

力学基礎演習

4.6.1 振り子の運動

問題24 40ページ

4.8.2 角運動量保存の法則

問題39 52ページ

円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

ある時刻 t での位置は

$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$ とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

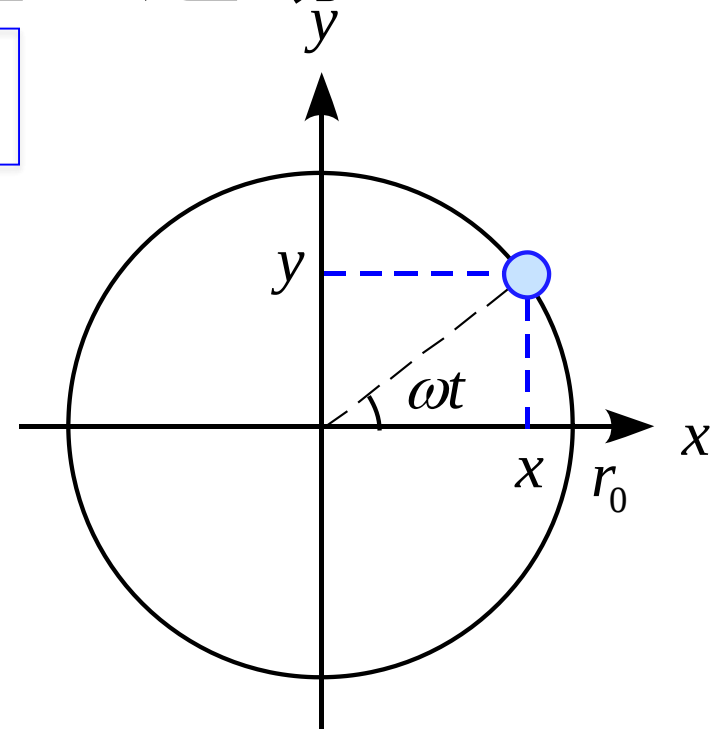
と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt} [r_0 \cos \omega t] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt} [r_0 \sin \omega t] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。

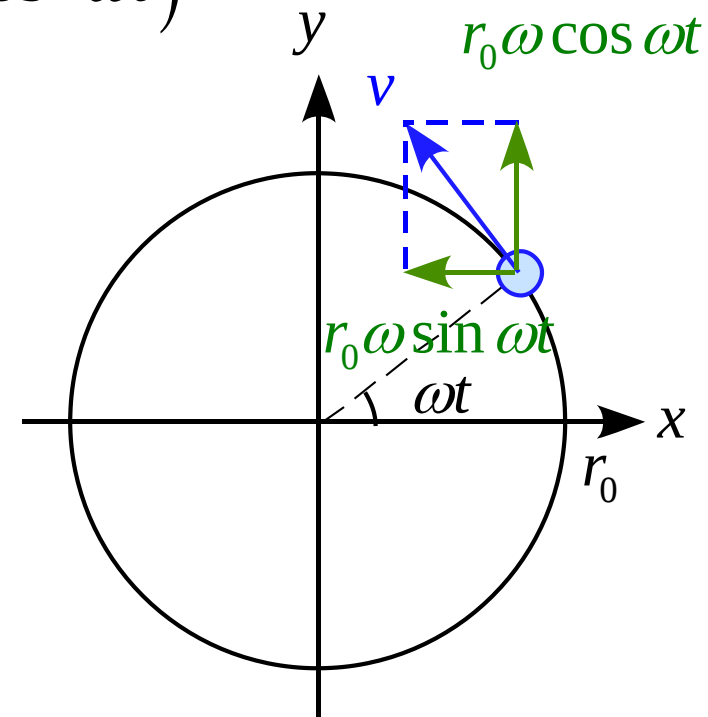


円運動～等速円運動

従って、

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-r_0 \omega \sin \omega t)^2 + (r_0 \omega \cos \omega t)^2} \\
 &= \sqrt{r_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} \\
 &= \sqrt{r_0^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \\
 &= \sqrt{r_0^2 \omega^2} \\
 &= r_0 \omega
 \end{aligned}$$

となる。



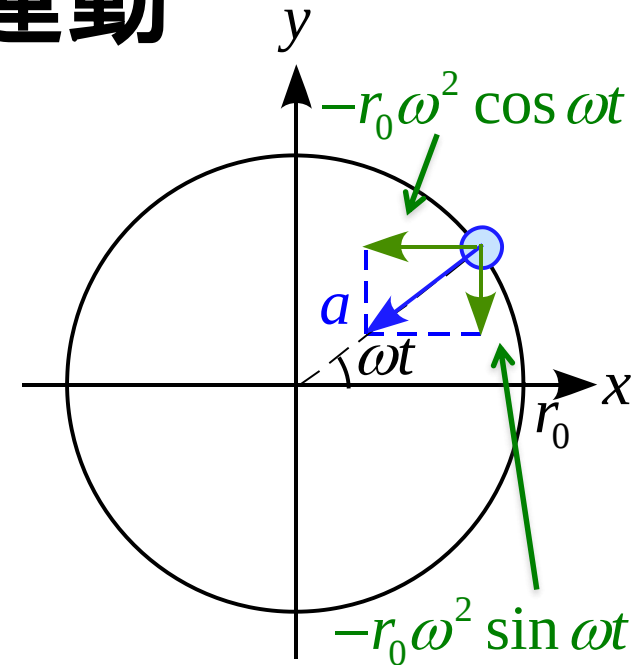
円運動～等速円運動

加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}[-r_0 \omega \sin \omega t] = -r_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}[r_0 \omega \cos \omega t] = -r_0 \omega^2 \sin \omega t$$

と表される。



$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-r_0 \omega^2 \cos \omega t)^2 + (-r_0 \omega^2 \sin \omega t)^2}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4} = r_0 \omega^2$$

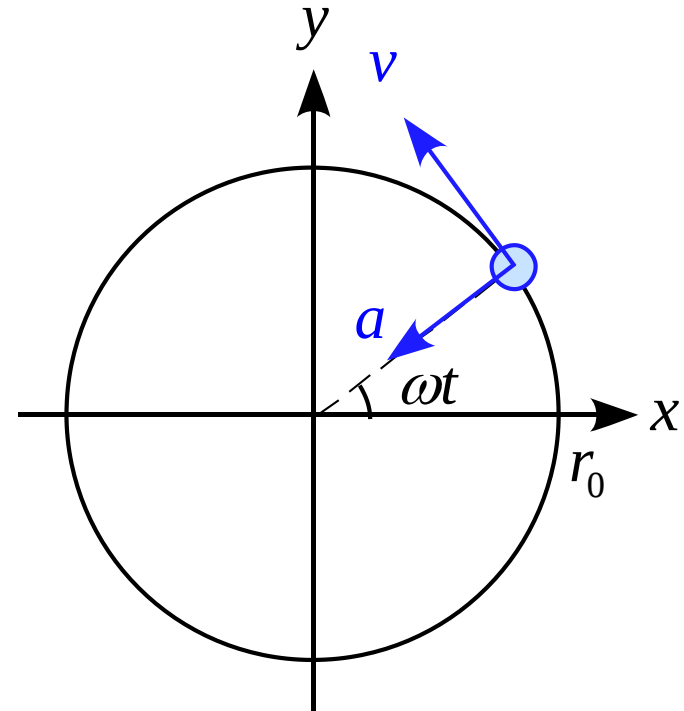
となる。

円運動～等速円運動

等速円運動 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定)

$$v = r_0 \omega$$

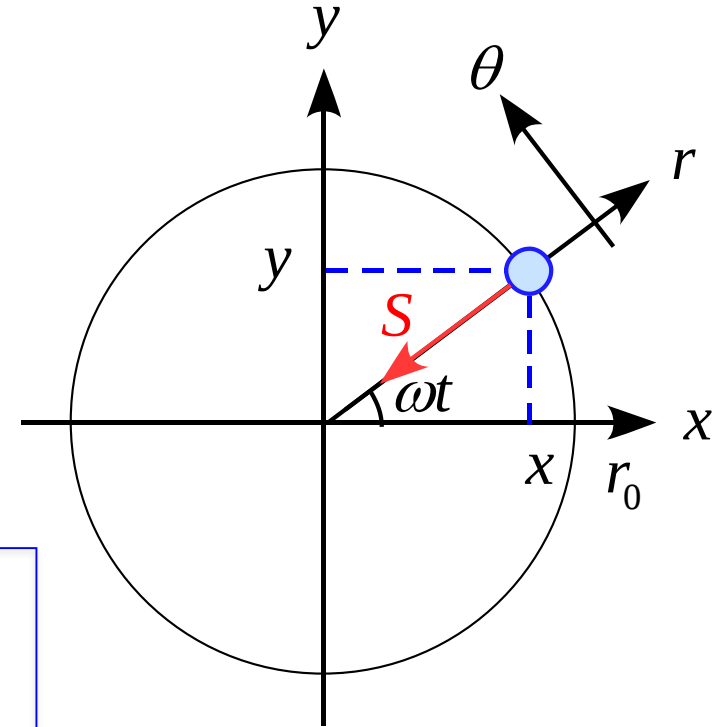
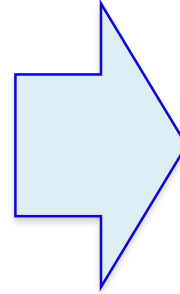
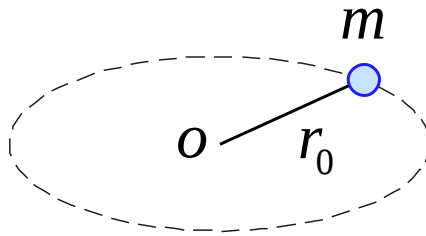
$$a = r_0 \omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



円運動～運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$



a_r, a_θ
に代入

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -S$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0$$

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定) なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = S$$

$$mr_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

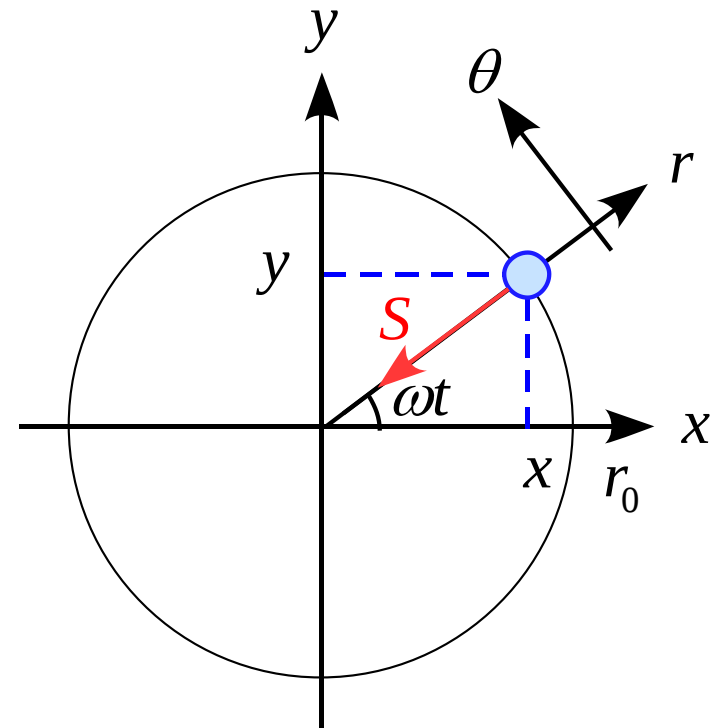
角速度 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

とすると、

$$mr_0 \omega^2 = S$$

$$ma = S$$

中心方向に加速度があると考えられる



力学基礎演習

4.2.2 等速円運動 問題5 26ページ

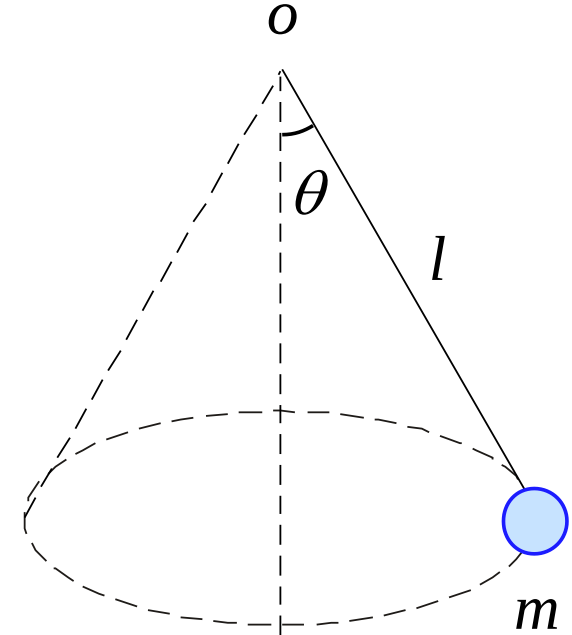
円運動～例題

例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問いに答えよ。



1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。
2. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

と表すことができる。

糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円運動～例題

例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。

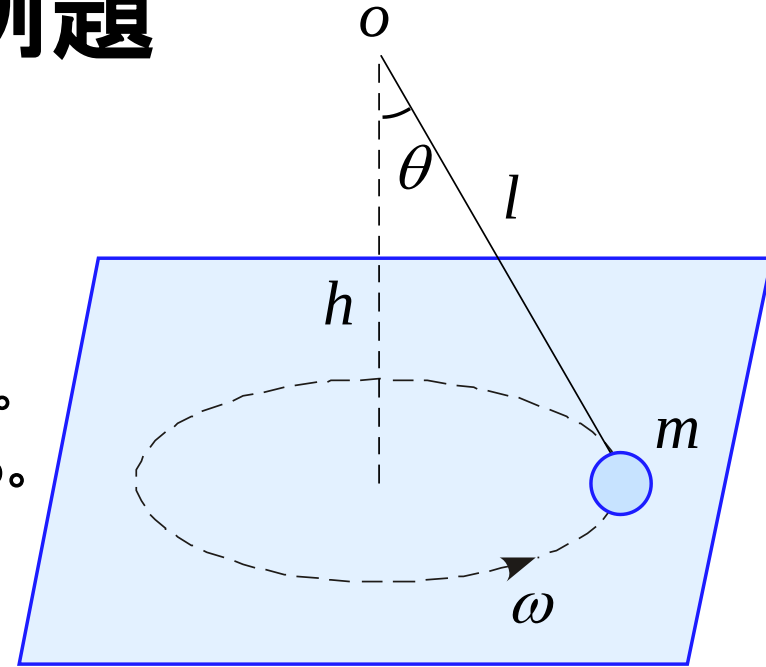
糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体は水平面上で角速度 ω の円運動している。

糸は水平面から高さ h の地点に設置されている。

水平面は滑らかで摩擦は無視できるとする。

以下の問いに答えよ。



1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。
2. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
3. 糸の張力 S 、水平面からの垂直抗力 N を求めよ。
4. 角速度 ω が ω_0 を超えると水平面から離れる。 ω_0 を求めよ。

円運動～例題

例題

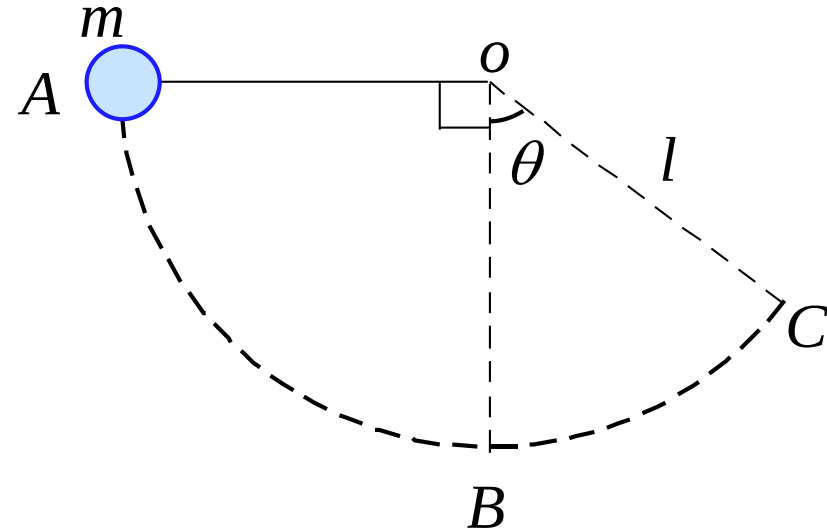
図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

以下の問いに答えよ。



1. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
2. 最下点 B での糸の張力 T_B を求めよ。
3. 点 C での糸の張力 T_C を求めよ。

円運動～例題

例題

図のような円運動のモデルを考える。

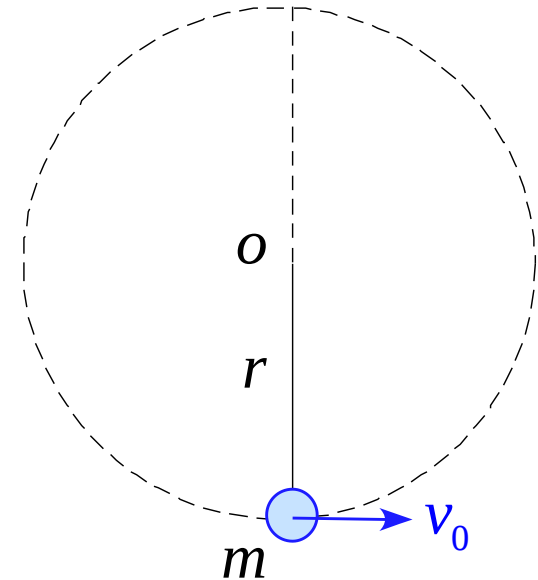
糸の長さは r 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

最下点で初速 v_0 を与えたとき

以下の問いに答えよ。



1. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
2. 物体が1回転するために必要な初速 v_0 の条件を求めよ。