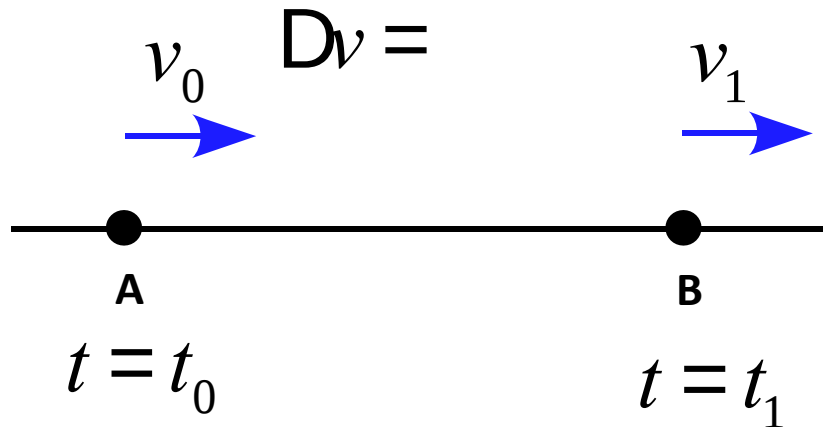
この時間における変位と平均速度を求めよ。

加速度

加速度: どれくらいの時間をかけて、どれくらい速度が変化するかの度合い

時間に対する速度変化率

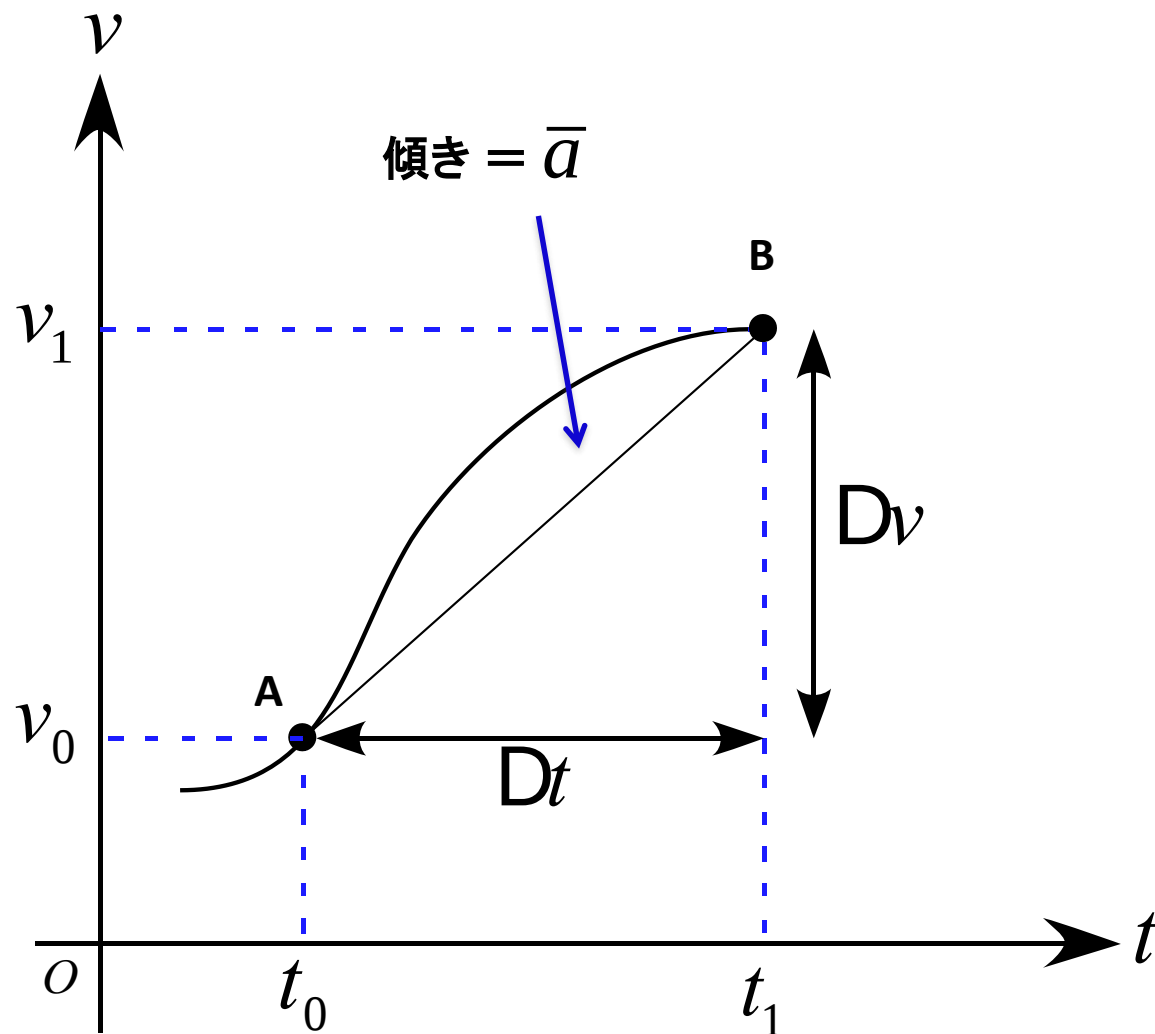
平均加速度



平均加速度

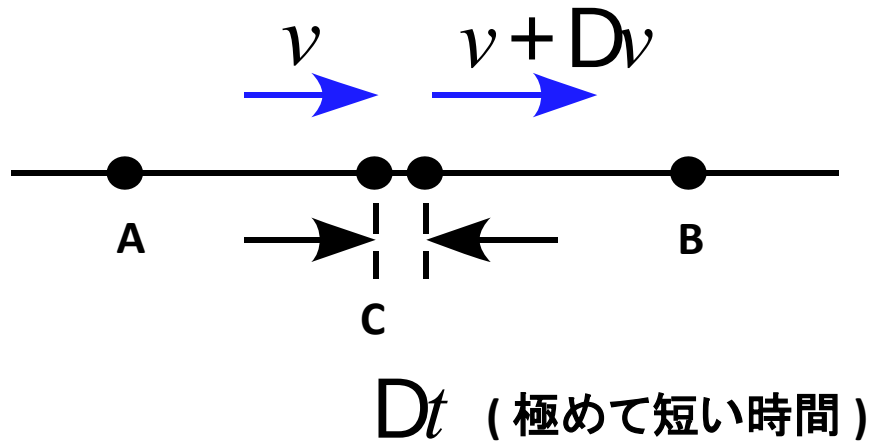
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{Dv}{Dt}$$

質点の速度 - 時間の関係

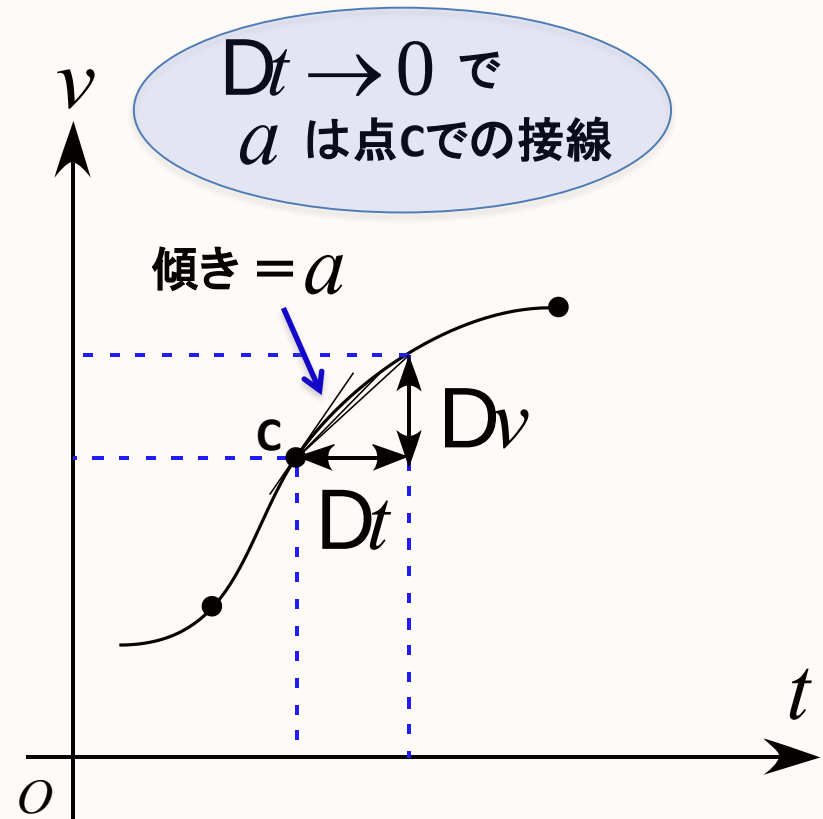


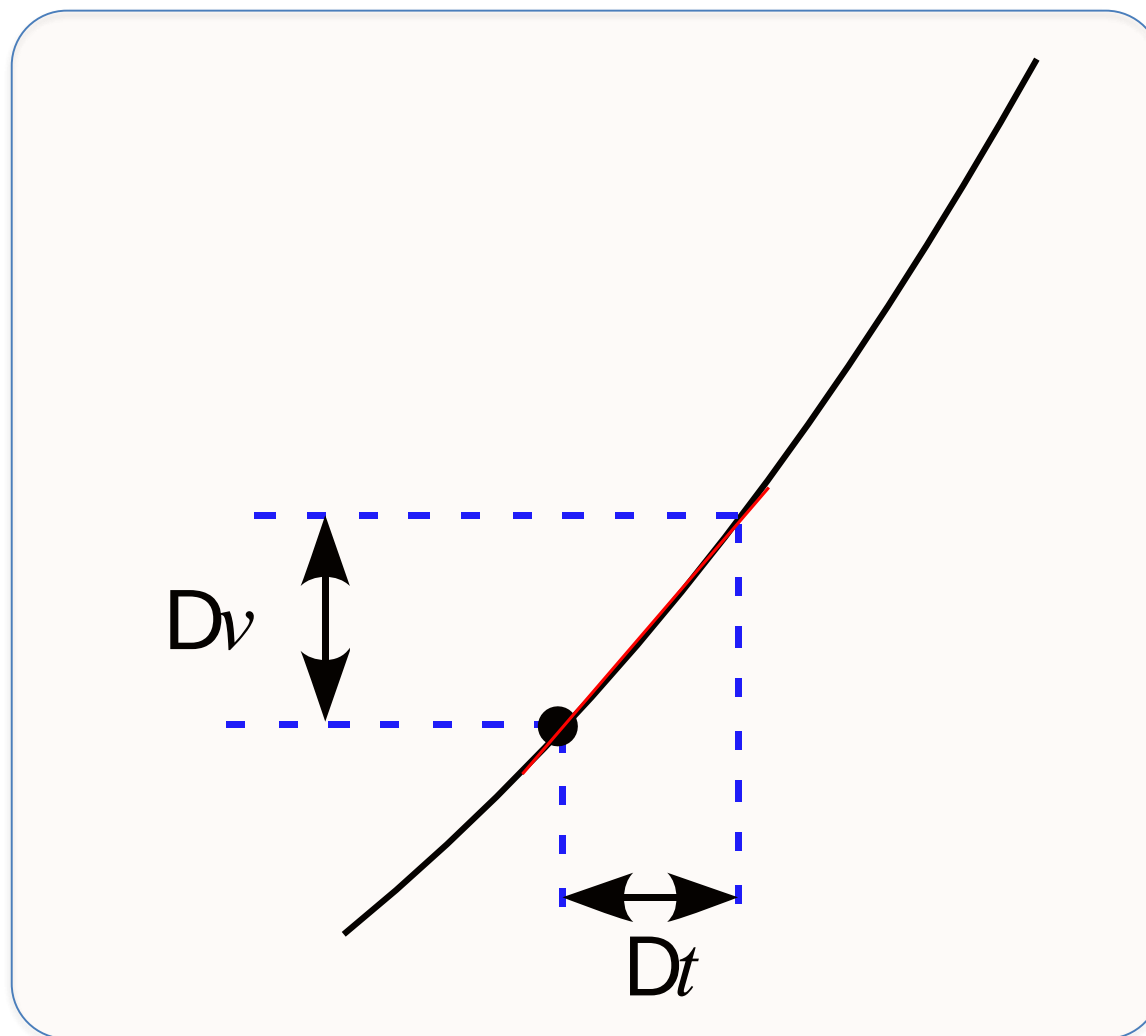
加速度～瞬間加速度

瞬間の加速度（単に「加速度」）



質点の速度－時間の関係





瞬間加速度

瞬間加速度

速度変化

$$a = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{(v + Dv) - v}{Dt} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dv}{Dt} = \frac{dv}{dt}$$

v は t の関数であると考えると

$$a = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dv}{Dt} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{v(t + Dt) - v(t)}{Dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2回微分する

加速度

それぞれ何を意味するか考えよう

$$a > 0$$

加速する

$$a < 0$$

減速する(ブレーキをかける)

逆向きに走っているという意味ではない

加速度～例題

例題

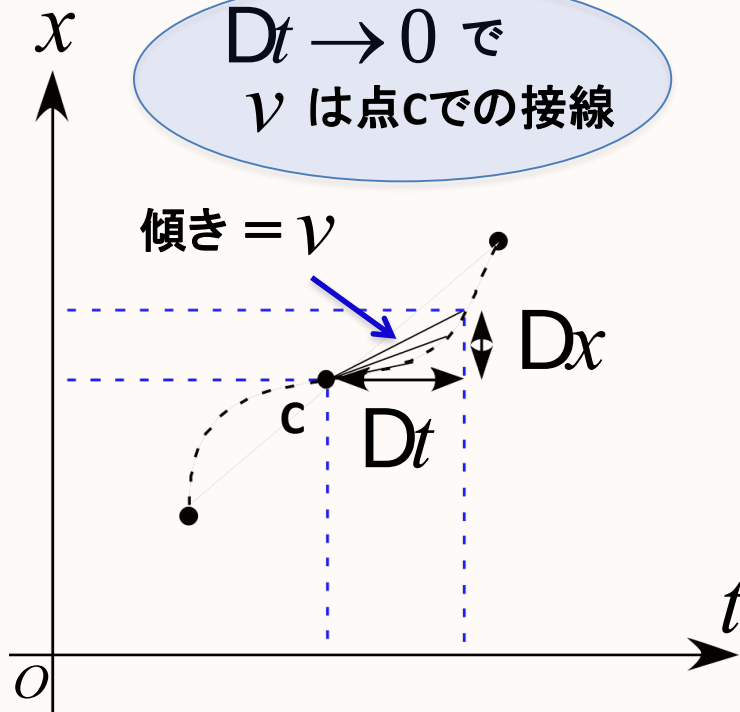
x 軸に沿って運動する質点が $v = 5 + 10t$ [m / s] に従って運動する。
この質点は $t = 0$ [s] における位置は 20 [m] である。

1. 加速度を時間 t の関数として表せ。
2. $t = 0$ における質点の速度を求めよ。
3. 位置を t の関数として表せ。

速度～まとめ

速度

質点の位置 - 時間の関係



変位の時間変化率

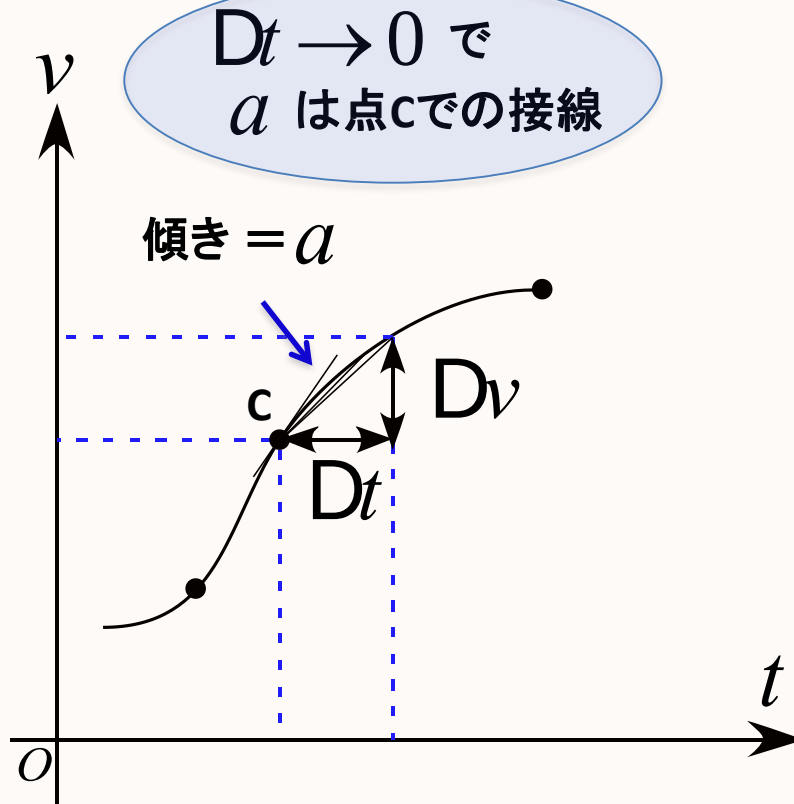
$$v = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dx}{Dt} = \frac{dx}{dt}$$

変位 x を時間 t で微分したもの

加速度～まとめ

加速度

質点の速度－時間の関係



速度の時間変化率

$$a = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dv}{Dt} = \frac{dv}{dt}$$

速度 v を時間 t で微分したもの

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dz}{dt} \vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_3$$

と表すことができる

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + Dt) - \vec{r}(t)}{Dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

変位ベクトルの時間変化率

$$\vec{a} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + Dt) - \vec{v}(t)}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

速度ベクトルの時間変化率

となる