講義ノート

2018年度

物理学基礎

補充授業

2018 補充授業

まず、高校で物理を履修した人は、高校の時に覚えたであろう公式を一旦捨てる。

高校物理の段階では
数学の準備が足らないので
本質を伴わない変な公式が多い

物理は自然現象を数式で表す

〜しかもできるだけ少ない式で表したい

例えば

力学

$$\boxed{ma = F}$$

運動方程式

$$\boxed{\frac{d}{dt}(mv) = F}$$

ニュートンが
最初に提唱した形

電磁気学

$$\int_s \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho\, dV$$

$$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{s} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

$$\int_s \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \left(\vec{i} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S}$$

Maxwellの方程式

そもそも、君たちは勘違いをしている。

答えを覚えて、テストで書くだけはナンセンス、意味がない。

まず、何か式を書いたら

例えば

$$ma = F$$ とか

$$ma = -mg$$ とか

式を書いた時に、何でそう書けるのか？　自問自答する

・それぞれの項が何を意味しているか？
・＝ (イコール) はなぜ結べるのか？

式は自然界を表す表現の一つであるから意味がある

大切なことはその**式の意味を理解する**。

数学(微積・ベクトル)　は道具にすぎない

道具が使えなければ困るが、道具にこだわりすぎるのも良くない

物理は公式がいっぱい？

物理において、所謂「公式」と呼ばれるものは

・定義式　・・・先人達が決めた物理を理解する上で役に立つルール

・物理法則　・・・　物理学の中で提唱されている法則
観測や理論から導き出された自然界の法則

に分けられます。

例えば

定義式

$\boxed{v = \dfrac{dx}{dt}}$	**速度**
$\boxed{a = \dfrac{dv}{dt}}$	**加速度**
$\mu = \dfrac{f_s}{N}$	**摩擦係数**

法則

$\boxed{ma = F}$	**運動方程式**
$f_g = mg$	**重力**
$f_i = -m\alpha$	**慣性力**
$f_r = kx$	**フックの法則**

力学

・高校の時に覚えた公式は一旦忘れる。

場合分けされた公式は
覚えると害が出る

自由落下
鉛直投げ上げ
水平投射
斜方投射
斜面を滑る
・・・などなど

新しく使える道具

速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

（定義式）

力学＝運動を表す

力が作用

$$ma = F$$

（運動方程式）

(ニュートンが見つけた法則)

次元解析

[L] 長さ と [M] 質量 と [T] 時間

を使って、それぞれの物理量を表すこと

・その物理量の構成がわかる
・その物理量の単位がわかる

変位～速度～加速度

変位

x

t で 微分 →

← 積分

速度

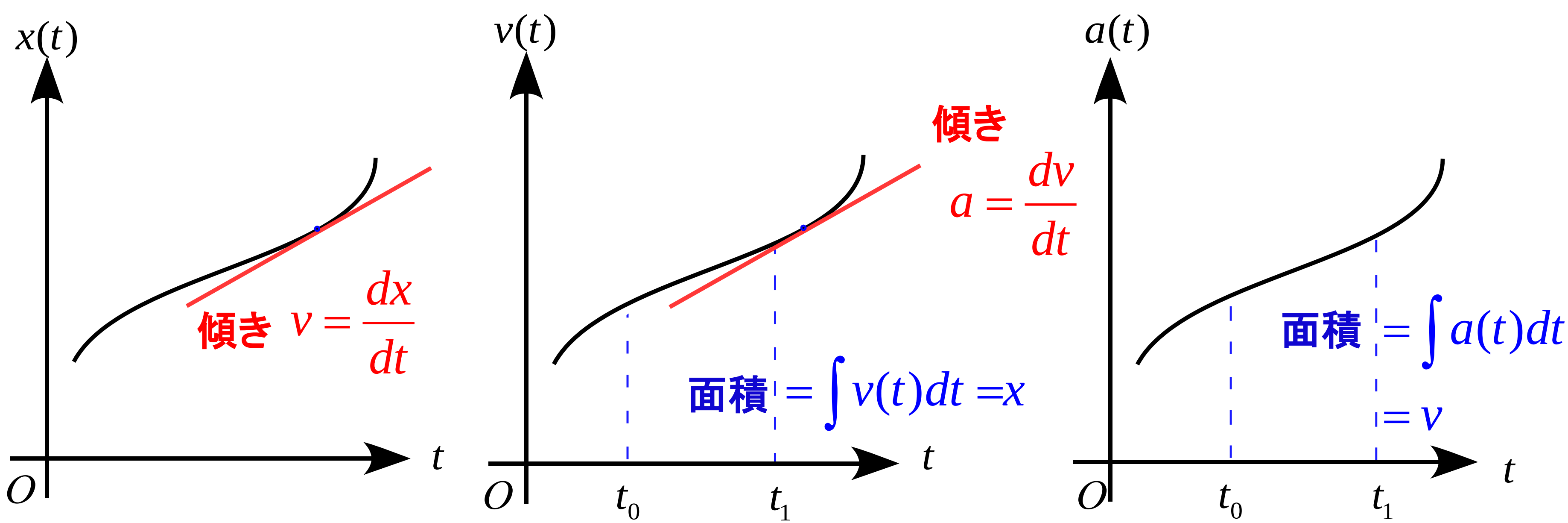
$$v = \frac{dx}{dt}$$

t で 微分 →

← 積分

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$



運動方程式は万能だ！

$$ma = F$$

質量と加速度をかけたものが
その物体に作用する力の合計である

$$ma = F \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺に速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}(Fx)$$

運動エネルギー　　仕事

次元解析

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML]}{[T^2]}$$

質量　加速度　力

この式変形は、「知っている」で使って良いが、間違っていないか確認をすること

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = \frac{1}{2}m\cdot 2v\cdot v'$$

$$= m\cdot v\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

$$\frac{d}{dt}(mv)=F$$

ニュートンが最初に提唱した形

運動量

次元解析

$$\underbrace{[M]}_{質量}\underbrace{\frac{[L]}{[T]}}_{速度}=\underbrace{\frac{[ML]}{[T]}}_{運動量}$$

式の意味

運動量の時間変化 ＝ 作用する力

・運動量が変化すれば、力が作用したはずである。
・力が作用すれば、運動量が変化する。

$$\frac{d}{dt}(p)=F$$

$$dp=Fdt$$

力積

次元解析

$$\underbrace{\left[\frac{ML}{T^2}\right]}_{力}\underbrace{[T]}_{時間}=\underbrace{\frac{[ML]}{[T]}}_{力積}$$

1. (期末)

運動方程式 $\boxed{ma = F}$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺を x で積分する

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int F dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int F dx$$

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$dx = vdt$$

$$\int \left(m\frac{dv}{dt}v \right) dt = \int F dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2} \right) dt = \int F dx$$

運動エネルギー

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m\frac{dv}{dt}$$

質量一定: $\dfrac{dm}{dt} = 0$

( )の中に m を入れる

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = Fdt$$

運動量

1. (期末)

運動方程式 $\boxed{m\vec{a}=\vec{F}}$ $\quad m\dfrac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$

ベクトル表記

両辺に左側から $\vec{r}$ の外積をする

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

この式変形ができる理由

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$=\vec{v}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

同じベクトルの外積はゼロ

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times m\vec{v})=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{\vec{r}\times\vec{p}}_{\vec{L}})=\underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\vec{N}}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

$\vec{L}$ ：角運動量

$\vec{N}$ ：力のモーメント

力学のモデルの考え方

運動方程式を立てる

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

速度、変位を求める

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

加速度

t で積分

$$v = \bigcirc$$

速度

t で積分

$$x = \bigcirc$$

変位

積分定数は初期条件が決める

求めた速度、変位を使って
問題で問われている量を計算する

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \qquad W = Fx$$

$$U = mgx$$

など

運動方程式を立てる手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

・問題文で指定されている場合はそれを利用する
・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
・一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

x で積分

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

仕事とエネルギーの関係

左側から $\vec{r}$ で外積

t で積分

モーメントと角運動量の関係

力積と運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\vec{r}\times\vec{p}}_{\text{角運動量}}\right) = \underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\text{モーメント}}$$

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}\,dt$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$$

t で積分

$v=$

t で積分

$x=$

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

解くことが困難

どの物理量の関係が必要か検討する

t で積分

左側から $\vec{r}$ で外積

x で積分

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

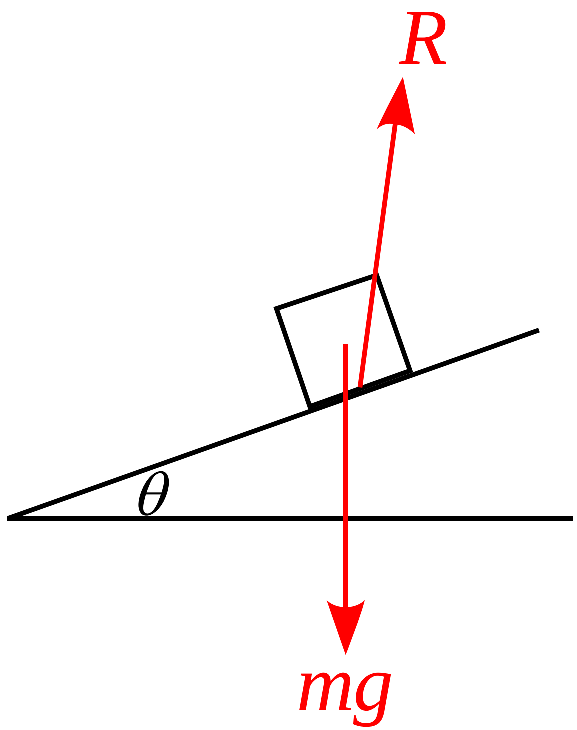
仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2-\frac{1}{2}m{v_1}^2=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B-\vec{p}_A=\int\vec{F}dt$$

斜面を滑る物体の作図について



物体に作用する力は

重力：mg

接触面から受ける抗力　：R

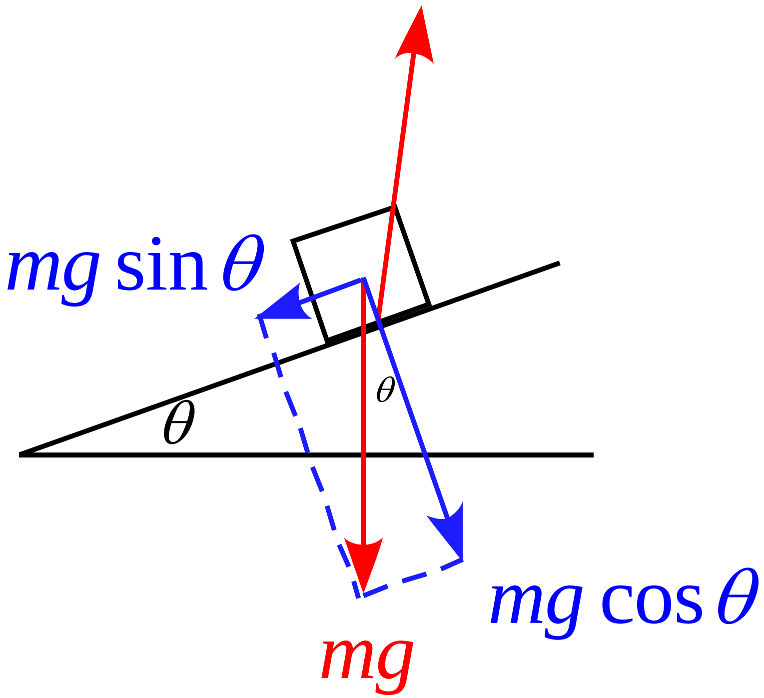
の2つとなります。

このままの状態では考え難いので、

斜面に水平な方向
斜面に垂直な方向

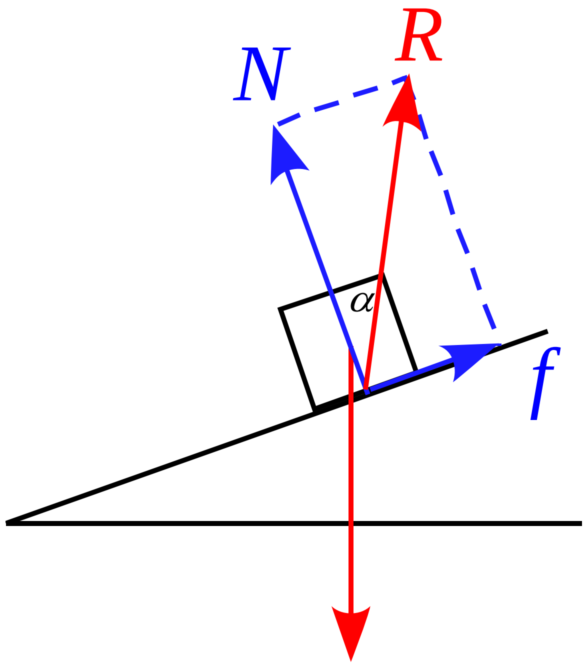
の2つの軸を取ります

重力 mg を軸に沿って分解すると



斜面の角度 θ から
mg を分解します

抗力 Rを軸に沿って分解すると

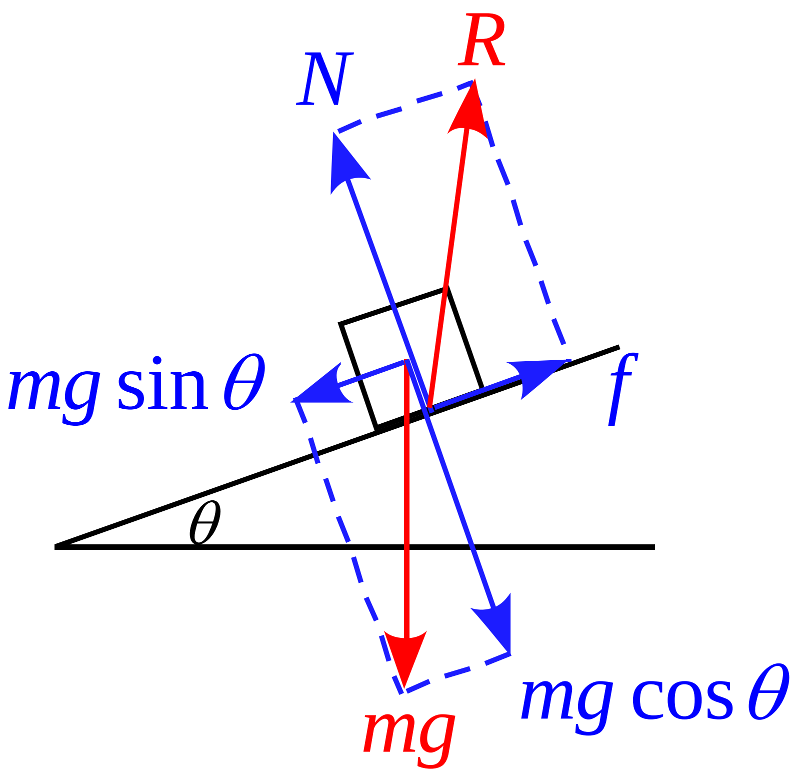


接触面から受ける抗力は

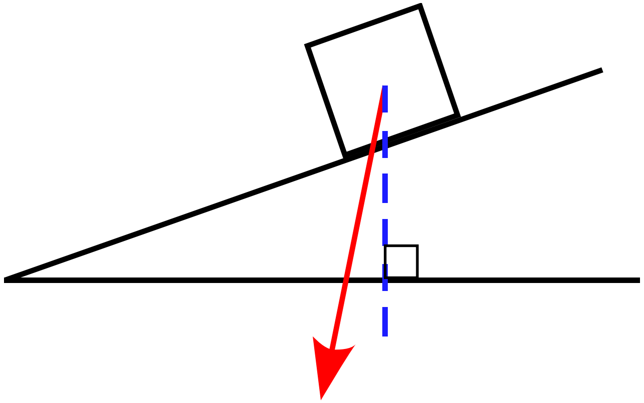
面に垂直な成分: N

面に平行な成分: f

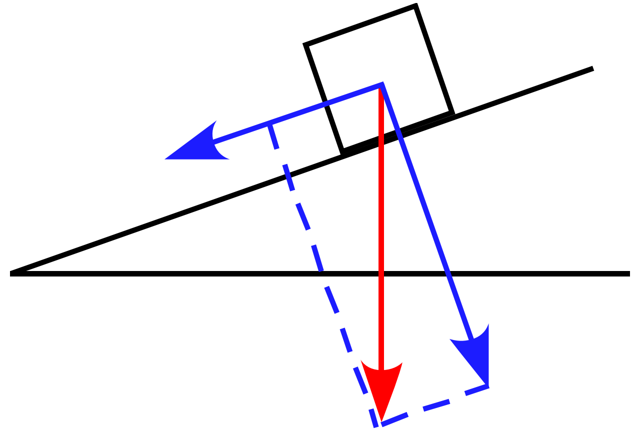
の2つとなります。



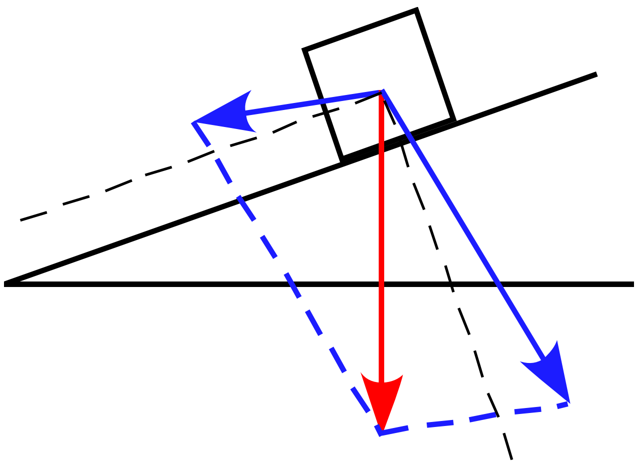
間違った答案例



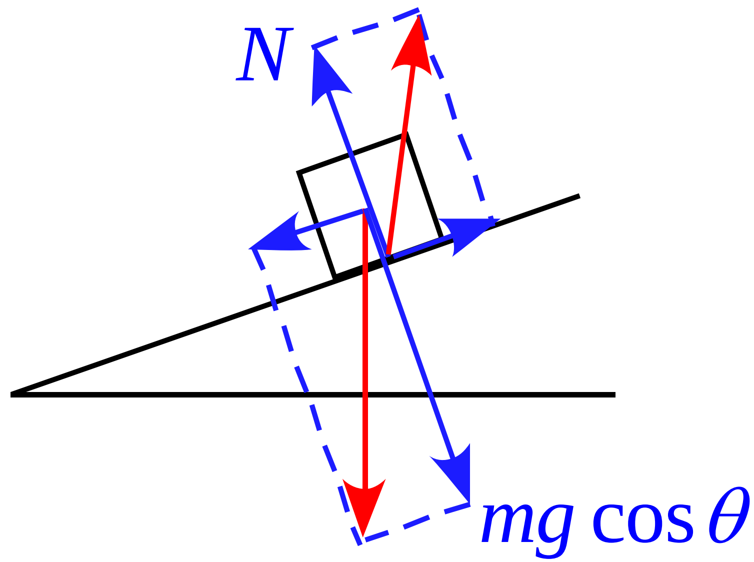
× 重力が真下からずれている



× 分解した成分が長方形からはみ出ている



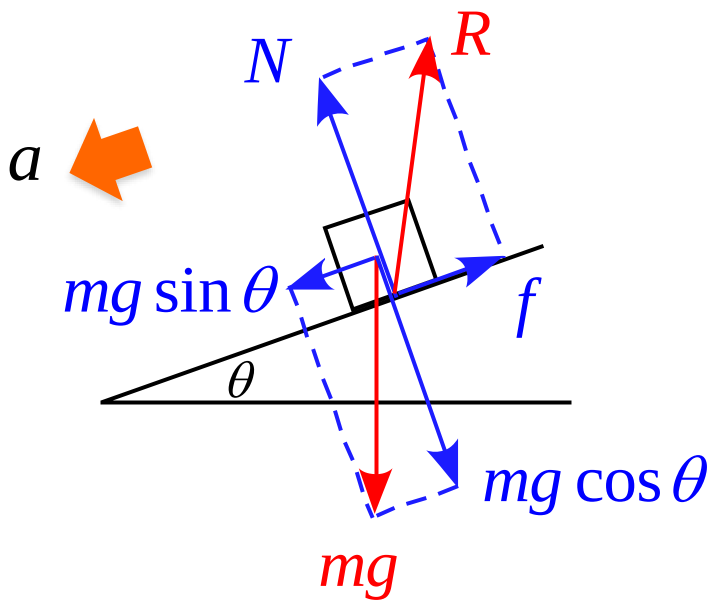
× 長方形ではなくて平行四辺形になっている
分解した成分が軸に沿っていない



× 垂直抗力 N と $mg\cos\theta$ の
矢印の長さが明らかに違う

2. (2) , 8. 斜面を滑り降りる物体

・作図は丁寧に！



1. 図に作用する力を書き込む
2. 軸の設定を確認する

運動の方向に合わせたほうが都合が良い

斜面に平行に
斜面に垂直に

軸と違う方向を向いている力は
分解して軸にそろえる

3. 初期条件を書き出す

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

軸ごとに運動方程式を立てる

$$ma_x = mg\sin q - f$$

$$ma_y = N - mg\cos q$$

注）向き、正負が重要！

次にそれぞれの条件を適用する

$$f = \mu_k N \quad \Rightarrow \quad ma_x = mg\sin\theta - \mu_k N$$

斜面から飛び出ない $\Rightarrow$ $a_y = 0$

$$m \cdot 0 = N - mg\cos\theta$$

$$N = mg\cos\theta$$

$$ma_x = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

問題文で使用されている文字に合わせると

$$ma = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

となる

等加速度運動を示す $a =$

これが時間に依らないことを示せばよい

$$a = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$$

g, m_k, q は定数なので a は時間に依らず一定である。

従って、この運動は等加速度運動である。

摩擦力がした仕事

運動方程式を見ると

$$ma = mg\sin\theta \underbrace{- \mu_k mg\cos\theta}_{\text{摩擦力}}$$

両辺を x で積分すると

仕事とエネルギーの関係

が導かれる。

従って、

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int\left(mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\right)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int\left(mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\right)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int\left(mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\right)dx$$

ここで、$t=0, x=0, v=v_0$ から$t=t_1, x=L, v=v$ まで動いたとすると

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \left(mg\sin\theta \underbrace{- \mu_k mg\cos\theta\right)L}_{\text{摩擦力による仕事}}$$

従って、摩擦力がした仕事は

$$W_{\text{摩}} = -\mu_k mg\cos\theta\cdot L$$

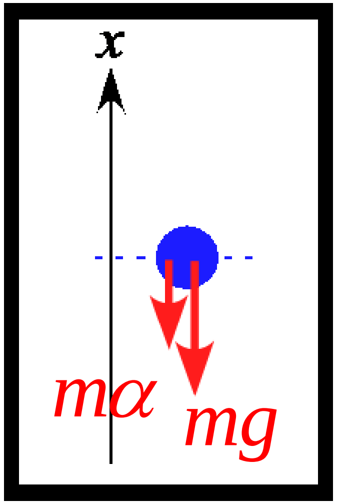
となる。

2. (1) 6. エレベータ内

・作図は丁寧に！

上昇

α



1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ 無し

・慣性力・・・ ma

慣性力は進行方向と逆向きに

(運動する物体の質量) × (動いている座標の加速度)

(エレベータ)

m α

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (上向き正)

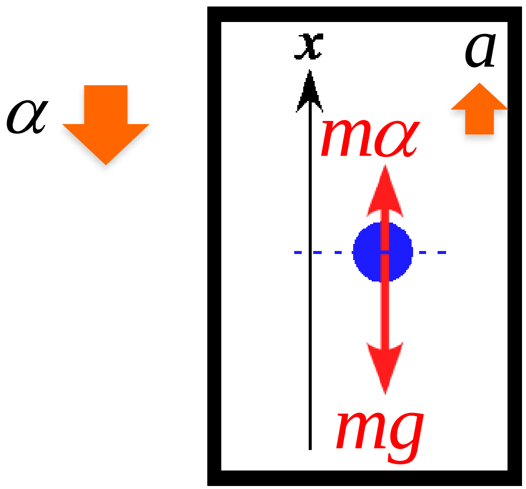
1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg - m\alpha$$

注）向き、正負が重要！

下降



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ 無し

・慣性力・・・ $m\alpha$

慣性力は進行方向と逆向きに

(エレベータ)

運動する物体の質量	×	動いている座標の加速度
m		α

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (上向き正)

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

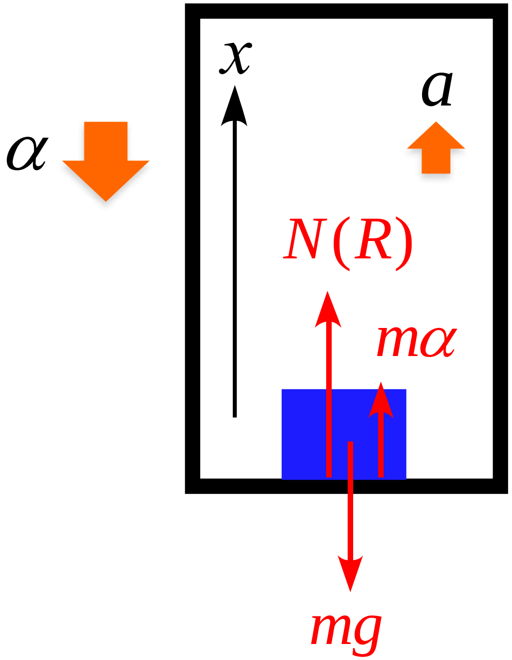
1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg + m\alpha$$

注）向き、正負が重要！

下降



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ 床面からの抗力 $N(R)$

・慣性力・・・ $m\alpha$

慣性力は進行方向と逆向きに

(エレベータ)

運動する物体の質量	×	動いている座標の加速度
m		α

2. 軸の設定を確認する

問題で設定無し（上向き正）

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg + N + m\alpha$$

注）向き、正負が重要！

運動方程式

$$ma = -mg + N + m\alpha$$

床から離れない ⇨ $a = 0$

$$0 = -mg + N + m\alpha$$

$$N = m(g - \alpha)$$

無重量となる境界は $N = 0$ となるとき

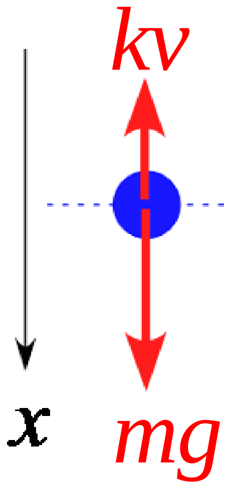
$$N = m(g - \alpha) = 0$$

従って、エレベータの加速度は

$$\alpha = g$$

が必要である

7. 雨滴の落下



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ kv（空気抵抗力）

・慣性力・・・無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている（下向き正）

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = mg - kv$$

注）向き、正負が重要！

この式から $v(t), x(t)$ をを求めることになる

式変形すると

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

(この微分方程式の解き方は数学の授業で)

この微分方程式を解くと

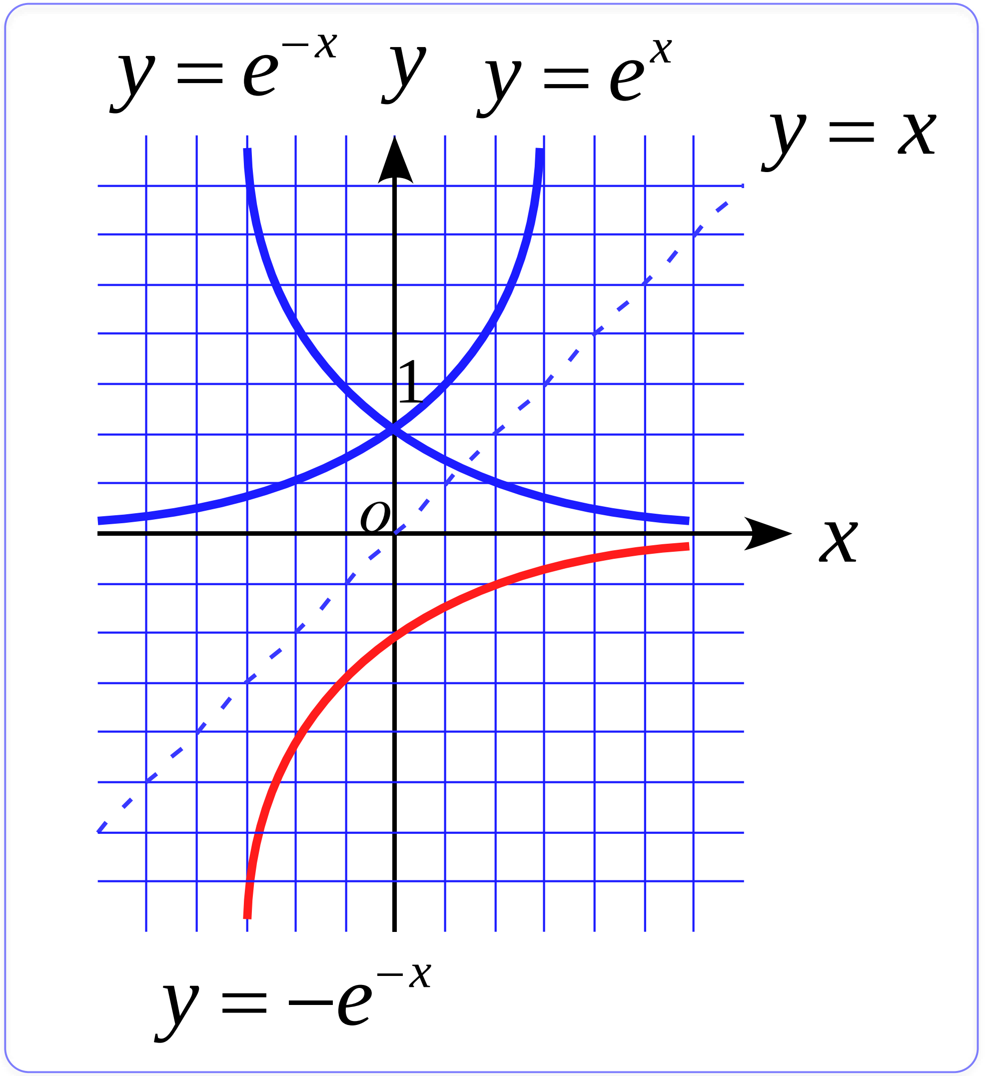
$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

この式を見てみると

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}$$

ざっくりみると $-\frac{1}{e^t}$ のグラフ

であることがわかる



$t=0$ のとき

$$v(0)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}\right)=\frac{mg}{k}(1-1)=0$$

$t=\infty$ のとき

$$v(\infty)=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}\cdot\infty}\right)=\frac{mg}{k}(1-0)=\frac{mg}{k}$$

$t=0$ のときの傾きは

$$\frac{d}{dt}v(t)=\frac{d}{dt}\left[\frac{mg}{k}-\frac{mg}{k}e^{-\frac{k}{m}t}\right]$$

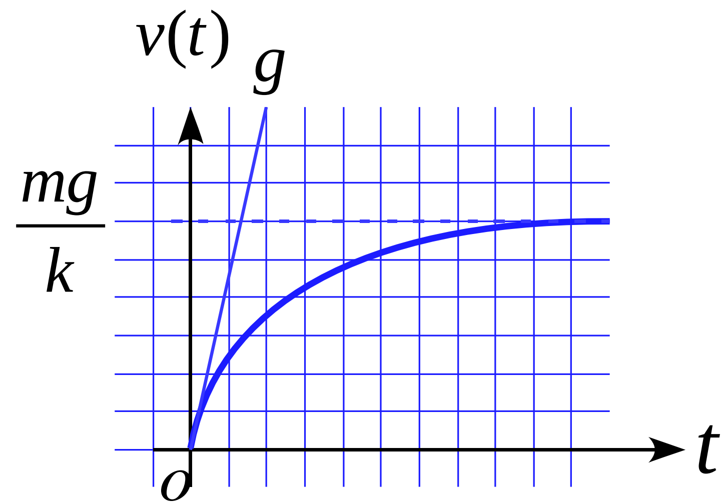
$$=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$\frac{d}{dt}v(0)=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)e^{-\frac{k}{m}\cdot 0}=-\frac{mg}{k}\left(-\frac{k}{m}\right)\cdot 1$$

$$=g$$

グラフを書く時のpoint

- 始点　$t=0$
- 終点　$t=\infty$
- 概形
- 特殊な点



3. , 9. 13. 力のモーメント

回転の運動方程式

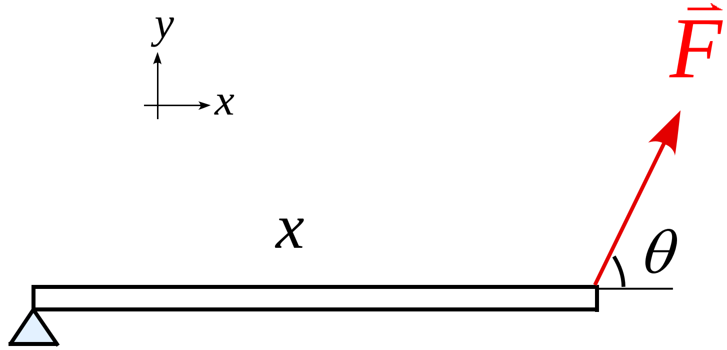
$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\boxed{\vec{r}\times m\vec{v}}}_{\vec{L}}\Big)=\underbrace{\boxed{\vec{r}\times\vec{F}}}_{\vec{N}}$$

力のモーメントは

$$\boxed{\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}}$$

で求めることができる

(1)



$$\vec{r}=\begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F}=\begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

ベクトルの外積

$$\vec{r}\times\vec{F}=\begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_x \end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_yF_z-r_zF_y \\ r_zF_x-r_xF_z \\ r_xF_y-r_yF_x \end{pmatrix}$$

2つのベクトルの外積は

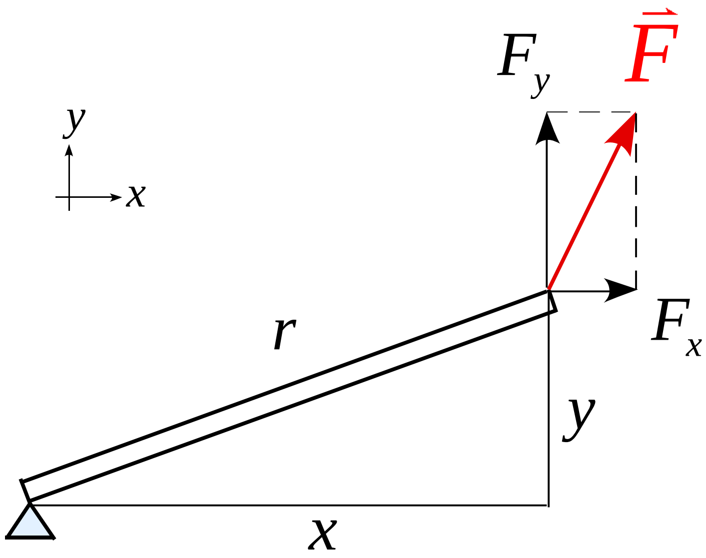
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F\cos\theta \\ F\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 0\cdot F\sin\theta \\ 0\cdot F\cos\theta - x\cdot 0 \\ x\cdot F\sin\theta - 0\cdot F\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF\sin\theta \end{pmatrix}$$

このベクトルの大きさは

$$|\vec{N}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(xF\sin\theta\right)^2}$$

$$= xF\sin\theta$$

(2)



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

2つのベクトルの外積は

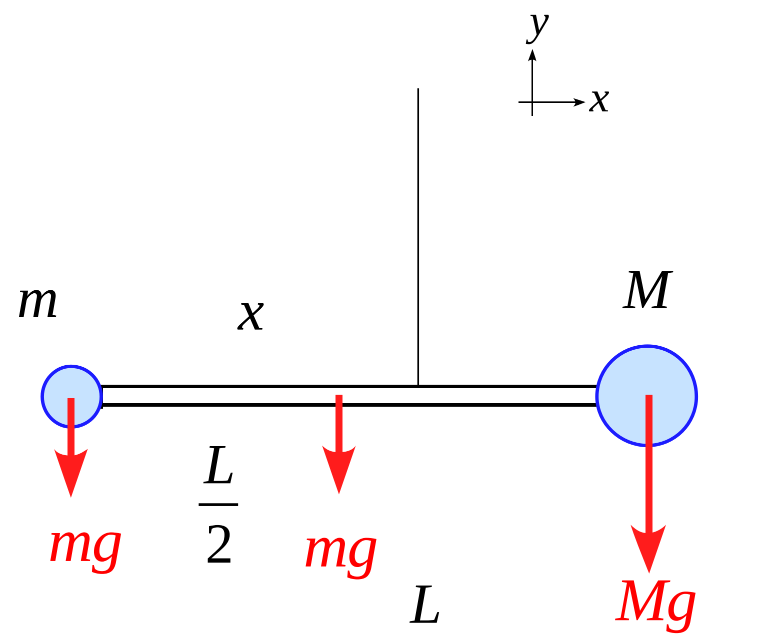
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot F_y \\ 0 \cdot F_x - x \cdot 0 \\ x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$

このベクトルの大きさは

$$|\vec{N}| = \sqrt{0^2 + 0^2 + \left(xF_y - yF_x\right)^2}$$

$$= xF_y - yF_x$$

棒が回転しない条件



回転の運動方程式

$$\frac{d}{dt}\Big(\underbrace{\boxed{\vec{r}\times m\vec{v}}}_{\vec{L}}\Big)=\underbrace{\boxed{\vec{r}\times\vec{F}}}_{\vec{N}}$$

力のモーメントと角運動量の関係を導く

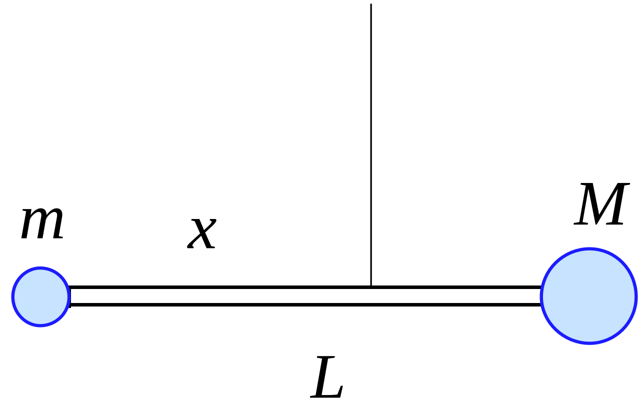
左側の物体について

$$\vec{r}=\begin{pmatrix}-x\\0\\0\end{pmatrix}\qquad \vec{F}=\begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_1=\vec{r}\times\vec{F}=\begin{pmatrix}-x\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\-mg\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 0-0\cdot(-mg)\\0\cdot 0-(-x)\cdot 0\\-x\cdot(-mg)-0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\xmg\end{pmatrix}$$

右側の物体について

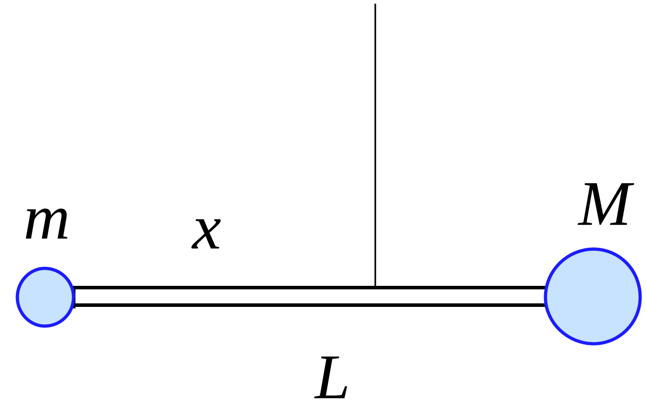
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{N}_2 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot 0 - 0\cdot(-Mg) \\ 0\cdot 0 - (L-x)\cdot 0 \\ (L-x)\cdot(-Mg) - 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)Mg \end{pmatrix}$$

棒について

棒の質量を考える ⇨ 棒の重心で力を表す



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -\left(x - \dfrac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_3 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -\left(x - \dfrac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-mg) \\ 0 \cdot 0 - \left(-\left(x - \dfrac{L}{2}\right)\right) \cdot 0 \\ -\left(x - \dfrac{L}{2}\right) \cdot (-mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x - \dfrac{L}{2}\right) mg \end{pmatrix}$$

従って、回転の運動方程式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}_1+\vec{N}_2+\vec{N}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\xmg\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\-\left(L-x\right)Mg\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\left(x-\dfrac{L}{2}\right)mg\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0\\0\\xmg-\left(L-x\right)Mg+\left(x-\dfrac{L}{2}\right)mg\end{pmatrix}$$

成分で表示すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\begin{pmatrix}\dfrac{dL_x}{dt}\\ \dfrac{dL_y}{dt}\\ \dfrac{dL_z}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ xmg-(L-x)Mg+\left(x-\dfrac{L}{2}\right)mg\end{pmatrix}$$

角運動量の時間変化が $\frac{d\vec{L}}{dt}=0$ であれば棒は回転しない

即ち、

$$\frac{dL_z}{dt}=xmg-(L-x)Mg+\left(x-\frac{L}{2}\right)mg=0$$

であればよい

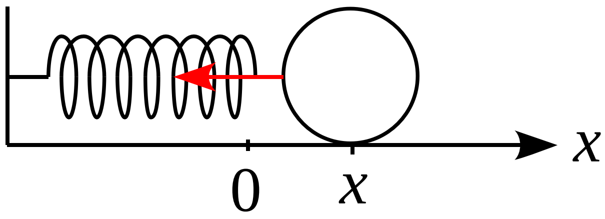
$$xmg - LMg + xMg + xmg - \frac{L}{2}mg = 0$$

$$\left(2m + M\right)x = LM + \frac{L}{2}m$$

$$x = \frac{2M + m}{2\left(2m + M\right)}L$$

となる

4. , 5. 単振動



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \delta)\ ,\omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

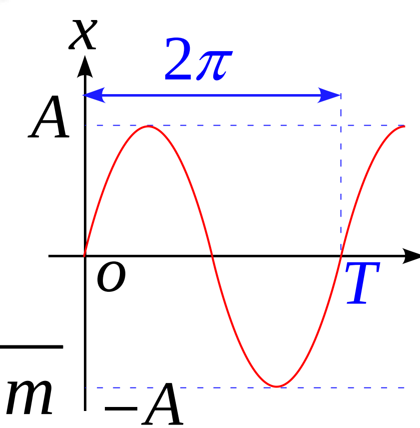
ωについて

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}A\sin(\omega t + \delta)$$

周期 T について



$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

初期条件から単振動の式を計算する

(1) $x(0)=0, v(0)=v_0$

(2) $x(t_1)=x_0, v(t_1)=0$

単振動の一般解の式に初期条件を代入し

A, ϕ or α, β

を求める

(1) $x(0)=A\sin\left(\omega\cdot 0+\phi\right)=0$

$$\sin\phi=0$$

$$\phi=0$$

$$v(0)=A\omega\cos\left(\omega\cdot 0+0\right)=v_0$$

$$A\omega=v_0$$

$$A=\frac{v_0}{\omega}$$

単振動の一般解

$$\boxed{\begin{aligned} x(t)&=A\sin\left(\omega t+\phi\right)\\ &=\alpha\sin\omega t+\beta\cos\omega t \end{aligned}}$$

$$\Big\Downarrow \quad v=\frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{\begin{aligned} v(t)&=\omega A\cos\left(\omega t+\phi\right)\\ &=\omega\alpha\cos\omega t-\omega\beta\sin\omega t \end{aligned}}$$

$$x(t)=\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

(2) $x(t_1)=x_0, v(t_1)=0$

$$v(t_1)=A\omega\cos\left(\omega t_1+\phi\right)=0$$

$A\omega\neq 0$なので

$$\cos\left(\omega t_1+\phi\right)=0$$

$$\omega t_1+\phi=\frac{\pi}{2}$$

$$\phi=\frac{\pi}{2}-\omega t_1$$

$$x(t_1)=A\sin\left(\omega t_1+\phi\right)=x_0$$

$$A\sin\left(\omega t_1+\frac{\pi}{2}-\omega t_1\right)=x_0$$

$$A\sin\frac{\pi}{2}=x_0$$

単振動の一般解

$$\boxed{x(t)=A\sin\left(\omega t+\phi\right)}$$

$$\Big\downarrow \quad v=\frac{dx}{dt}$$

$$\boxed{v(t)=\omega A\cos\left(\omega t+\phi\right)}$$

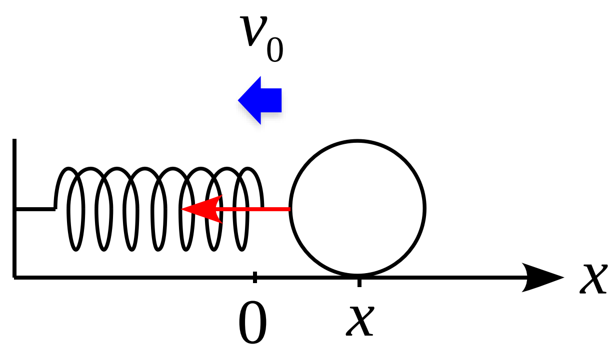
$$A=x_0$$

$$x(t)=x_0\sin\left(\omega t+\frac{\pi}{2}-\omega t_1\right)$$

$$=x_0\sin\left(\omega t-\omega t_1+\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=x_0\cos\omega\left(t-t_1\right)$$

単振動



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{x(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right) \ , \omega^2 = \frac{k}{m}}$$

このモデルの初期条件は

初速度は壁向き

$$x(0) = 0, v(0) = -v_0$$

この条件を単振動の一般解に代入し、

A, ϕ を求める

$$x(0) = A\sin\left(\omega \cdot 0 + \delta\right) = 0$$

$$\sin\delta = 0$$

$$\delta = 0$$

$$v(0) = \omega A\cos\left(\omega \cdot 0 + \delta\right) = -v_0$$

$$A = -\frac{v_0}{\omega}$$

従って

$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t$$

となる

問題で指定されている文字を用いると

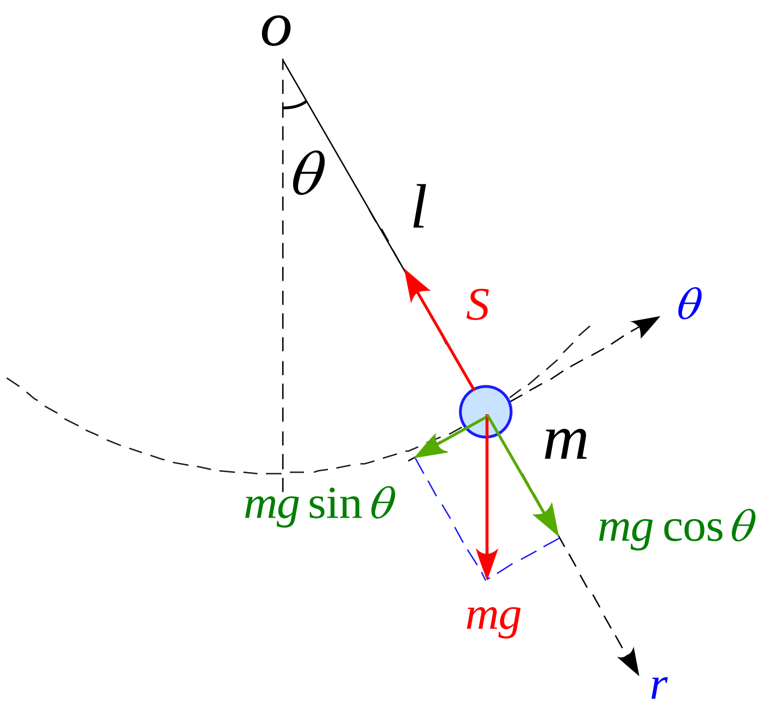
$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega}\sin\omega t = -v_0\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$v(t) = -\frac{v_0}{\omega}\omega\cos\omega t = -v_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$a(t) = v_0\omega\sin\omega t = v_0\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

となる

2. (3) , 10. 11. 13. 単振り子～円運動



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力・・・ mg

・接触力・・・ S （糸の張力）

・慣性力・・・ 無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている（極座標）

何はともあれ、運動方程式

$$ma_r = mg\cos\theta - S$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = mg\cos\theta - S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

一般的な極座標表示 (速度)

$$\boxed{v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}}$$

運動方程式の θ 方向の式に着目

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

糸の長さは $r = l$ **(一定) なので** $\frac{dr}{dt} = 0$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

さらに、極座標表示において θ 方向の速度は一般的に $\boxed{v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}}$ **であるから**

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l}}$$

式変形 ⇨

$$d\theta = \frac{v_\theta}{l}dt$$

⇩ t **で微分(二階微分)**

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

と表される。

θ 方向の運動方程式より

$$ml\frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt} = -mg\sin\theta$$

$$m\frac{dv_\theta}{dt} = -mg\sin\theta$$

$ld\theta$ で積分すると

$$\int m\frac{dv_\theta}{dt}ld\theta = \int(-mg\sin\theta)ld\theta$$

$$\int m\frac{dv_\theta}{dt}l\frac{v_\theta}{l}dt = \int(-mg\sin\theta)ld\theta$$

$$\int mv_\theta\frac{dv_\theta}{dt}dt = \int(-mgl\sin\theta)d\theta$$

$$\boxed{\int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right)dt = \int(-mgl\sin\theta)d\theta}$$

ある角 θ での仕事とエネルギーの関係式

この式に条件に合った積分区間を指定する

r 方向の運動方程式より

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - T$$

$$T = mg\cos\theta + ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$= mg\cos\theta + ml\left(\frac{v_\theta}{l}\right)^2$$

$$\boxed{T = mg\cos\theta + m\frac{v_\theta^2}{l}}$$

ある角 θ での張力 T

この式に条件を適用する

ある角 θ での仕事とエネルギーの関係式

$$\boxed{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right)dt = \int(-mgl\sin\theta)\,d\theta}$$

$t=0$ で $\theta = -\frac{\pi}{2}, v_\theta = 0$

$t=t_B$ で $\theta = 0, v_\theta = v_B$

$$\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2\right]_0^{v_B} = mgl\left[\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mgl\left[\cos 0 - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgl(1-0)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_B^2 = mgl} \leftarrow$$

点Bでの仕事とエネルギーの関係式

$$v_B = \sqrt{2gl}$$

ある角 θ での張力 T

$$\boxed{T = mg\cos\theta + m\frac{v_\theta^2}{l}}$$

点Bで $\theta = 0, v_\theta = v_B$

$$T_B = mg\cos 0 + m\frac{v_B^2}{l}$$

$$= mg + m\frac{\left(\sqrt{2gl}\right)^2}{l}$$

$$= mg + m\frac{2gl}{l}$$

$$= 3mg$$

ある角 θ での仕事とエネルギーの関係式

$$\boxed{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right)dt = \int(-mgl\sin\theta)\,d\theta}$$

$t=0$ で $\theta = -\dfrac{\pi}{2}, v_\theta = 0$

$t=t_C$ で $\theta = \theta_C, v_\theta = v_C$

$$\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2\right]_0^{v_C} = mgl\left[\cos\theta\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_C}$$

$$\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mgl\left[\cos\theta_C - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_C^2 = mgl\cos\theta_C}$$

点Cでの
仕事と
エネルギーの
関係式

$$v_C = \sqrt{2gl\cos\theta_C}$$

ある角 θ での張力 T

$$\boxed{T = mg\cos\theta + m\frac{v_\theta^2}{l}}$$

点Cで $\theta = \theta_C, v_\theta = v_C$

$$T_C = mg\cos\theta_C + m\frac{v_C^2}{l}$$

$$= mg\cos\theta_C + m\frac{\left(\sqrt{2gl\cos\theta_C}\right)^2}{l}$$

$$= mg\cos\theta_C + m\frac{2gl\cos\theta_C}{l}$$

$$= 3mg\cos\theta_C$$