

運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $ma = F$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

回転運動と角運動量

質点の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

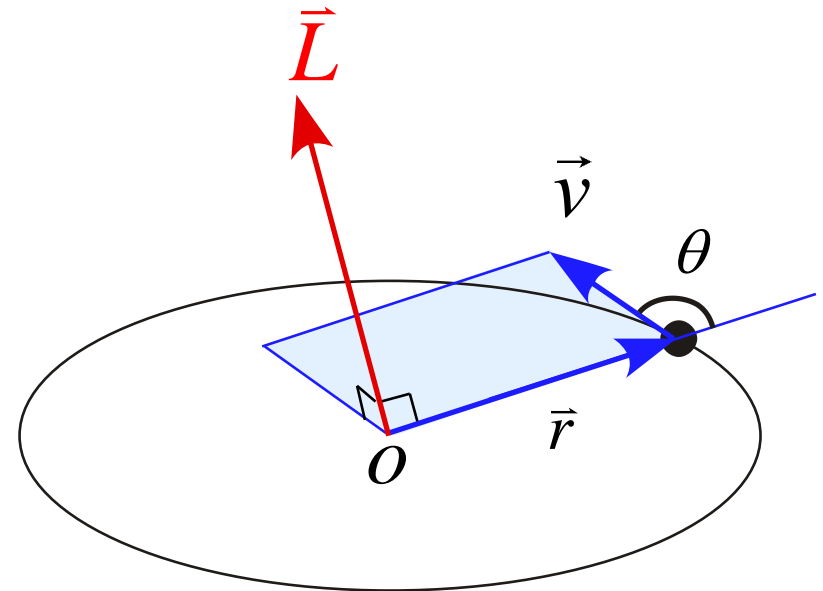
両辺に左から位置ベクトル \vec{r} をかけると(外積)

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

↑
角運動量
↑
モーメント

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

回転運動と角運動量

途中の式変形について (何故、 \vec{r} が微分の中に入るのか?)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \text{ // } m\vec{v} \text{ より}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{0}$$

課題5 (3)

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

角運動量とモーメント

角運動量とモーメントの関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

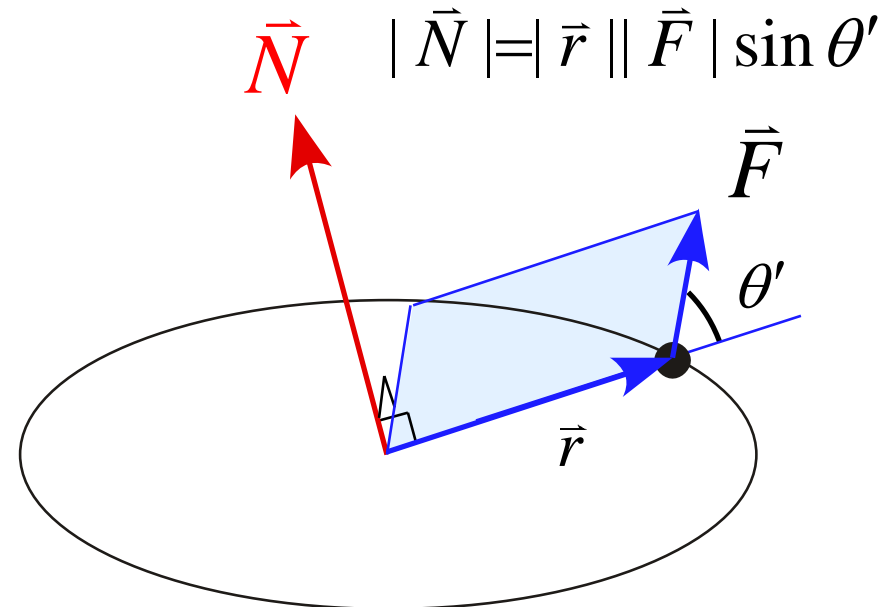
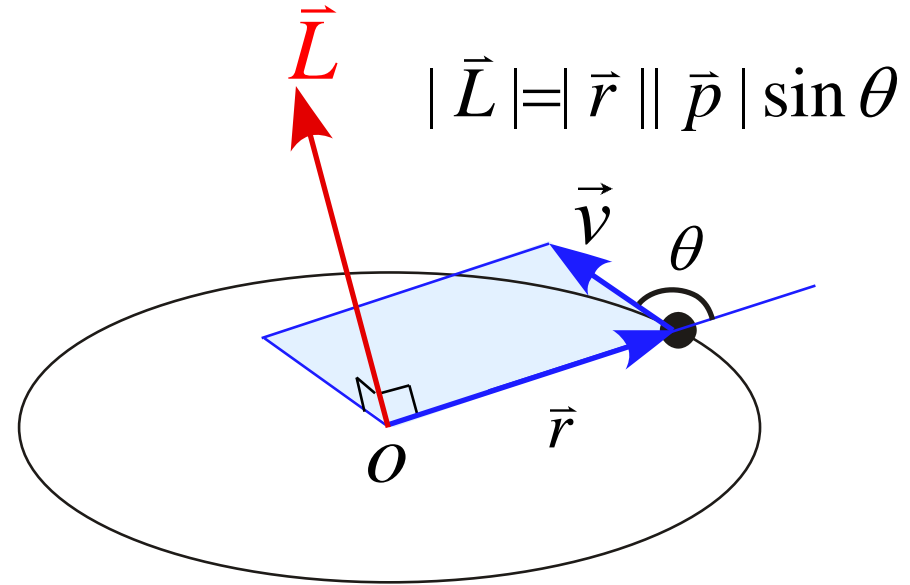
質点が点 O まわりを回転する
勢いを表している

$$[L][M] \frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T]}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

点 O まわりの力のモーメント

$$[L][M] \frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$



角運動量保存則

角運動量とモーメントの関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

ある質点の点 O まわりの
角運動量の変化は
この質点に働く点 O まわりの
力のモーメントに等しい

もし、モーメント $\vec{N} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

外力によるモーメントの総和 \vec{N} が
 $\vec{0}$ のときは、内力が働いていたと
しても、系の角運動量 \vec{L} は変化しない

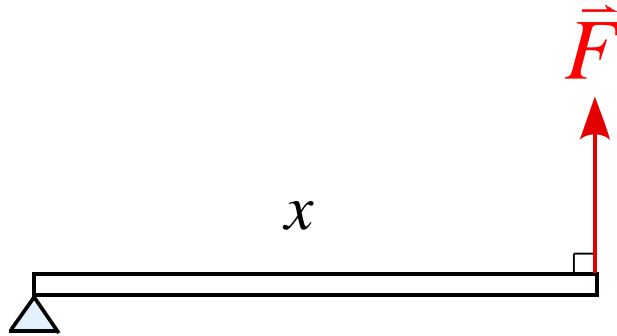
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

力のモーメント～例題

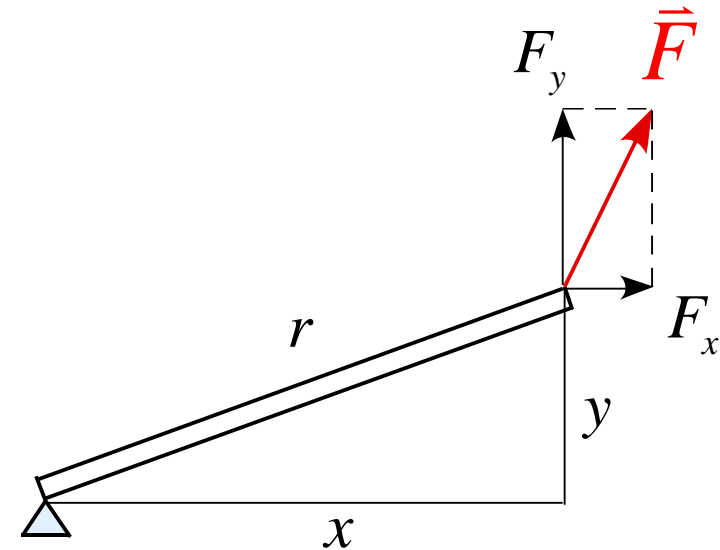
例題

以下の図の力のモーメント N を表せ。但し、棒の質量は無視できるとする。

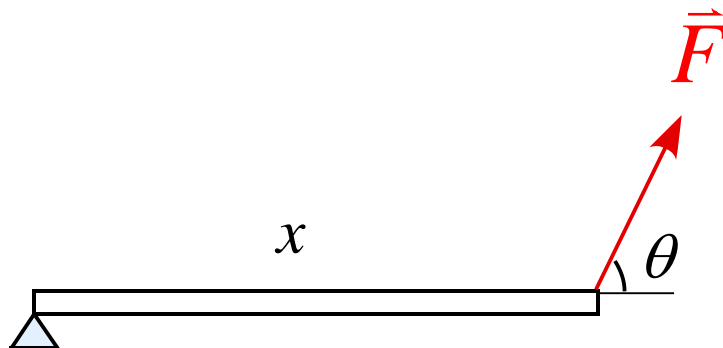
1.



3.



2.



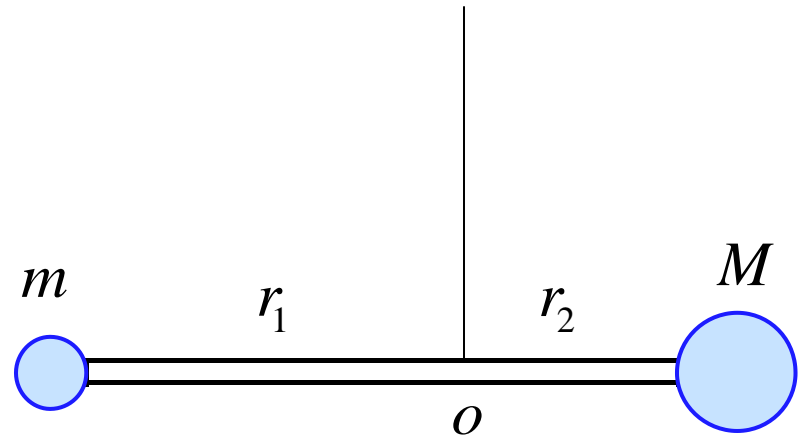
力のモーメント～例題

例題

軽い棒の両端に質量 m の物体と質量 M の物体が図のように取り付けられていて点 O で糸につるされている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒に作用する力を書き込め。
2. 棒の運動方程式を記述せよ。
3. 棒の回転の運動方程式を記述せよ。
4. 棒が回転しない条件 $\frac{r_1}{r_2}$ を求めよ。



力のモーメント～例題

例題

図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点を取り付けられ、糸でつるされている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

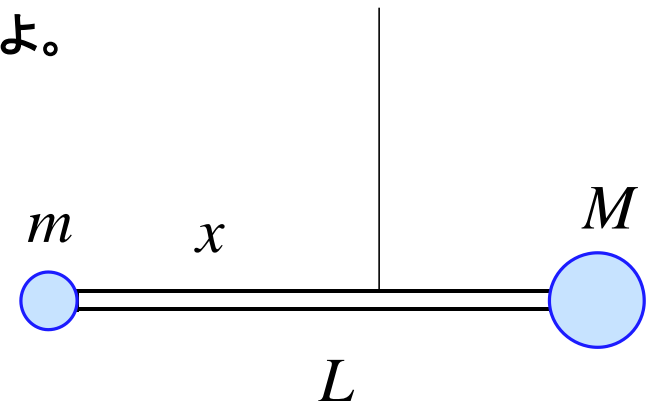
(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

2. 棒の質量が m の場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。



力学基礎演習

4.8 剛体と力のモーメント

問題35 49ページ

追加設問

物体の運動方程式を書け。

問題36 49ページ

追加設問

物体の運動方程式を書け。

問題37 50ページ

問題38 51ページ

力のモーメント～例題

例題

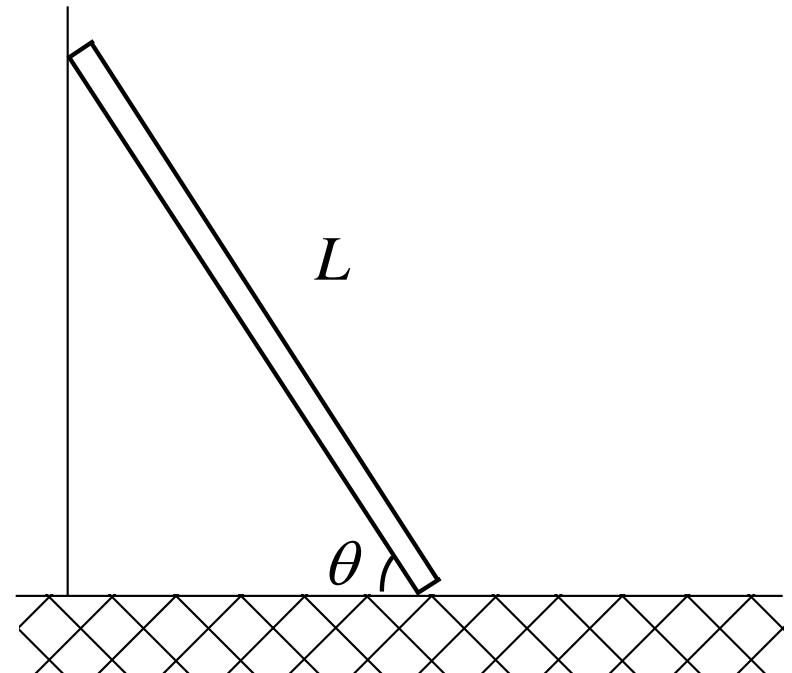
図のような長さ L 、質量 m の棒が鉛直の壁に立てかけられている。

壁は滑らかであるが、床は粗いとする。

床と棒とのなす角 θ を小さくすると、棒は滑り出してしまう。

滑り出す直前の角 θ_0 の条件 $\tan \theta_0$ を求めよ。

但し、静止摩擦係数は μ を用いよ。

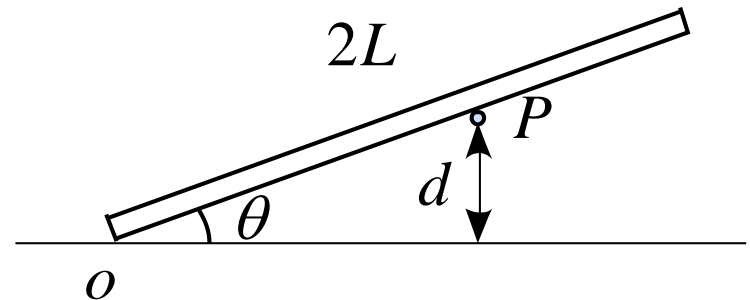


力のモーメント～例題

例題

粗い水平面上に一端を点 O に置き、点 P に設置された釘に立てかけてある長さ $2L$ の棒がある。棒と水平面のなす角は θ 、水平面から釘までの高さは d であるとする。棒全体の質量は m として以下の問いに答えよ。

1. 棒に作用する力を書き込め。
2. 床と棒との垂直抗力を N 摩擦力を f 、釘からの垂直抗力を N' としたとき運動方程式を記述せよ。
3. 回転の運動方程式を記述せよ。



4. 水平面と接している点 O における $\frac{f}{N}$ を求めよ。

中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている
力 \vec{F} の作用線が常にある任意の点 O を通る

中心力

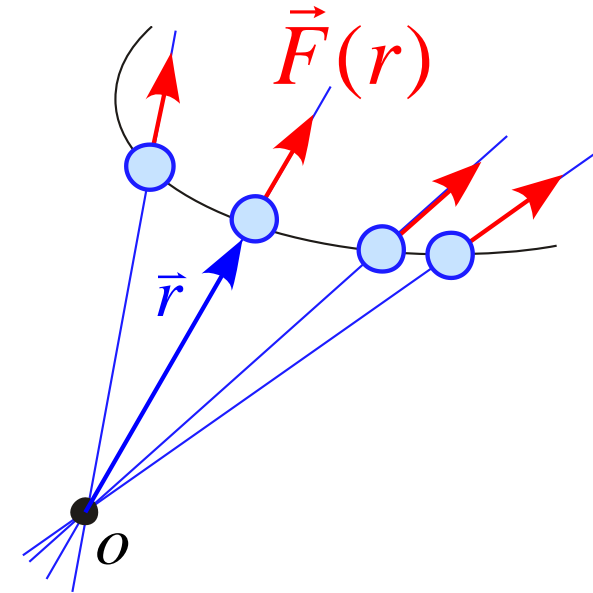
$$\vec{F}(r) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

力の大きさ

力の向き
単位ベクトル

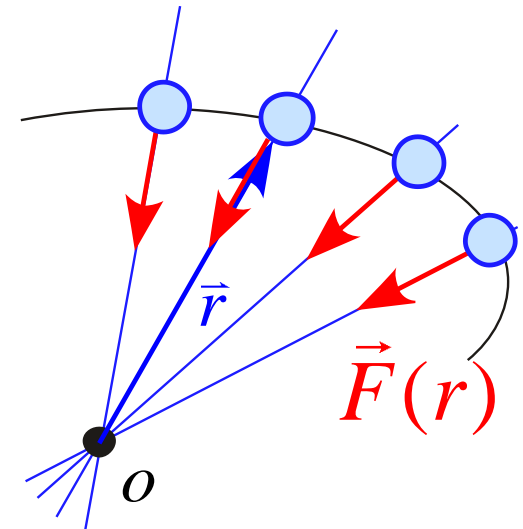
$$F(r) > 0$$

(斥力)



$$F(r) < 0$$

(引力)



中心力～角運動量保存

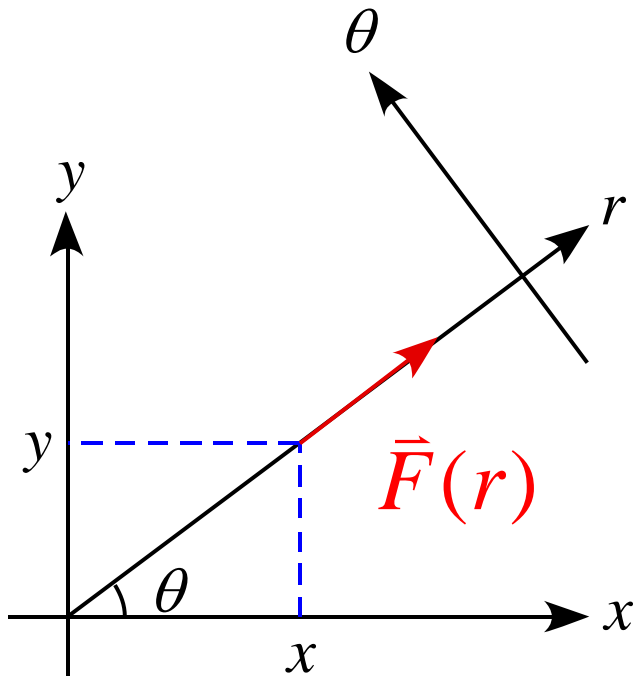
角運動量の変化を計算すると

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) \\ &= m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \\ &= 0 + \vec{r} \times \boxed{F(r) \frac{\vec{r}}{r}} \leftarrow \text{中心力} \\ &= 0\end{aligned}$$

従って、**中心力が働く運動では角運動量が保存する**

中心力～運動方程式

運動方程式から考えるとする
極座標表示を使用する



中心力は

$$r \text{ 方向 } F_r = F(r)$$

$$\theta \text{ 方向 } F_\theta = 0$$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、 a_r, a_θ は

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

と表されるので、

課題6 (2)

中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = F(r) \quad \leftarrow \text{動径方向の運動方程式}$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0$$

と表される

中心力～運動方程式

ここで、 θ 方向の式が何を示しているか
検討してみよう

変位は

$$x(t) = r \cos \theta$$

$$y(t) = r \sin \theta$$

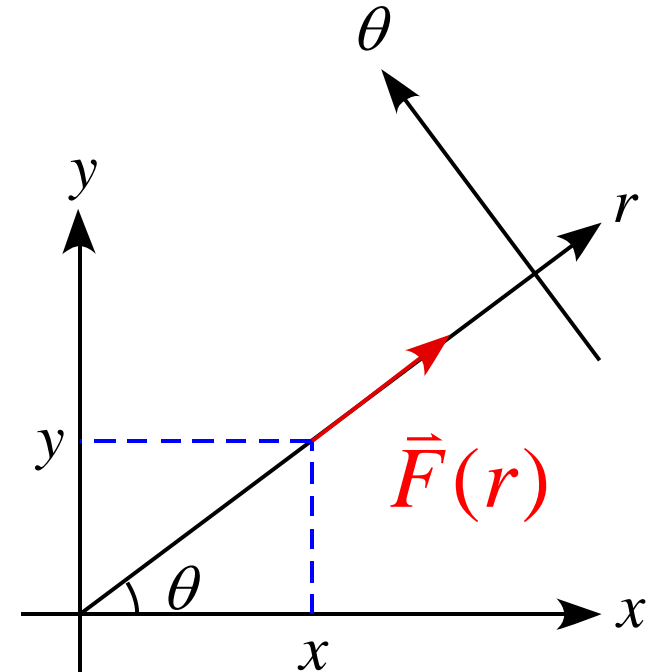
である。

速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 L は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

中心力～運動方程式

ここで、角運動量 \vec{L} は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - r_x \cdot 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix}$$

と表される

課題 1 (1)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

中心力～運動方程式

従って、 z 成分だけ考えればよく

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

$$= r \cos \theta \cdot m \left[\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right] - r \sin \theta \cdot m \left[\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$= rm \frac{dr}{dt} \cos \theta \sin \theta + r^2 m \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} - rm \frac{dr}{dt} \sin \theta \cos \theta + r^2 m \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + r^2 m \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m \frac{d\theta}{dt} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= r^2 m \frac{d\theta}{dt}$$

と表される

中心力～運動方程式

従って、 θ 方向の式において

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

となる

即ち、

$$ma_{\theta} = 0$$

は角運動量保存則を表している

単振り子～例題

例題

質量 m の物体が長さ l のひもにつるされている。

ひもをつるしている点を通る鉛直線を基準とし、ひもの振れ角 θ を取る。

以下の問いに答えよ。

1. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

と表すことができる。

振れ角 θ が十分小さいときの周期 T を求めよ。

3. 物体を θ_0 まで傾け、 $t = 0$ で離したとする。
振れ角 $\theta(t)$ と、糸の張力 S を求めよ。
但し、 θ_0 は十分に小さな角度であるとする。

角運動量～例題

例題

質量 m の質点が xy 平面で半径 r_0 の円運動をしている。

$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$ にあり、反時計まわりに角速度 ω で回転するとする。

1. 運動量 $\vec{p} = (p_x, p_y)$ を求めよ。
2. この運動における質点の角運動量 \vec{L} を求めよ。

角運動量～例題

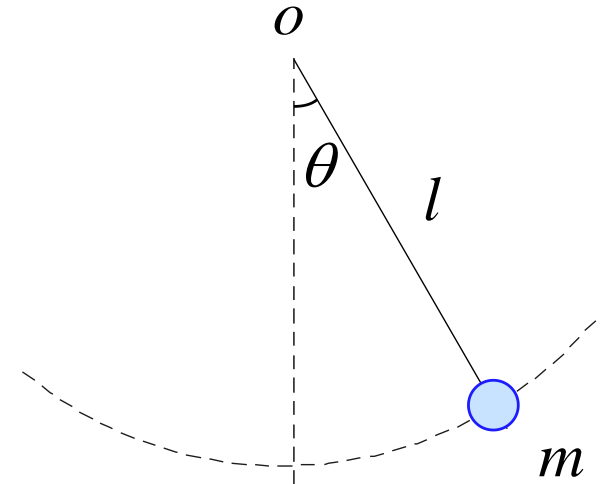
例題

図のような単振り子において、振れ角を θ としたとき、
回転の運動方程式から

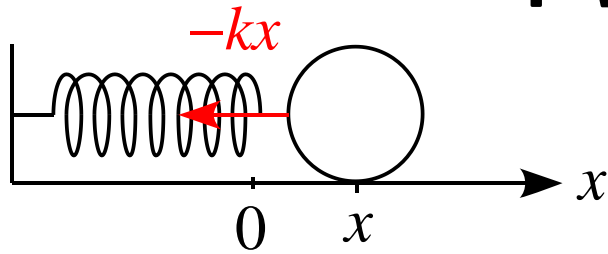
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

となることを示したい。以下の問いに答えよ。

1. 質点の速さを v としたとき、点 O まわりの角運動量を表せ。
2. 点 O まわりの力のモーメントを求めよ。
3. 回転の運動方程式を記述せよ。
4. 題意の式を導け。



単振動～まとめ



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

微分方程式
を解くと

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta), \omega^2 = \frac{k}{m}$$

A と δ は初期条件が決める

となる。

ω について

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

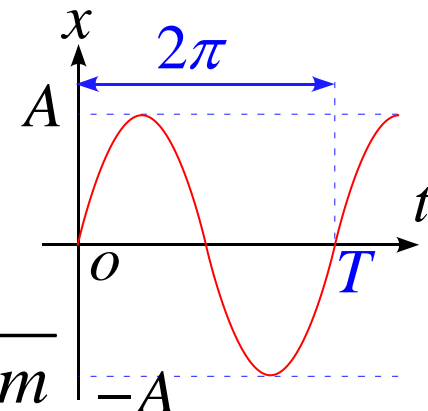
$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} A \sin(\omega t + \delta)$$

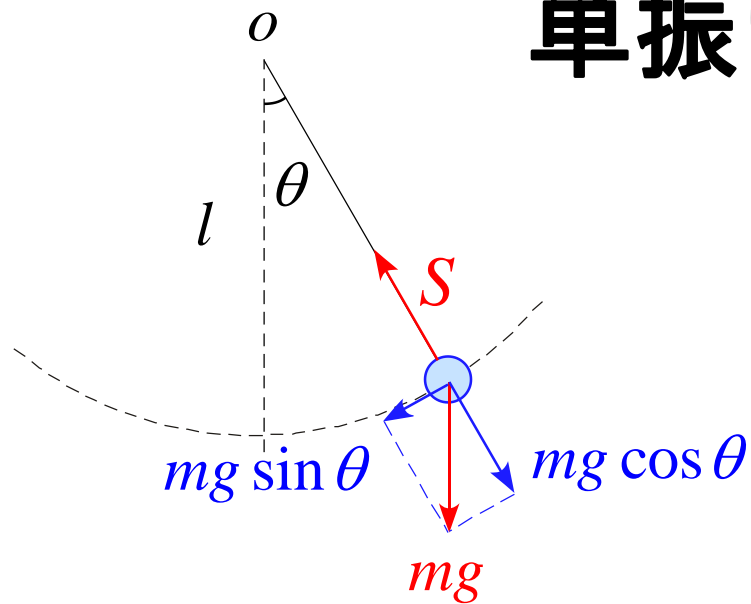
周期 T について

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



単振り子～まとめ



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg \cos \theta - S$$

$$ma_\theta = -mg \sin \theta$$

a_r, a_θ

に代入



$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = mg \cos \theta - S$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = -mg \sin \theta$$

単振り子～まとめ

糸の長さは $r = l$ (一定) なので

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

従って、

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - S$$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

となる。

2式目は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

と変形できる。

振れ角 θ が十分に小さければ

$$\sin \theta \simeq \theta$$

と近似ができ、

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \theta$$

微分方程式
を解くと



$$\theta(t) = A \sin(\omega t + \delta), \omega^2 = \frac{g}{l}$$

A と δ は初期条件が決める

となる。

単振り子～まとめ

ω について

$$\frac{d\theta}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

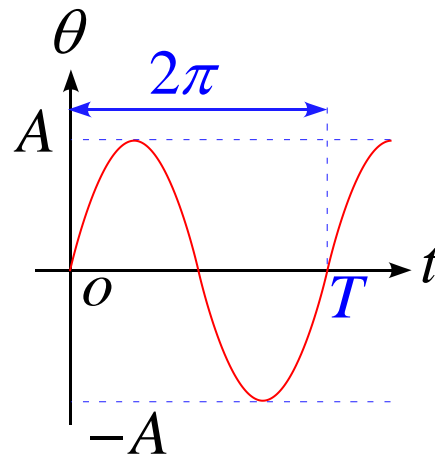
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} A \sin(\omega t + \delta)$$

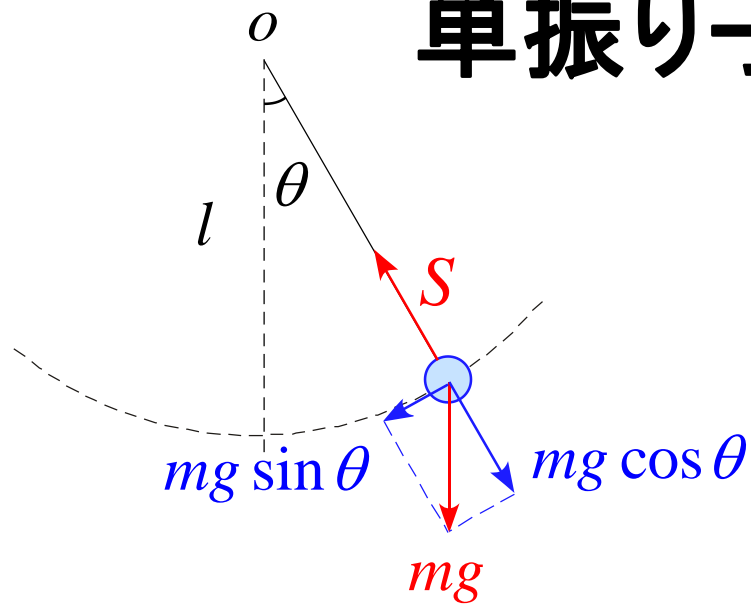
周期 T について

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$



単振り子～エネルギー



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg \cos \theta - S$$

$$ma_\theta = -mg \sin \theta$$

a_r, a_θ
に代入



$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = mg \cos \theta - S$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = -mg \sin \theta$$

単振り子～エネルギー

運動方程式の θ 方向の式に着目

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = -mg \sin \theta$$

糸の長さは $r = l$ (一定) なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

さらに、極座標表示において θ 方向の速度は一般的に

$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

であるから

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l} \frac{dv_\theta}{dt}$$

と表される。

一般的な極座標表示 (速度)

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

単振り子～エネルギー

ここで両辺に $v_\theta = l \frac{d\theta}{dt}$ をかけると

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} v_\theta = -mg \sin \theta l \frac{d\theta}{dt}$$

代入

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l} \frac{dv_\theta}{dt}$$

$$ml \frac{1}{l} \frac{dv_\theta}{dt} v_\theta = -mgl \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$mv_\theta \frac{dv_\theta}{dt} = -mgl \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_\theta^2 \right) = \frac{d}{dt} (mgl \cos \theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_\theta^2 - mgl \cos \theta \right) = 0$$

となる。

単振り子～エネルギー

従って、この運動においてエネルギーが保存することがわかる。

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 + (-mgl \cos \theta) \right] = 0$$

運動エネルギー

位置エネルギー

ここで、この式において、最下点を基準にするため mgl を加えると

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 + mgl - mgl \cos \theta \right] = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 + mgl (1 - \cos \theta) \right] = 0$$

と表される。

