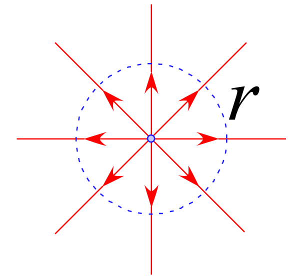
# クーロン力～ガウスの法則

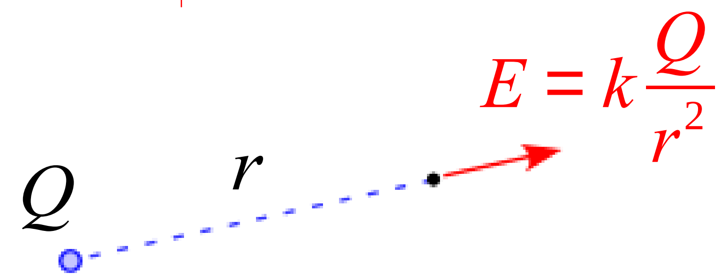
任意の3次元空間中に点電荷 $Q$ が固定してある

この点電荷から距離 $r$ の位置の電場は




$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

と表せる

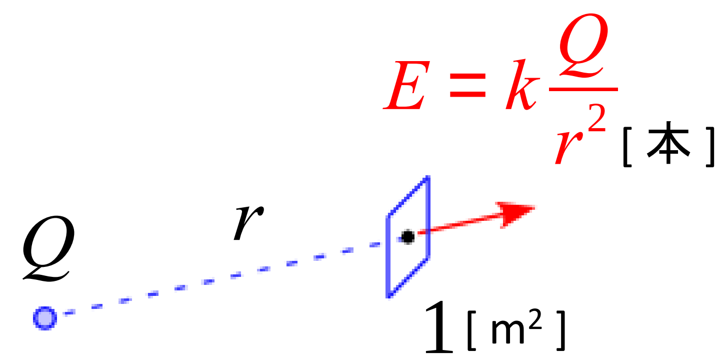



ここで電気力線について考える

電気力線も電場と同じ向きである

電場の大きさを表すのに電気力線の本数を考える

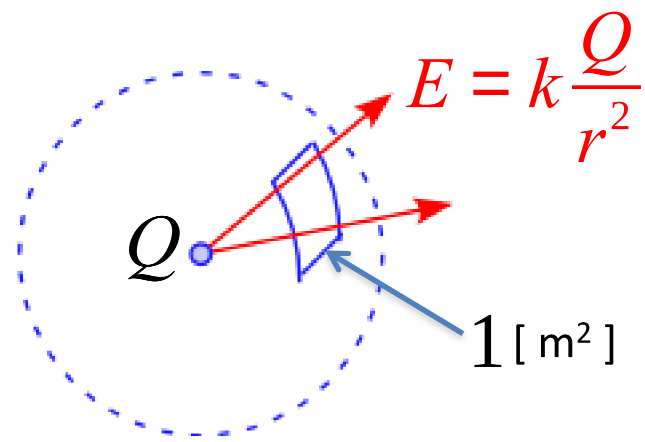
単位面積当たり $E$ 本の電気力線を引くとする




電気力線の密度を見ることで電場の大きさを視覚的にとらえることができる

この点電荷 $Q$ から出る電気力線の総本数 $N$ を求める

この点電荷から3次元的に放射状に電気力線が
出ているので




半径 $r$ の球の面積を $S$ とすると

$$
\begin{aligned}
N &= E \cdot S \\
&= k\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 \\
&= 4pkQ \ [\text{本}]
\end{aligned}
$$

形状に関する量 $r$
が含まれていない

帯電体の形状に関係ない

ガウスの法則

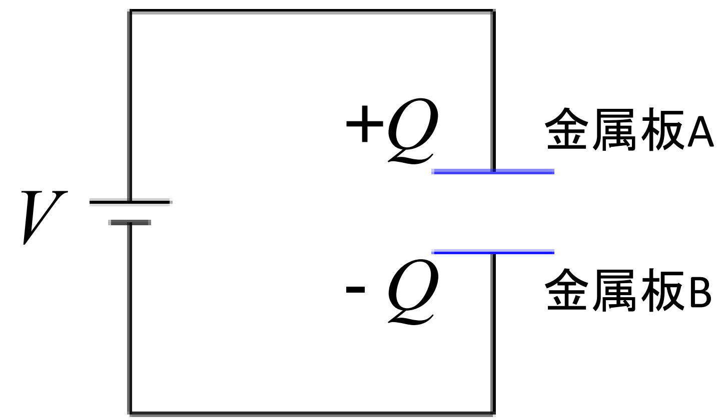
単位面積当たり $E$ 本の電気力線を引くとすると

電荷 $Q$ から湧き出す電気力線の総本数 $4pkQ$ [ 本 ]である

# コンデンサー

2枚の平面金属極板を平行に設置したものを考える

更に電池を接続し、図のような回路にした




電池は金属板Aの自由電子を金属板Bへ運ぶ

↓

金属板はそれぞれ正負に帯電

↓

A,Bの電位差が電池の電位差と等しくなる

↓

自由電子の移動が止まる

電池を切り離しても電荷は失われない ( A上の電荷とB上の電荷は引きあう為 )

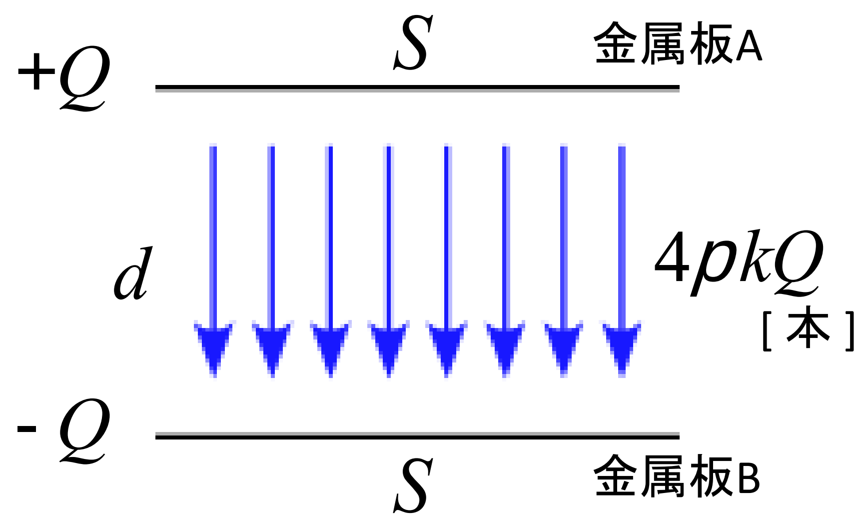
電気(電荷)を蓄える装置

金属板に蓄えられる電気量は互いに大きさが等しく、異符号の電気量

# コンデンサー～ガウスの法則

平面上の電荷なのでガウスの法則を考える

電気力線の総本数は $4pkQ$ [ 本 ]
であるから図のようになる



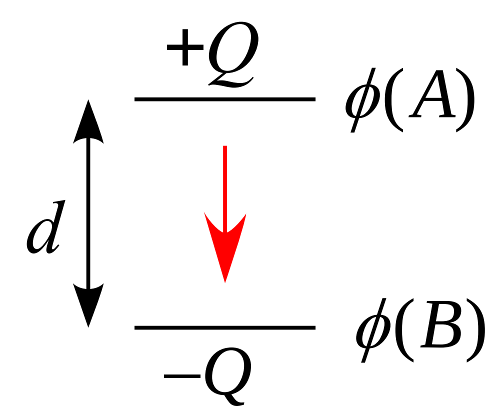

単位面積当たりの電気力線の本数は
電場の大きさに等しい

よって、コンデンサーの電極板の
電場の大きさは極板面積を $S$ とすると

$$E = \frac{4pkQ}{S}$$

ここで、AB間の電位差を $V$ 、極板間隔を $d$ とすると
位置エネルギーと仕事の関係から

$$V = \phi(B) - \phi(A) = E \cdot d$$

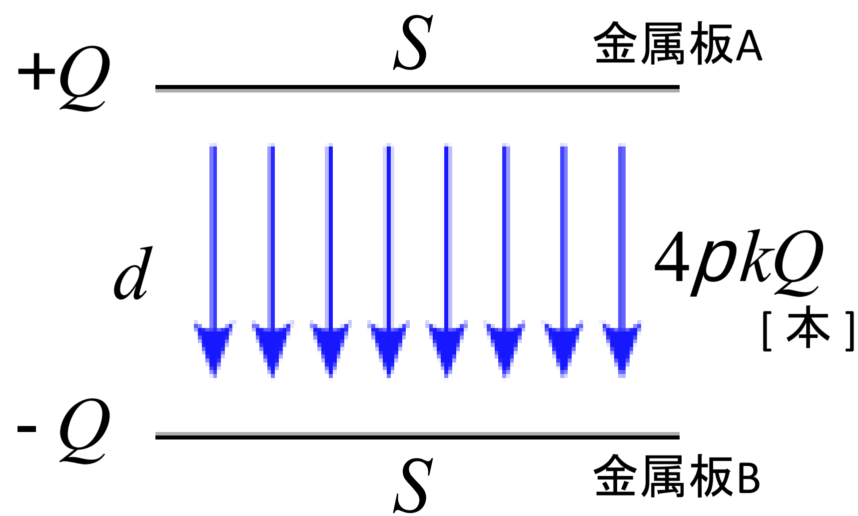


# コンデンサー～ガウスの法則

従って、電場 $E$ は

$$E = \frac{4pkQ}{S} = \frac{V}{d}$$

となる




蓄えられる電気量 $Q$ は

$$Q = \frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}\cdot V$$

となり、AB間の電位差を $V$ に比例していることがわかります

この比例定数は

$$C = \boxed{\frac{1}{4pk}}\frac{S}{d}$$ [ F ]　静電容量　キャパシタンス

と表される

真空中では「真空誘電率」$e_0$ で表される

# コンデンサー～静電エネルギー

コンデンサーの極板に電荷が蓄えられる際

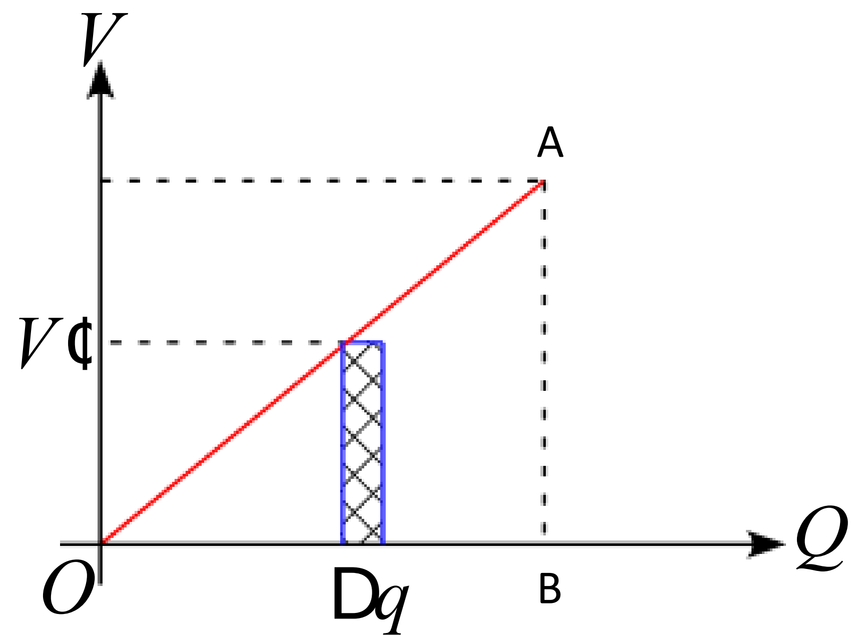
**極板間の電位差に逆らって電荷を運ぶのに仕事を要する**

$$Q=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}\cdot V=CV$$

と表される

式変形して

$$V=\frac{Q}{C}$$




これをグラフで表すと、図の様になります

充電途中で電位差が $V$¢になったとき

微小電気量 D$q$ を充電するために要する仕事は

$$\mathrm{D}W=\mathrm{D}qV'$$

と表される

# コンデンサー～静電エネルギー

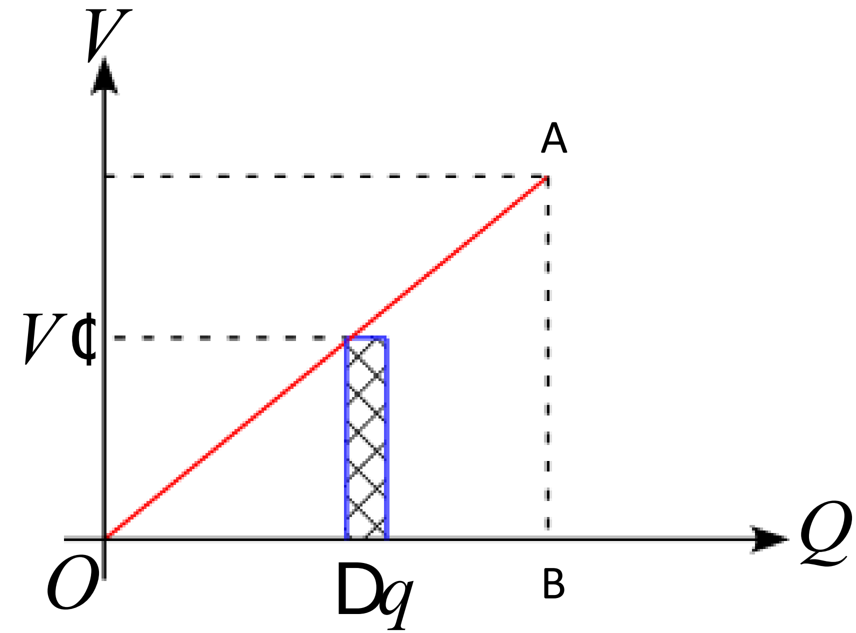
よって、電位差 $V$ まで充電に要する全仕事は

$$W = \frac{1}{2}QV$$

従って、コンデンサーの静電エネルギーは

$$\boxed{U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}}$$

となる



# コンデンサー

$$Q = CV$$

$$C = \frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

$Q$ : 蓄えられる電気量

$C$ : 静電容量

$V$ : 電位差

$S$ : 極板面積

$d$ : 極板間距離

$\varepsilon_0$ : 真空誘電率

$k$ : クーロン定数

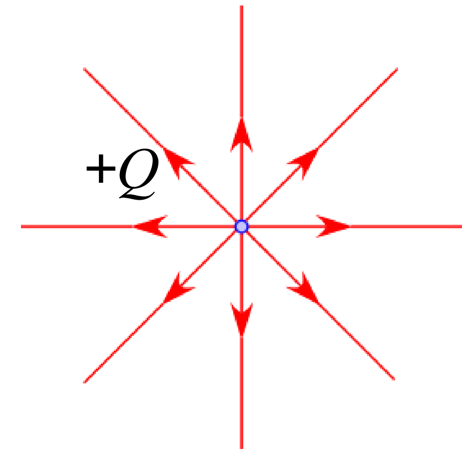
$U$ : 静電エネルギー

# クーロンの法則～ガウスの法則

点電荷 $Q$ から距離 $r$ 離れたところでの電場の大きさは

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4pe_0 r^2}$$

であり、向きは点電荷から放射上になっている




単位面積当たり $E$ 本の電気力線を引く

電場の球面 $S$ に対する積分はこれに球の表面積をかけたものでなくてはならない

従って、

$$\text{全電気力線数} = \int_{\text{surface S}} EdS = \boxed{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \cdot \boxed{4\pi r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

電場

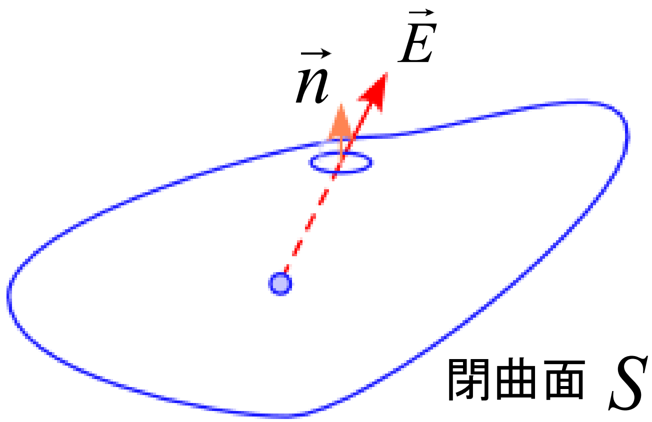
球の表面積

# クーロンの法則～ガウスの法則

任意の閉曲面を考えた場合

面に対する法線単位ベクトル $\vec{n}$ を導入すると

$$\text{全電気力線数} = \int_{\text{closed surface S}} \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$




点電荷ではなく、任意の大きさの帯電体とし

電荷密度を $r$ で表すと

$$Q = \int_{\text{volume V}} \rho dV$$

となるので、

$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

積分形のガウスの法則

となる

# クーロンの法則～ガウスの法則

正電荷 $Q$ から湧きだした電気力線は、負電荷に吸い込まれるまで途中で増えたり減ったりしない

電気力線の保存

定義より

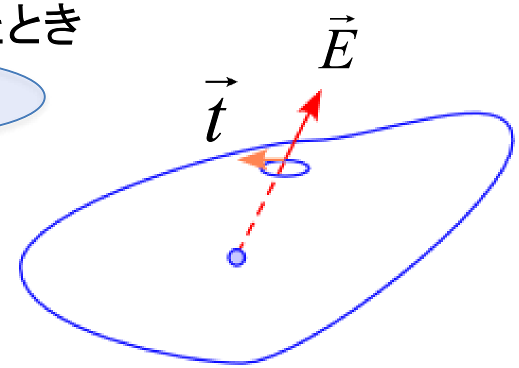
電気力線　:試験電荷が着目電荷から受ける力によって移動する道筋

ここで、ある任意の閉曲面 $S$ 上の任意の閉曲線 $C$ を考えたとき単位接線ベクトル $\vec{t}$ を導入すると

仕事量

$$\int_{C} \vec{E} \cdot \vec{t} ds = 0$$

$C$ 上の微小距離




が成立する

正電荷 $Q$ から湧きだした電気力線は、正電荷のまわりに電気力線の渦を作ることはない

無渦条件

# ガウスの法則～積分形

以上をまとめると

任意の面 $S$ を垂直に横切る電気力線の総数は内部電気量に依存し、

比例定数は $\dfrac{1}{e_0}$ である

$$\underbrace{\int_{\mathrm{S}} \vec{E}\cdot\vec{n}dS}_{\text{電気力線の総数}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_{\mathrm{V}} \rho dV}_{\text{内部電気量}}$$

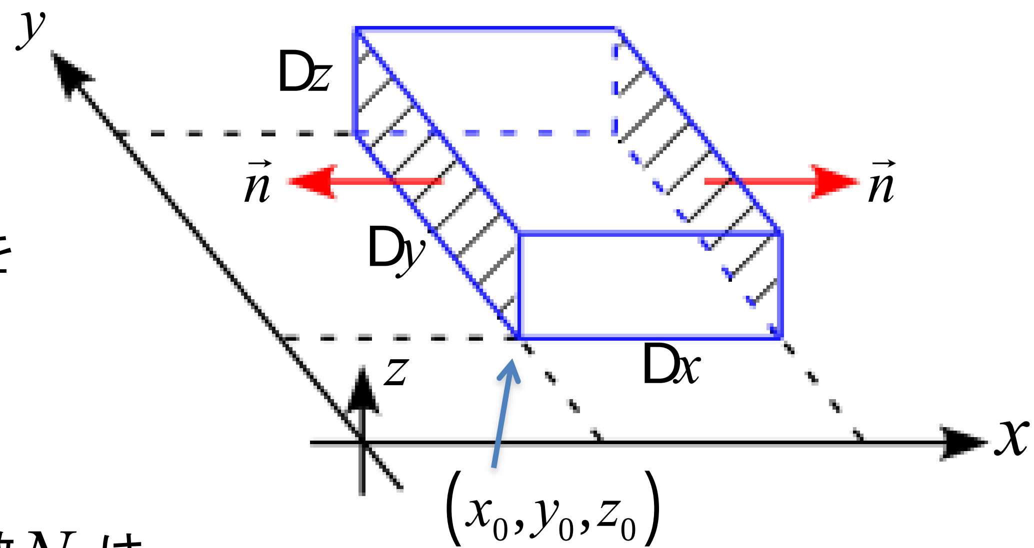
正電荷のまわりに電気力線の渦はできない

$$\int_{\mathrm{C}} \vec{E}\cdot\vec{t}ds = 0$$

# ガウスの法則～微小部分

図のような直方体を考える

斜線の2つの面に着目する




電場 $E$ の面に垂直な成分は $E_x$

それぞれの位置での電場の成分を

$$E_x(x_0) \quad E_x(x_0 + Dx)$$

と表すとする

$x$ 方向に湧きだす電気力線の総数 $N_x$ は

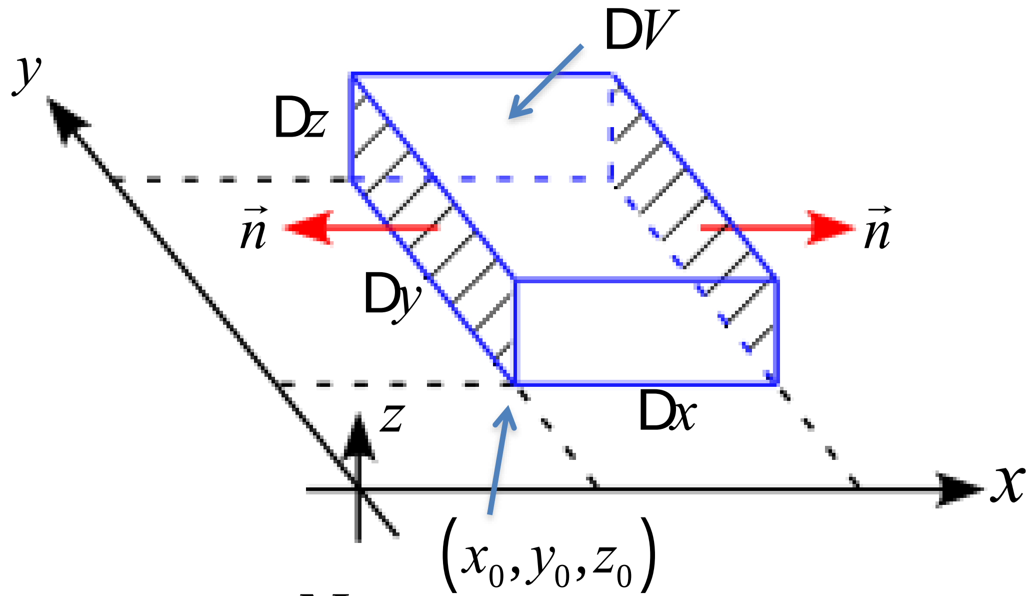
$$N_x = E_x(x_0 + Dx)DyDz - E_x(x_0)DyDz$$
$$= \{E_x(x_0 + Dx) - E_x(x_0)\}DyDz$$
$$= \frac{\partial E_x}{\partial x} Dx \cdot DyDz$$

近似式(テーラー展開)

$$E_x(x_0 + Dx)$$
$$\approx E_x(x_0) + \left[\frac{dE_x(x)}{dx}\right]_{x=x_0} \cdot Dx$$

# ガウスの法則～微小部分

同様に、$y, z$ 方向については




$$N_y = \frac{\partial E_y}{\partial y} Dy \cdot Dx Dz$$

$$N_z = \frac{\partial E_z}{\partial z} Dz \cdot Dx Dy$$

よって、この直方体から湧きだす電気力線の総数 $N$ は

$$N = N_x + N_y + N_z$$

$$= \left( \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) Dx Dy Dz$$

$$= \left( \nabla \cdot \vec{E} \right) DV$$

微小体積 $DV$ から湧き出す電気力線の総数

となる

# ガウスの法則～微小部分

任意の体積 $V$ に対しては

$$N_{\mathrm{total}} = \int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \vec{E} dV$$

ここで、

$$\text{全電気力線数} = \int_{\mathrm{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathrm{V}} \rho dV$$

であるから、

$$\int_{\mathrm{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \vec{E} dV$$

となり、２つの式を比較すると

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{e_0} \int_{\mathrm{V}} r dV$$

# ガウスの法則～微小部分

被積分関数を比較すると

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r}{e_0}$$

書きかえると

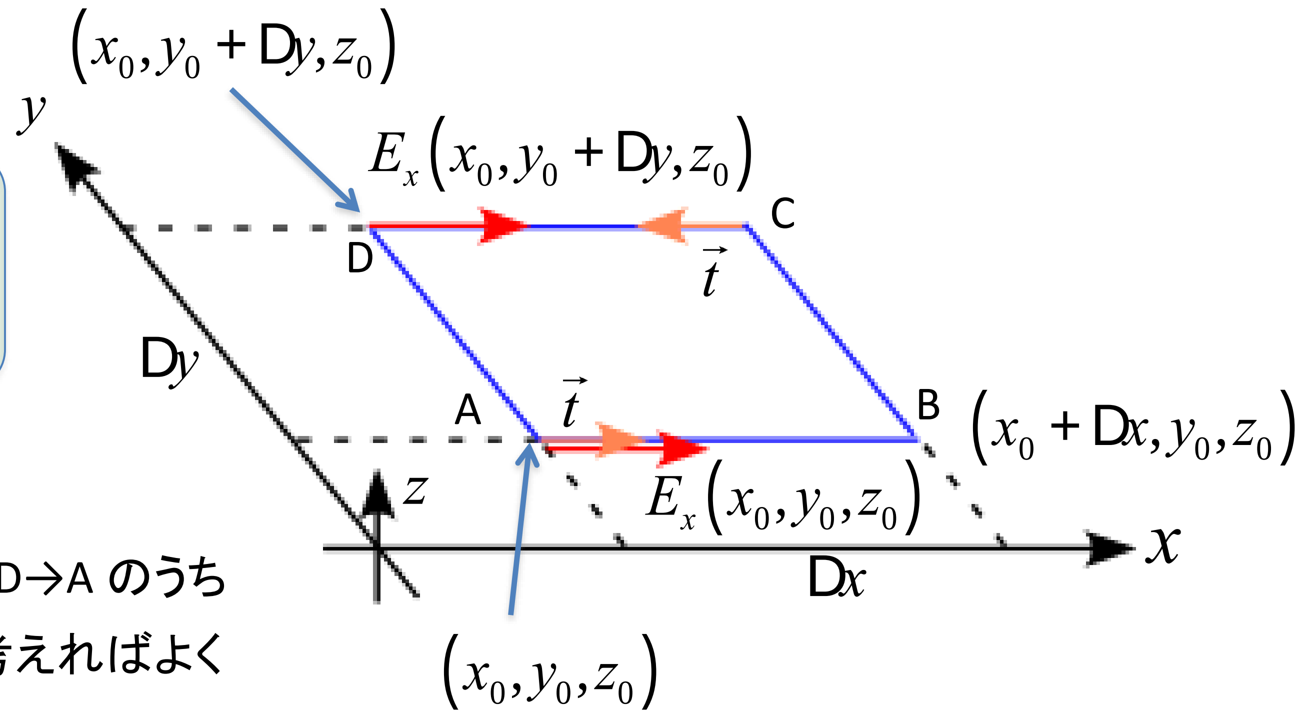
$$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{r}{e_0}$$

と表すことができる

# ガウスの法則～微小部分

無渦条件についても微小部分を考えると

図のような微小な
長方形1周の電場に
ついて考える




$x$ 成分では

A→B + B→C + C→D +D→A のうち

A→B + C→D のみを考えればよく

$$E_x\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot \Delta x - E_x\left(x_0, y_0 + \Delta y, z_0\right)\cdot \Delta x$$

$$= \left\{E_x\left(x_0, y_0, z_0\right) - E_x\left(x_0, y_0 + \Delta y, z_0\right)\right\}\cdot \Delta x$$

# ガウスの法則～微小部分

$$= -\left\{\frac{E_x\left(x_0, y_0+\Delta y, z_0\right) - E_x\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta y}\Delta y\right\}\cdot\Delta x$$

$$= -\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y\Delta x$$

$y$ 成分では

B→C + D→A のみを考えればよく

$$E_y\left(x_0+\Delta x, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y - E_y\left(x_0, y_0, z_0\right)\cdot\Delta y$$

$$=\left\{E_y\left(x_0+\Delta x, y_0, z_0\right) - E_y\left(x_0, y_0, z_0\right)\right\}\cdot\Delta y$$

$$=\left\{\frac{E_y\left(x_0+\Delta x, y_0, z_0\right) - E_y\left(x_0, y_0, z_0\right)}{\Delta x}\Delta x\right\}\cdot\Delta y$$

$$=\frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\Delta y$$

# ガウスの法則～微小部分

従って、長方形1周分は

$$\left( \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \mathrm{D}x \mathrm{D}y = \left( \nabla \times \vec{E} \right)_z \mathrm{D}x \mathrm{D}y = \left( \nabla \times \vec{E} \right)_z \mathrm{D}S$$

となり、$\nabla$と電場ベクトル $\vec{E}$ の外積の $z$ 成分として表すことができる

全ての成分について計算をし、任意の面積 $S$ に対して積分を行うと

$$\int_{\mathrm{S}} \left( \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{n} \, dS$$

と書くことができる

従って、

$$\int_{\mathrm{C}} \left( \vec{E} \cdot \vec{t} \right) ds = \int_{\mathrm{S}} \left( \nabla \times \vec{E} \right) \cdot \vec{n} \, dS = 0$$

# ガウスの法則～微小部分

従って、

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

が得られる

書きかえると

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$$

と表すことができる

# ガウスの法則～微分形

以上をまとめると

微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r}{e_0} \qquad \left( \mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{r}{e_0} \right)$$

微分形の無渦条件

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \left( \mathrm{rot}\, \vec{E} = 0 \right)$$

# ガウスの定理～ストークスの定理

積分系と微分形を関連付けた式

$$\int_{S} \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \int_{V} \nabla\cdot\vec{E}dV$$

$$\int_{C} \left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds = \int_{S} \left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

は一般のベクトル $\vec{A}$ に対しても成立する

$$\int_{S} \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_{V} \nabla\cdot\vec{A}dV$$

ガウスの定理 (面積積分と体積積分の関係)

$$\int_{C} \left(\vec{A}\cdot\vec{t}\right)ds = \int_{S} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

ストークスの定理 (線積分と面積積分の関係)

# ラプラスの方程式

微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{r}{e_0}$$

に、電場と静電ポテンシャルの関係式

$$\vec{E} = -\nabla f$$

を適用し、成分を考えると

$$\nabla \cdot \vec{E} = \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left( E_x, E_y, E_z \right)$$

$$= \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left( -\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, -\frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left( -\frac{\partial f}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left( -\frac{\partial f}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left( -\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

# ラプラスの方程式

従って、

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f$$

ここで、演算子$\nabla^2$ を

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と定義すると

$\nabla^2$:ラプラシアン

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 f$$

従って、

$$\nabla^2 f = -\frac{r}{e_0}$$

ポアソンの式 (静電ポテンシャルと電荷の関係式)

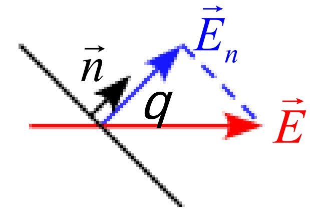
特に、真空中に電荷が存在しない場合

$$\nabla^2 f = 0$$

ラプラスの方程式

が得られる

# ガウスの法則～ポイント




注意点

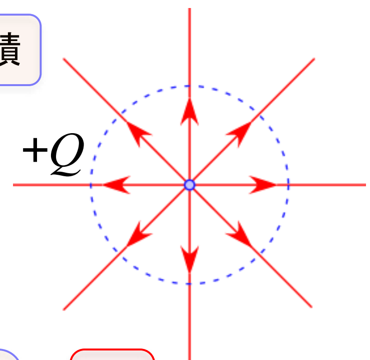
ガウスの約束事

単位面積あたりの電気力線の本数を $E$ [ 本 ] とする

全電気力線数 $= E \cdot S$

単位面積当たりの本数 × 全面積

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot S$$




例えば、半径 $r$ の球を閉曲面としたら

$$\text{全電気力線数} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

即ち、$+Q$ の電荷から出てくる全電気力線数は $Q/e_0$ [ 本 ] ある

ガウスの法則は

$$E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

と書ける

電場が求められる

一般化

・ $E$ は電場の大きさだが、面に垂直な成分

$$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n} = \left|\vec{E}\right|\left|\vec{n}\right| \cos\theta$$

$$\int_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_n \cdot S$$

・電荷 (電気量) は点電荷でない場合は

体積密度 : r $\quad Q = \int_V \rho dV = \rho \cdot V$

面密度 : s $\quad Q = \int_S \sigma dS = \sigma \cdot S$

線密度 : r $\quad Q = \int_l \rho dl = \sigma \cdot l$

$$\text{全電気力線数} = \int_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\text{Volume}} \rho dV$$

$$E_n \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \text{全電気量}$$

# ガウスの法則～例題

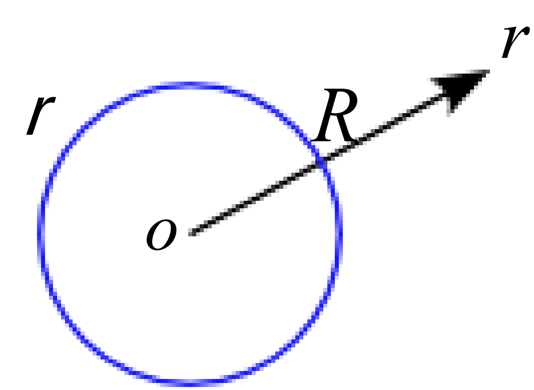
図のように、半径$R$の球の内部に単位体積あたり電気量$r(>0)$の荷電粒子が一様に分布しているとする。

以下の問に答えよ。

(1) この球の中心から距離$r(\geq R)$での電場の大きさ$E\left(r\right)$を求めよ。

(2) この球の中心から距離$r($£ $R)$での電場の大きさ$E\left(r\right)$を求めよ。

(3) 球の内外につくる静電場を距離$r$の関数としてグラフを書け。

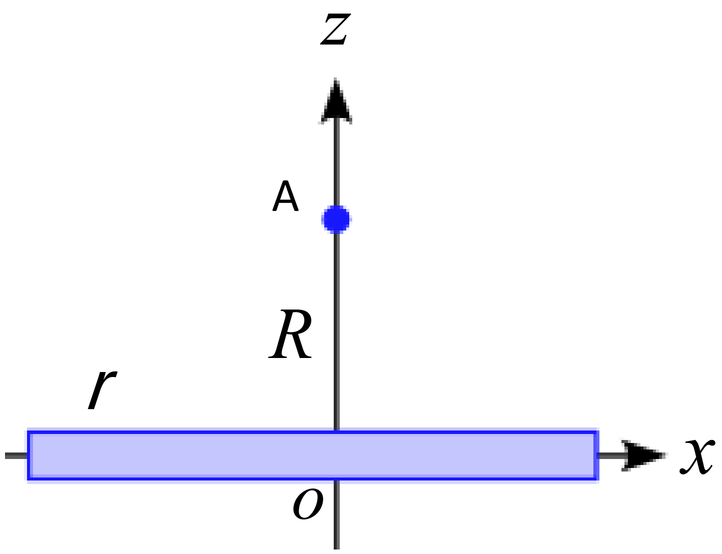


# ガウスの法則～線電荷

単位長さあたりの電気量(線密度)が $r$ である無限に長い直線上の電荷がある。

直線から距離 $R$ にある点Aでの電場の大きさを求めよ。

但し、線の太さは無視できるものとする。



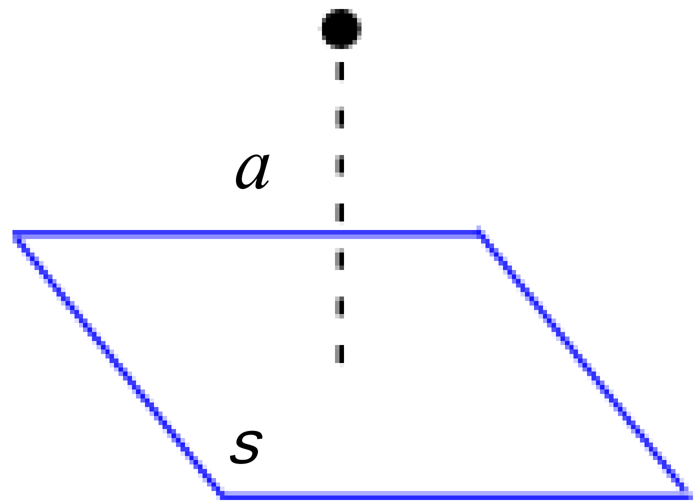
# ガウスの法則～面電荷

無限に広い平面がある。

この平面上に面密度 $s$ で一様に電荷が分布しているとする。

この平面から距離 $a$ だけ離れた点での電場の大きさを求めよ。

但し、真空誘電率は $e_0$ とする。



# ガウスの法則～円筒

図のような半径 $a$ の無限に長い円筒の表面に単位長さ当たり $r$ の電荷量が一様に分布している。

(1) 円筒の外側 $z(\geq a)$ に生ずる電場を求めよ。

(2) 円筒の内側 $z(\pounds\ a)$ に生ずる電場を求めよ。