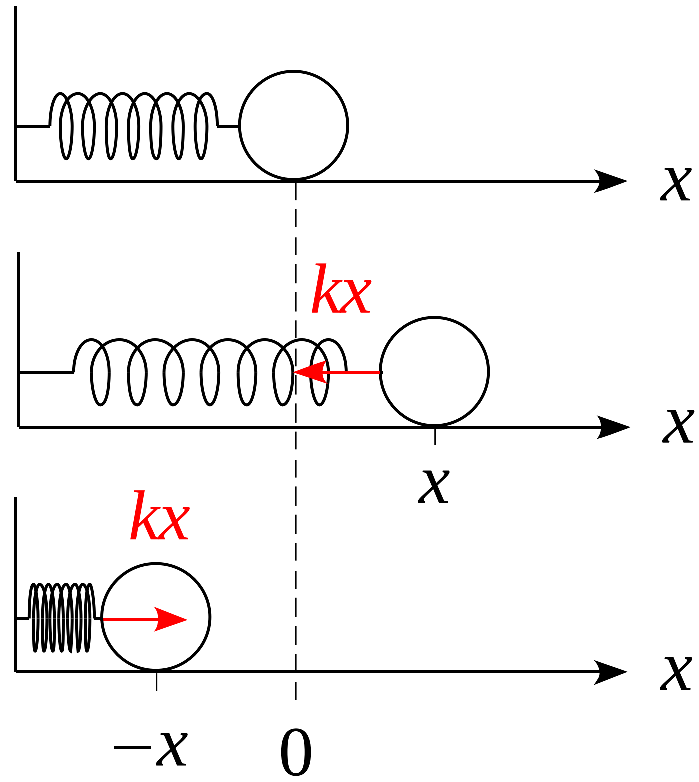
振動～単振動

単振動(調和振動)のモデル

バネの復元力

$$\vec{f}_s = -k\vec{x}$$ フックの法則



運動方程式

$$m\vec{a} = -k\vec{x}$$

$$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$

$$\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m}\vec{x}$$

ここで、$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

振動～単振動

2回微分したら
符号が逆になって元に戻る

三角関数 ➡ sin cos

この微分方程式の解は一般に

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

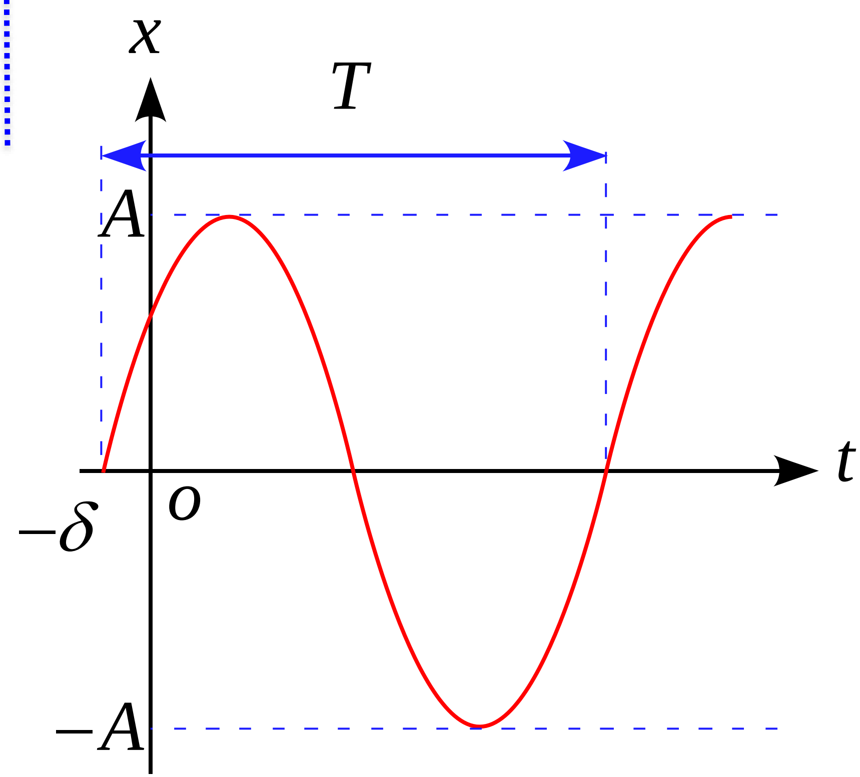
角振動数 (ω)　初期位相 (δ)

と書ける。

周期 T は

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$



振動～単振動

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \delta)}$$

初期条件

$t = 0$ で、$x = 0, \delta = 0$ とすると

$$x(t) = A\sin\omega t$$

と表すことができる。

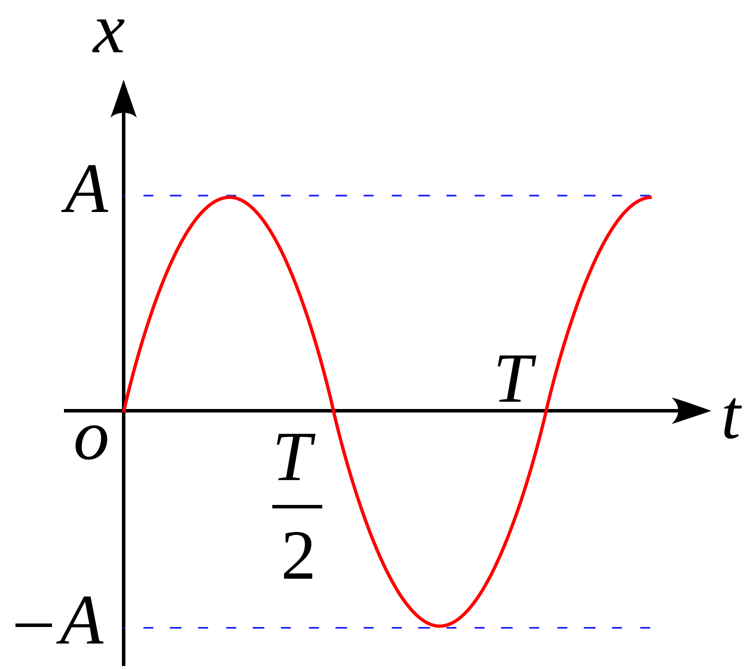
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\sin\omega t\right]$$

$$= A\omega\cos\omega t$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\omega\cos\omega t\right]$$

$$= -A\omega^2\sin\omega t$$

$$= -\omega^2 x$$



$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

振動～初期条件

単振動の初期条件

単振動では2つの初期条件が
必要になる

$$x = A\sin(\omega t + \delta)\ ,\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

定数

A： 振幅

δ： 初期位相

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left[A\sin(\omega t + \delta)\right]$$

$$= A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

例えば

$t = 0$ で、$x = x_0, v = v_0$ とすると

$$x(0) = A\sin(\omega \cdot 0 + \delta) = x_0$$

$$A\sin\delta = x_0$$

$$v(0) = A\omega\cos(\omega \cdot 0 + \delta) = v_0$$

$$A\omega\cos\delta = v_0$$

振動～初期条件

よって

$$A\sin\delta = x_0 \qquad A^2\sin^2\delta = x_0^2$$

$$A\cos\delta = \frac{v_0}{\omega} \qquad A^2\cos^2\delta = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

和を取ると

$$A^2\sin^2\delta + A^2\cos^2\delta = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$A^2\left(\sin^2\delta + \cos^2\delta\right) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

よって

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}$$

振動～初期条件

比を取ると

$$A\sin\delta = x_0$$

$$A\cos\delta = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\frac{A\sin\delta}{A\cos\delta} = \frac{x_0}{\frac{v_0}{\omega}}$$

$$\tan\delta = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)$$

まとめると

$$\boxed{A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2} \qquad \delta = \tan^{-1}\left(\frac{\omega x_0}{v_0}\right)}$$

と表される。

力学基礎演習

4.6 単振動
問題23　39ページ

単振動～例題

例題

単振動の一般解 $x(t) = A\sin\left(\omega t + \phi\right)$ **において、**

以下の初期条件を満たすような $x(t)$ **を求めよ。**

1. $x(0) = 0, v(0) = v_0$

2. $x(0) = x_0, v(0) = 0$

3. $x(0) = x_0, v(0) = v_0$

4. $x(t_1) = x_0, v(t_1) = 0$

単振動～微分方程式

2階の線形微分方程式を解く

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

解を $x = e^{\lambda t}$ とおくと

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\lambda e^{\lambda t}\right)$$

$$= \lambda^2 e^{\lambda t}$$

よって、

$$\lambda^2 e^{\lambda t} = -\frac{k}{m}e^{\lambda t}$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m}e^{\lambda t} = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0}$$

微分方程式の**特性方程式**

この式を満たす λ が存在すれば
$x = e^{\lambda t}$ がこの微分方程式の解である
ことを示している。

単振動～微分方程式

この特性方程式の解は

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} = \omega$$

$$\lambda = \pm\sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

解は2つ存在

従って、この2つの解は

$$x_1 = e^{i\omega t}$$

$$x_2 = e^{-i\omega t}$$

と書ける。

単振動～微分方程式

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

この2解の和や定数倍したものも解となる。
従って、

$$
\begin{aligned}
x &= ax_1 + bx_2 \\
&= ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} \\
&= a\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + b\left[\cos\left(-\omega t\right) + i\sin\left(-\omega t\right)\right] \\
&= a\left(\cos\omega t + i\sin\omega t\right) + b\left(\cos\omega t - i\sin\omega t\right) \\
&= \left(a+b\right)\cos\omega t + i\left(a-b\right)\sin\omega t \\
&= \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t \\
&= \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sin\left(\omega t+\delta\right) \\
&= A\sin\left(\omega t+\delta\right)
\end{aligned}
$$

$$\alpha = a + b$$

$$\beta = i\left(a-b\right)$$

$$A = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

単振動～エネルギー

バネの弾性力による位置エネルギー

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = -\int kxdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = -\int kxdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = -\int kxdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt + \int kxdx = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = C$$

C は積分定数

従って、運動エネルギーと
バネの弾性力による位置エネルギーの和が
一定の値になることを表している。

単振動～運動エネルギー

運動エネルギー $K(t)$ は

$$K(t)=\frac{1}{2}mv^2$$
$$=\frac{1}{2}m\left[A\omega\cos\left(\omega t+\delta\right)\right]^2$$
$$=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\cos^2\left(\omega t+\delta\right)$$

一般解

$$x(t)=A\sin\left(\omega t+\delta\right)$$
$$v=\frac{dx}{dt}$$
$$=\frac{d}{dt}\left[A\sin\left(\omega t+\delta\right)\right]$$
$$=A\omega\cos\left(\omega t+\delta\right)$$

単振動～位置エネルギー

一般解

$$x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

バネの弾性力による位置エネルギー $U_s(t)$ は

$$U_s(t) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$= \frac{1}{2}k\left[A\sin\left(\omega t + \delta\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(m\omega^2\right)A^2\sin^2\left(\omega t + \delta\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\omega^2 A^2\sin^2\left(\omega t + \delta\right)$$

単振動～力学的エネルギー

従って、力学的エネルギー $E(t)$ は

$$E(t) = K(t) + U_s(t)$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2\left(\omega t + \delta\right) + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2\left(\omega t + \delta\right)$$

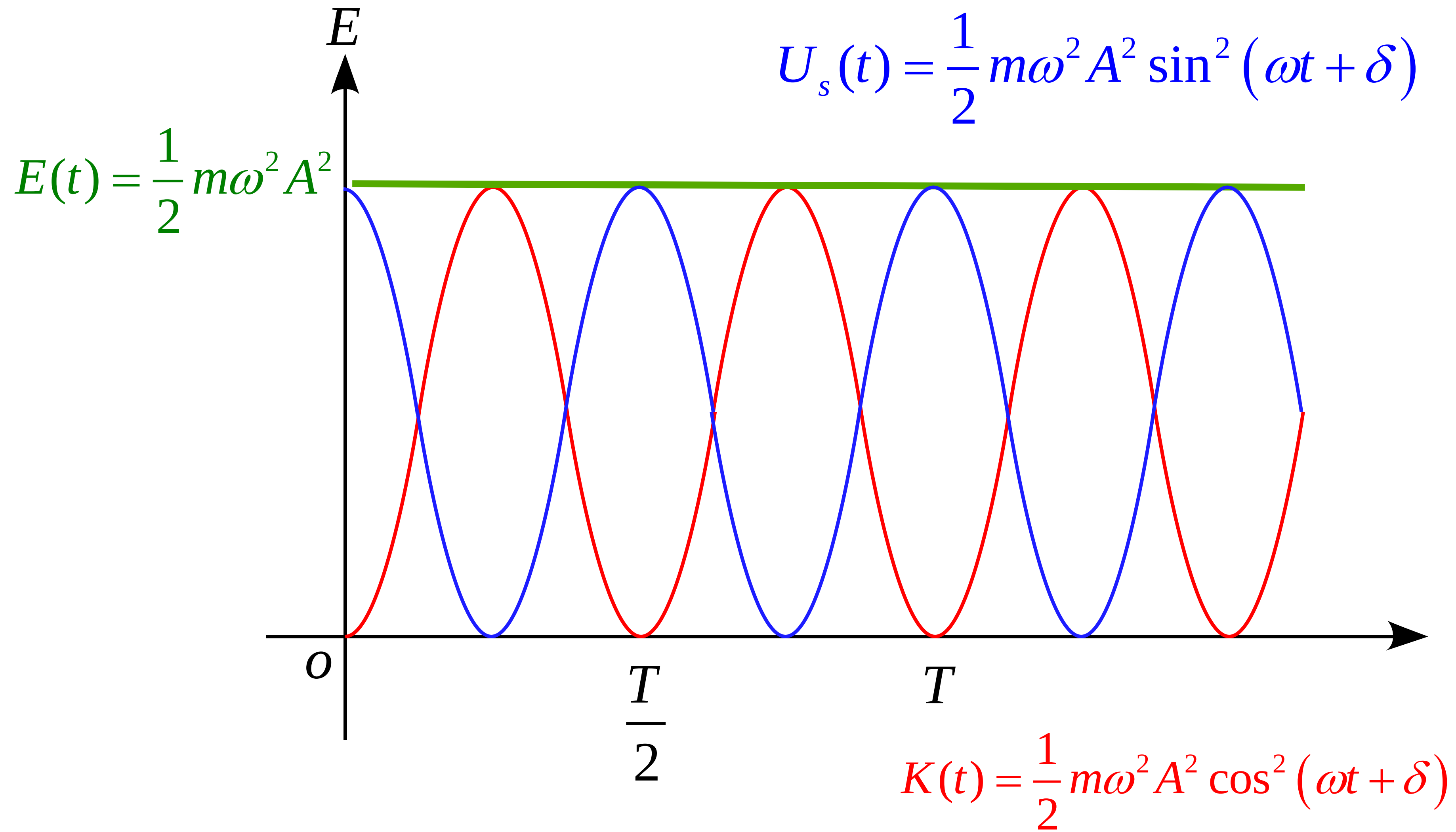
$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \left[\cos^2\left(\omega t + \delta\right) + \sin^2\left(\omega t + \delta\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$$

となり、常に一定の値になることが確認できる。

単振動～エネルギーグラフ

単振動の力学的エネルギーのグラフ



単振動～例題

例題

なめらかな水平面上に壁からバネが取り付けられている。

バネは自然長の状態で静止しているとする。

以下の問いに答えよ。

$t=0$ **で初速度** v_0 **を壁向きに与えると、物体は単振動をした。**
物体の質量を m **、バネ定数を** k **とする。**

1. 物体の運動方程式を記述せよ。

2. 物体の速度 $v(t)$ **を求めよ。**

3. 物体の変位 $x(t)$ **を求めよ。**

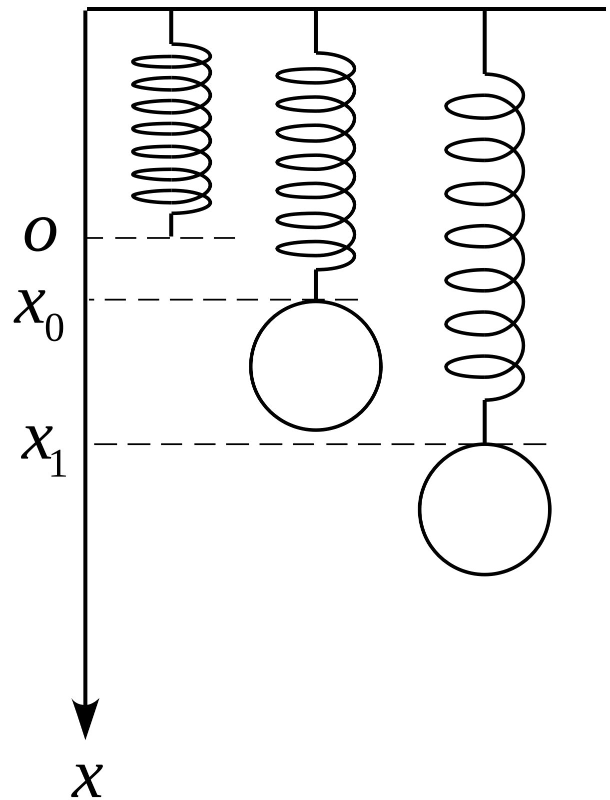
4. 物体の加速度 $a(t)$ **を求めよ。**

5. $v(t), x(t), a(t)$ **のグラフを横軸** t として描け。

単振動～例題

例題

バネの片方を天井に固定し吊り下げた。このときのバネの下端を原点とする。
バネの下端に質量 m の物体を取り付けて静止させた。この位置を x_0 とする。
物体をそこからさらに x_1 の位置まで引き下げ、静かに離し振動させた。
この瞬間を $t=0$ とする。以下の問いに答えよ。



1. 物体の運動方程式を記述せよ。

2. 物体の速度 $v(t)$ を求めよ。

3. 物体の変位 $x(t)$ を求めよ。

単振り子～例題

例題

質量 m の物体が長さ L のひもにつるされている。
ひもをつるしている点を通る鉛直線を基準とし、振れ角 θ_0 で静かに手放した。
このときの位置を A とする。但し、$A \ll L$ である。
以下の問いに答えよ。

1. 物体の運動方程式を記述せよ。

2. 物体の運動は単振り子とみなせる。周期、振幅を求めよ。

3. 物体を手放した時刻を $t=0$ とすると、原点を初めて通過する時刻 t_1 を求めよ。

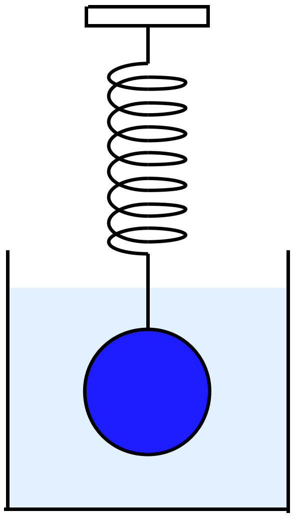
4. 物体の変位 $x(t)$ のグラフを横軸 t として描け。

その他の振動

・減衰振動

速度に比例する抵抗力・・・など

液体中



・強制振動

強制力が働く

外部から周期的な力が加わった場合

復元力が働くように設計された橋梁
(一定の周期で風が吹く)

ブランコ

お寺の鐘

エネルギー平均～例題

例題

質点が単振動している。1周期についての運動エネルギーの平均値 $\overline{K}$ と位置エネルギーの平均値 $\overline{U}$ を求め、これらが等しいことを示せ。

力学基礎演習

4.7.3 ポテンシャルエネルギー
問題34　48ページ
追加設問

物体の運動方程式を書け。