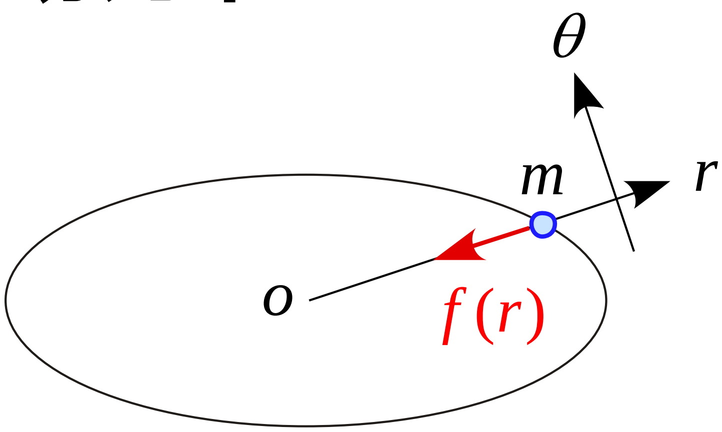
面積速度～運動方程式

中心力が作用するモデルを考える



運動方程式は

$$ma_r = -f(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

θ 方向の式に着目し、a_θ を代入すると

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

$$m\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = const.$$

となる。

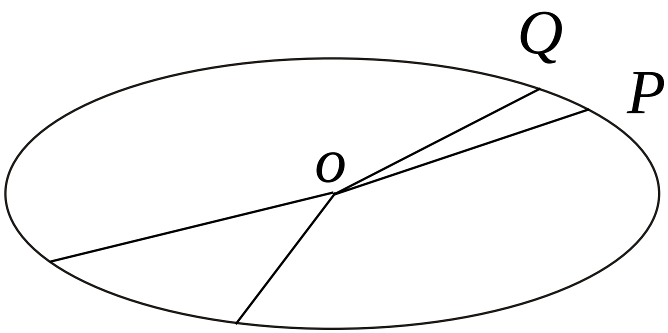
一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

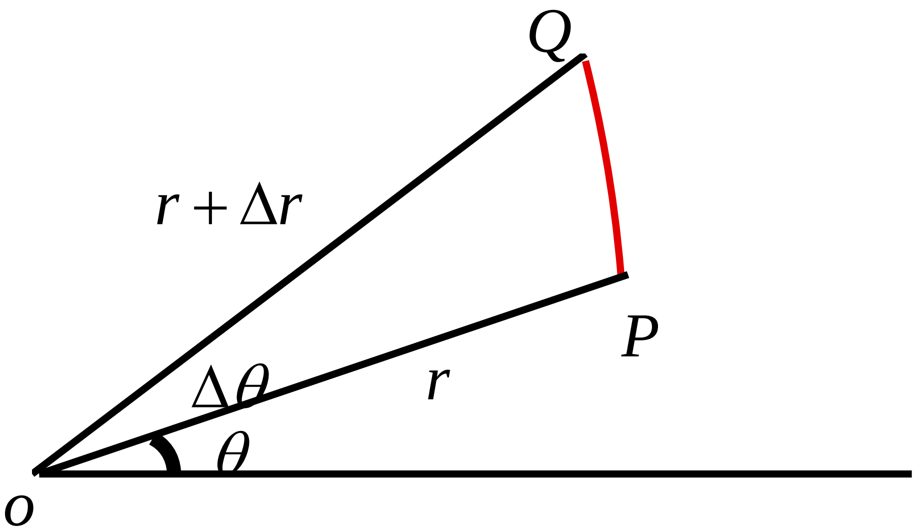
$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

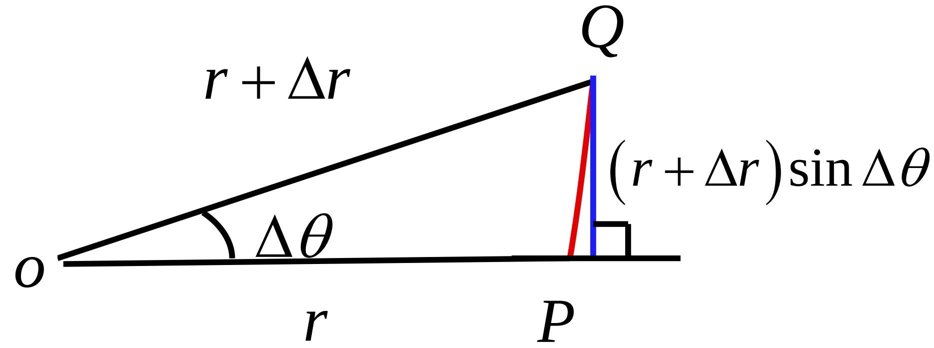
面積速度～運動方程式

面積速度: 動径ベクトルが単位時間に描く面積



面積 oPQ **に着目すると**





よって、面積は

$$\Delta S = \frac{1}{2} r(r+\Delta r)\sin\Delta\theta$$

とみなすことができる。

動径によって面積が描かれる速さは Δt **を無限小にした時の**

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

の極限値で与えられる。

面積速度～運動方程式

この極限を考えると

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\frac{1}{2} r \cdot r \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \sin \Delta\theta}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin \Delta\theta}{\Delta t} \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

となる。

この式と、θ方向の運動方程式を比較すると

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = const.$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = const.$$

となる。

従って、

どんな中心力であっても

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = const.$$

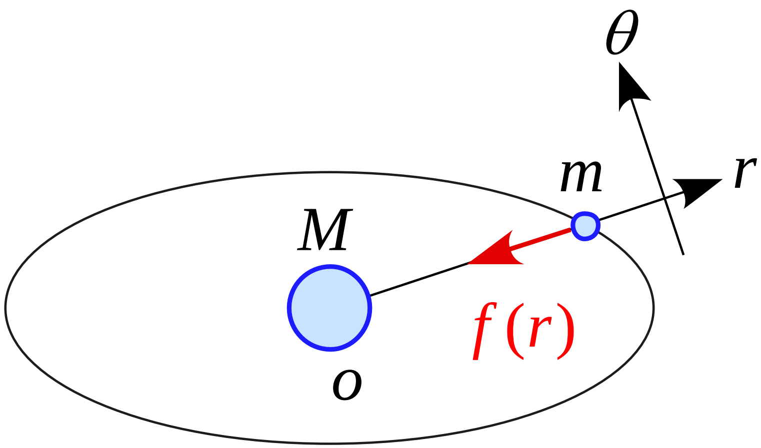
面積速度が一定である。

ケプラーの第2法則

面積速度～万有引力

太陽のまわりを回る惑星のモデルを考える

太陽の質量を M、惑星の質量を mとする。



運動方程式は

$$ma_r = -G\frac{Mm}{r^2}$$

$$ma_\theta = 0$$

θ 方向の式に着目し、a_θ を代入すると

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

$$mr^2\frac{d\theta}{dt} = L \quad (const.)$$

となる。

一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

面積速度～万有引力

面積速度を考えると

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$2m\frac{dS}{dt}=2m\left[\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$mr^2\frac{d\theta}{dt}=L$$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{L}{2m}$$

と表される。

これは面積速度が一定であることを示していて、ケプラーの第2法則に相当する。

一方、r 方向の運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{L}{mr^2}\right)^2\right]=-G\frac{Mm}{r^2}$$

$$m\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{L}{mr^3}=-G\frac{Mm}{r^2}$$

が得られる。

実際の惑星の軌道は楕円であるが、円からのずれが小さいことを考慮し、軌道を半径 a の円であると近似する。

面積速度～万有引力

よって、 $\frac{dr}{dt}=0$ となり

$$\frac{L^2}{ma^3}=G\frac{Mm}{a^2}$$

$$L^2=GMm^2a$$

が得られる。

公転周期 T は

$$T=\frac{\pi a^2}{\frac{dS}{dt}}=\frac{\pi a^2}{\frac{L}{2m}}=\frac{2m\pi a^2}{L}$$

と表される。

従って、

$$T=\frac{2m\pi a^2}{\sqrt{GMm^2a}}$$

$$=\frac{2\pi}{\sqrt{GM}}a^{\frac{3}{2}}$$

となる。この式は

$$T^2=\frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

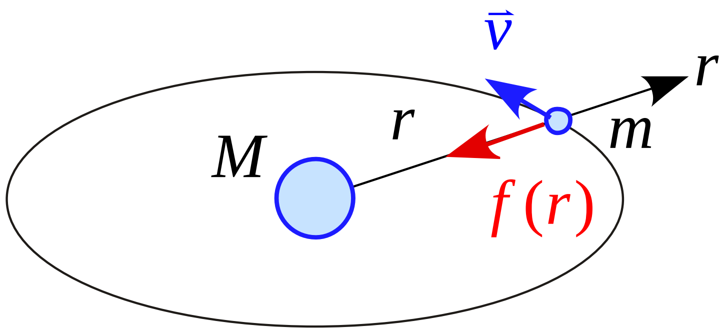
と変形でき、これは

ケプラーの第3法則
「惑星の周期の二乗は長半径の三乗に比例する」

に相当することを意味している。

万有引力～エネルギー

質量 M の天体のまわりを質量 m の人工衛星が速度 $\vec{v}$ でまわっている。天体と人工衛星の距離を r とする。



運動方程式は

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-f(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=-G\frac{Mm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

と表される。

両辺に $\vec{v}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ の内積を取ると

$$m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=-G\frac{Mm}{r^2}\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$$

$$m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)=-G\frac{Mm}{r^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=-G\frac{Mm}{r^3}\frac{1}{2}2r\frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}\left(G\frac{Mm}{r}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2-G\frac{Mm}{r}\right)=0$$

となる。

万有引力～エネルギー

途中計算について

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{v}\right|\left|\vec{v}\right|\cos 0\right)=2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{v}\right|^2\right)=2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

ここで $\left|\vec{v}\right|^2=v^2$ と書き変えると

$$\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

と表される。

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}+\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{r}\right|\left|\vec{r}\right|\cos 0\right)=2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\left|\vec{r}\right|^2\right)=2\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

ここで $\left|\vec{r}\right|^2=r^2$ と書き変えると

$$\vec{r}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}r^2\right)$$

と表される。

万有引力～エネルギー

従って、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{Mm}{r} = const.$$

となり、エネルギー保存則が成立する。

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = const.$$

↑ 運動エネルギー

↑ 万有引力による位置エネルギー

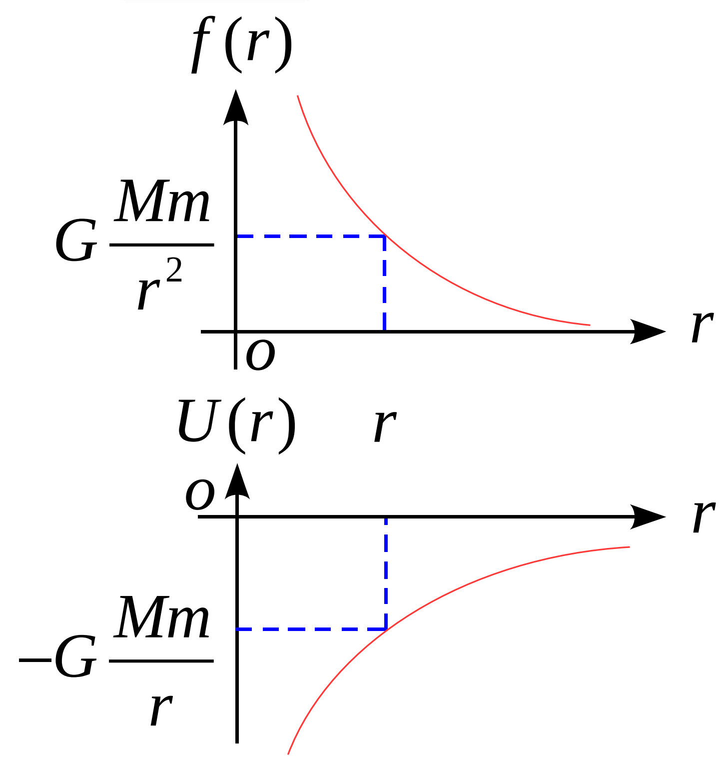
基準点について

エネルギーの式について、

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-G\frac{Mm}{r}\right) = 0$$

となる $r = \infty$ の点を基準として扱う。

無限遠



力学基礎演習

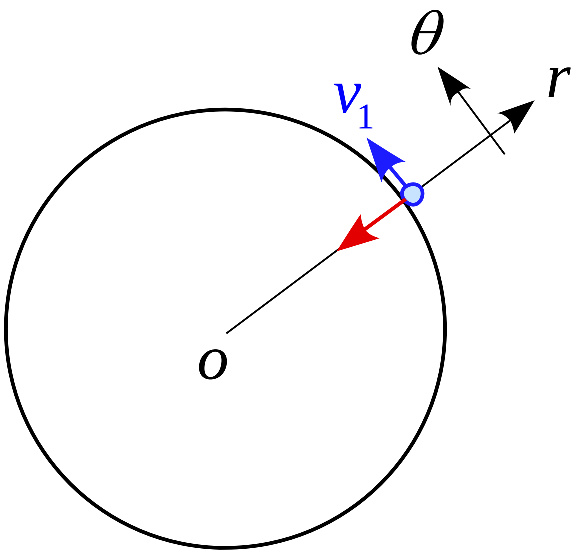
4.7.3 ポテンシャルエネルギー
問題33　47ページ

万有引力～例題

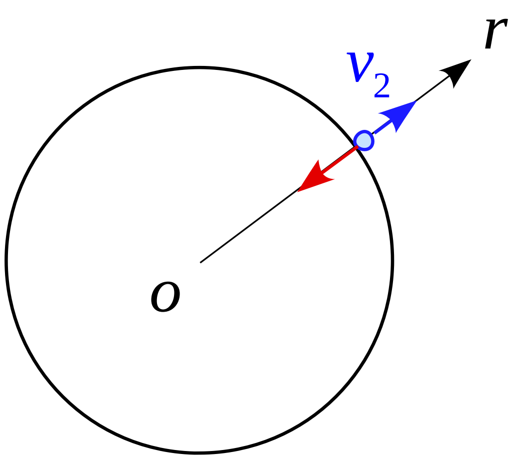
例題

地球の半径を R、地球の質量 M、万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。

地球の表面上で物体に水平方向に初速度 v_1 を与えた。すると物体は地表すれすれに円運動した。v_1 を求めよ。



地球の表面上で物体に上空方向に初速度 v_2 を与えた。すると物体は無限遠方に飛び去った。このような運動をする為の v_2 の条件を求めよ。但し、エネルギー保存則が成立するモデルとする。

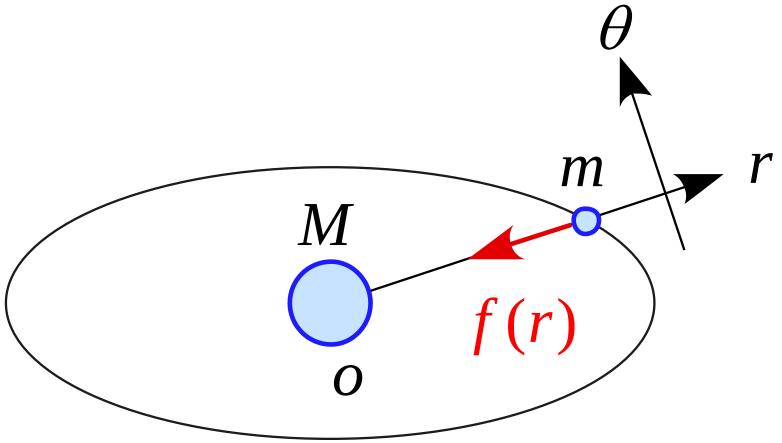


万有引力～例題

例題

極座標における運動方程式

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=-G\frac{Mm}{r^2}$$

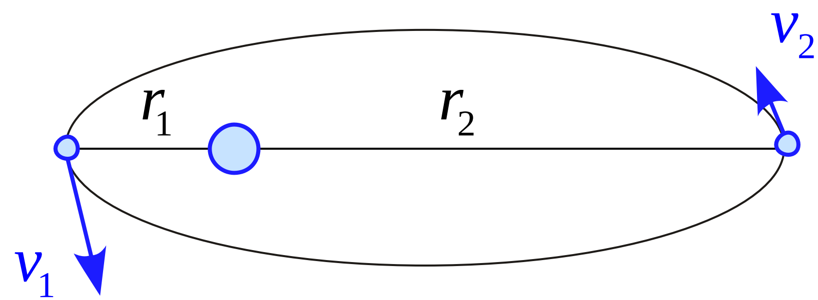


より、力学的エネルギー保存則を導け。

惑星のモデル～例題

例題

質量 m の惑星が質量 M の太陽のまわりを楕円軌道上で運動している。
近日点 r_1 での速さを v_1 遠日点 r_2 での速さを v_2 とする。
万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。



1. 角運動量から v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。

2. 面積速度を求め、v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。

3. 近日点と遠日点でのエネルギーの関係を記述せよ。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

x で積分

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

左側から $\vec{r}$ で外積

t で積分

モーメントと角運動量の関係

力積と運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

角運動量　モーメント

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- 問題文で指定されている場合はそれを利用する
- 指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- 一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
- 直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力

の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ のF の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける

$$m\frac{dv}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad v = \bigcirc \quad \Rightarrow \quad x = \bigcirc$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

t で積分　　t で積分

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

解くことが困難

どの物理量の関係が必要か検討する

t で積分

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = \vec{r}\times\vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

x で積分

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}dt$$

力学の講義を終えて

取り扱った内容

・加速度 / 速度 / 変位
・ニュートンの運動の法則
・仕事とエネルギー
・エネルギー保存則
・運動量と力積
・運動量保存則
・力のモーメント
・角運動量
・角運動量保存則
・円運動
・単振動 / 単振り子
・万有引力の法則
・ケプラーの法則

取り扱っていない内容

・剛体の運動
・慣性モーメント