運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

仕事とエネルギーの関係

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を、xで積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int \boxed{m\frac{dv}{dt}} v dt = \int Fdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int Fdx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{v_1}^{v_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

力 Fが一定であるとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

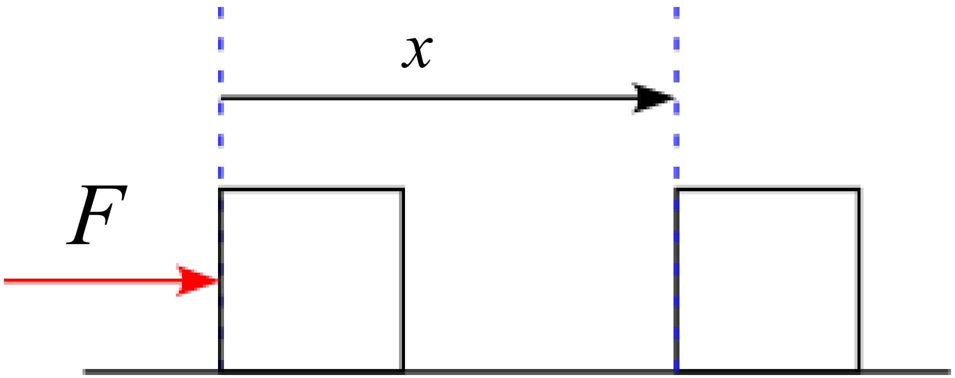
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事とエネルギー

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き

物体に力を加えて、
物体を移動させる事



運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

定義

力 Fが物体にした仕事W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

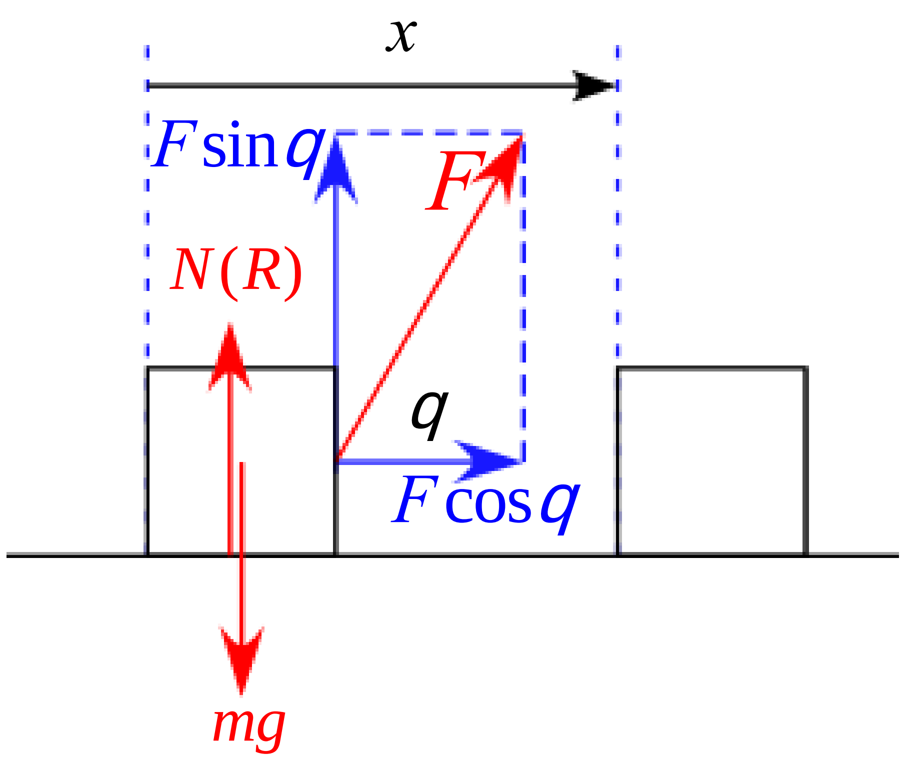
と定義される。

「力 Fが物体に仕事 Wをした」
「物体は力 Fに仕事Wをされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]}[L] = \frac{[L^2M]}{[T^2]}$$

斜め上に引っ張る

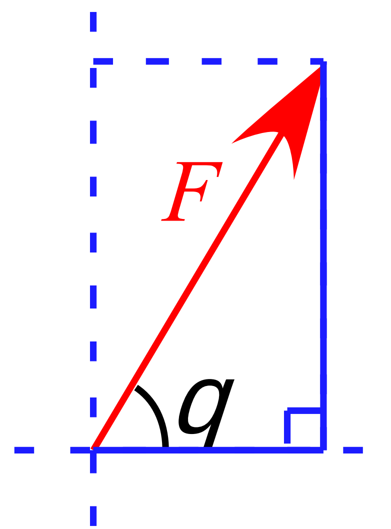


物体に作用する力

場の力:重力 mg
接触力:張力 F
垂直抗力 $N(R)$

仕事をしていない

垂直抗力: N
場の力:重力 mg
F の y 成分: $F\sin q$



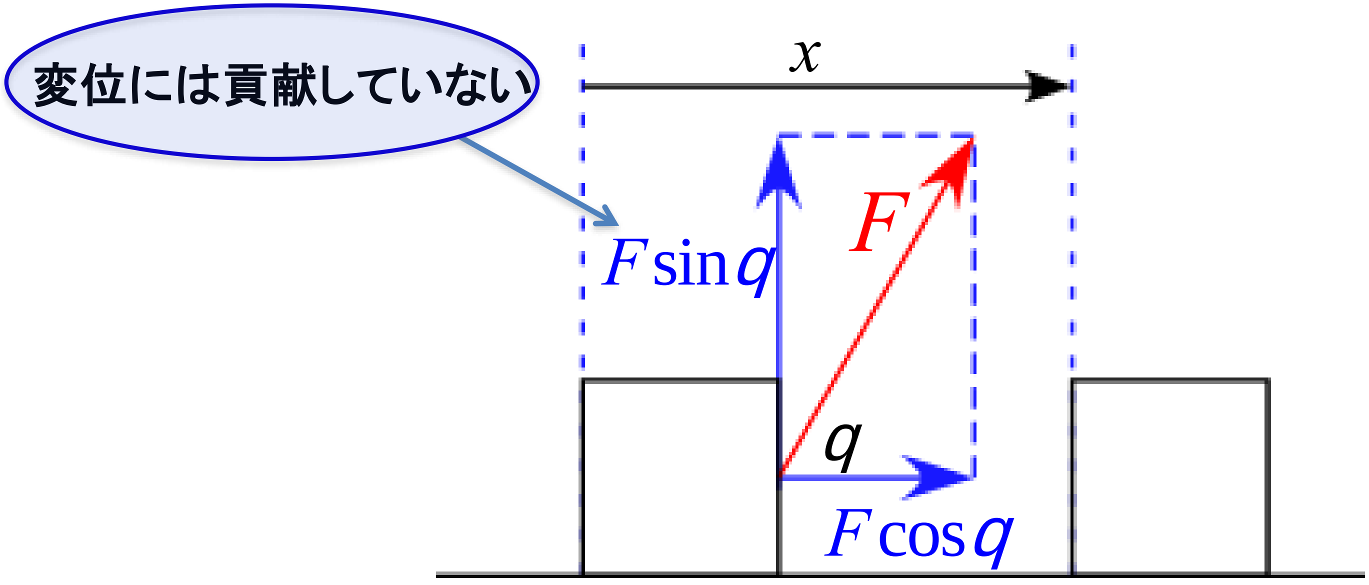
運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta$$

移動方向の力だけが仕事をする

$$W = F\cos\theta \cdot x$$

斜め上に引っ張る場合



力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

$$W = F\cos\theta \cdot x = Fx\cos\theta$$

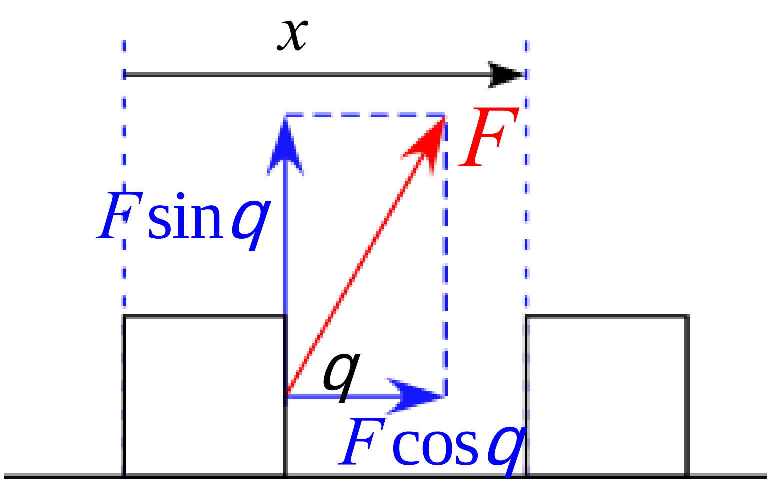
仕事

作用した力×距離

・力の向きと移動方向が同じ場合 : $W = Fx$

・力の向きと移動方向が q の角をなす場合 : $W = Fx\cos q$

斜め上に引っ張る場合



運動方程式 (x軸方向)

$$m\frac{dv}{dt}=F\cos\theta$$

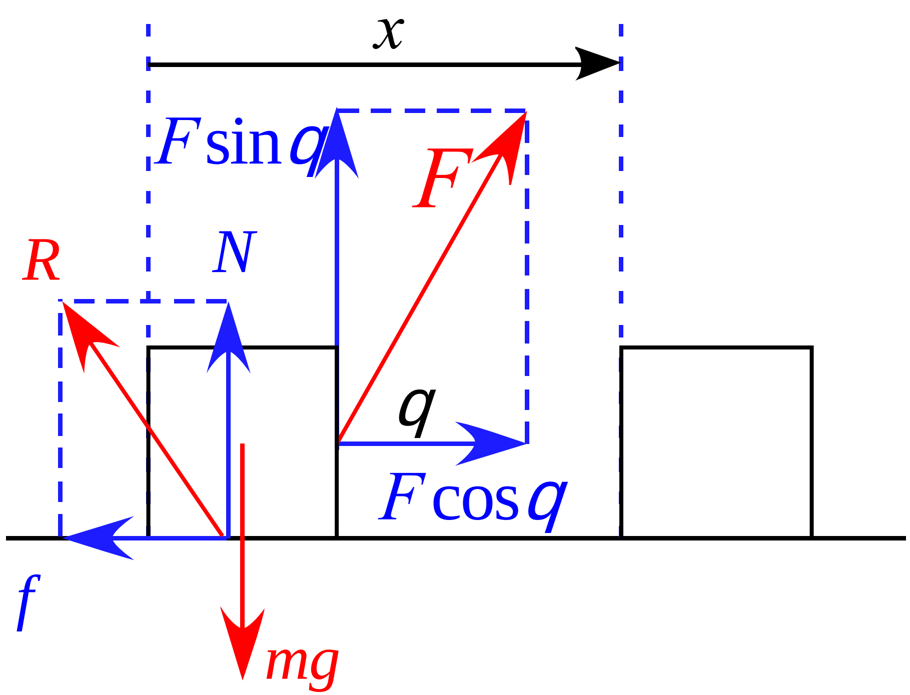
$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int_{x_1}^{x_2}F\cos dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2}=\left[F\cos\theta x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2-\frac{1}{2}mv_1^2=F\cos\theta\left(x_2-x_1\right)$$

仕事～摩擦力

斜め上に引っ張る＋摩擦力を考慮する場合



物体に作用する力

場の力：重力 mg
接触力：張力 F
抗力 R

仕事をしていない

垂直抗力：N
場の力：重力 mg
Fの y 成分：$F\sin q$

移動方向の力だけが仕事をする

摩擦力 f は右向きに移動すること に対して邪魔をしている

⇓

負の仕事

正の仕事：$W_1 = F\cos\theta \cdot x$

負の仕事：$W_2 = -f \cdot x$

仕事〜摩擦力

斜め上に引っ張る + 摩擦力を考慮する場合

運動方程式 (x軸方向)

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta - f$$

$$\int_{v_1}^{v_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2}\left(F\cos - f\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \left[F\cos\theta x - fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

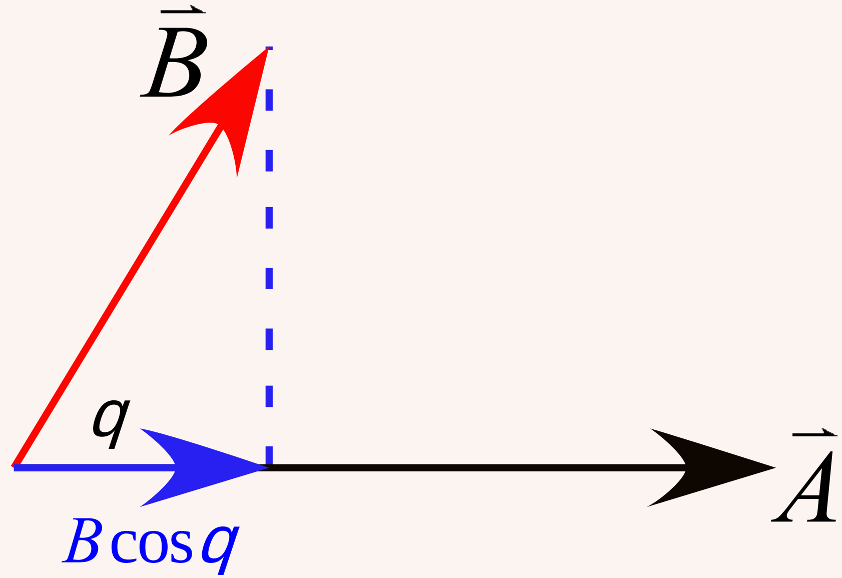
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\cos\theta\left(x_2 - x_1\right) - f\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

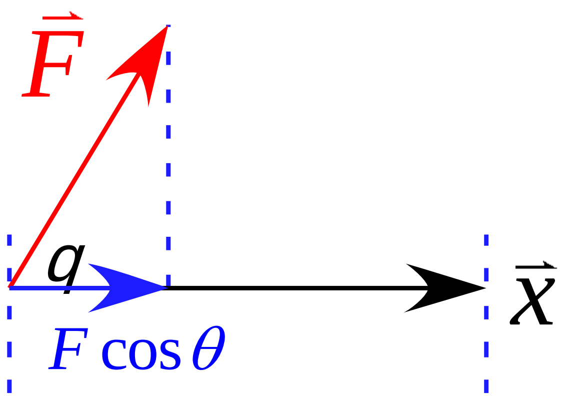
$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$$



これを仕事に応用すると

$$\vec{F}\cdot\vec{x}=Fx\cos\theta$$



つまり、

$$W=\vec{F}\cdot\vec{x}$$

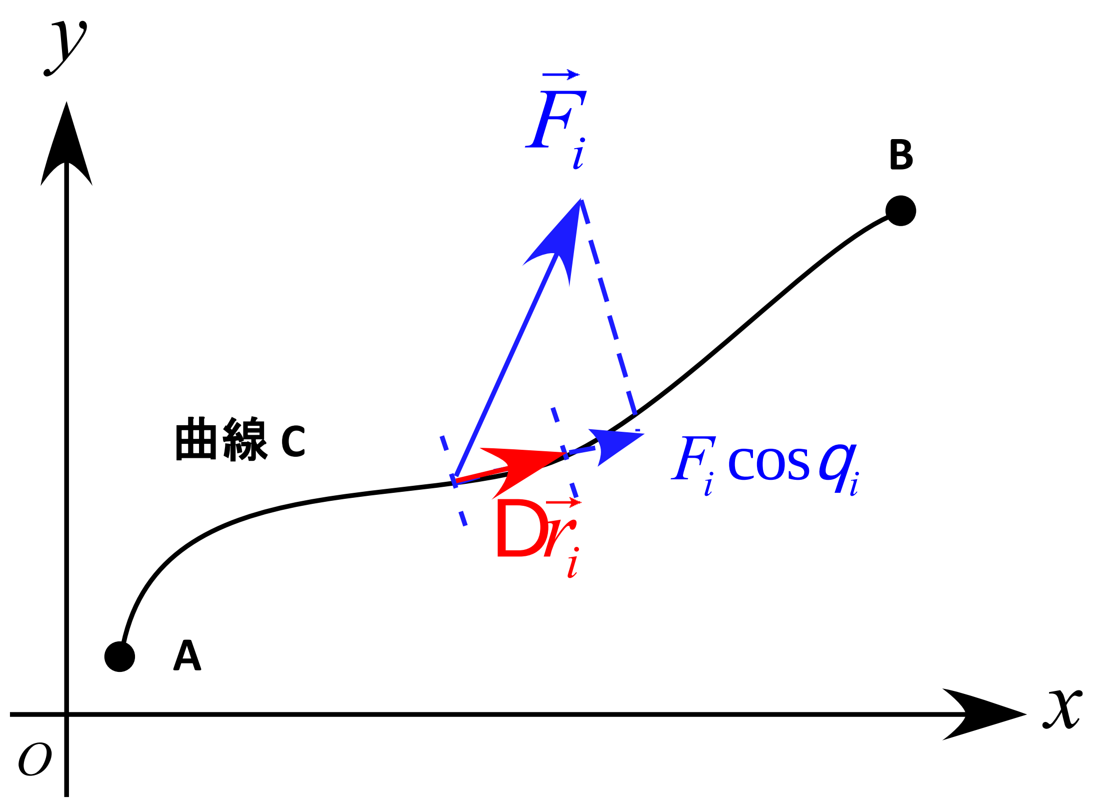
仕事～線積分

微小距離 $\Delta\vec{r}_i$ だけ移動したとすると

$$\Delta W_i = F \cdot \Delta r_i \cos\theta_i$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i$$

となる。



(参考)

$\Delta\vec{r}_i$ を限りなく小さくすると

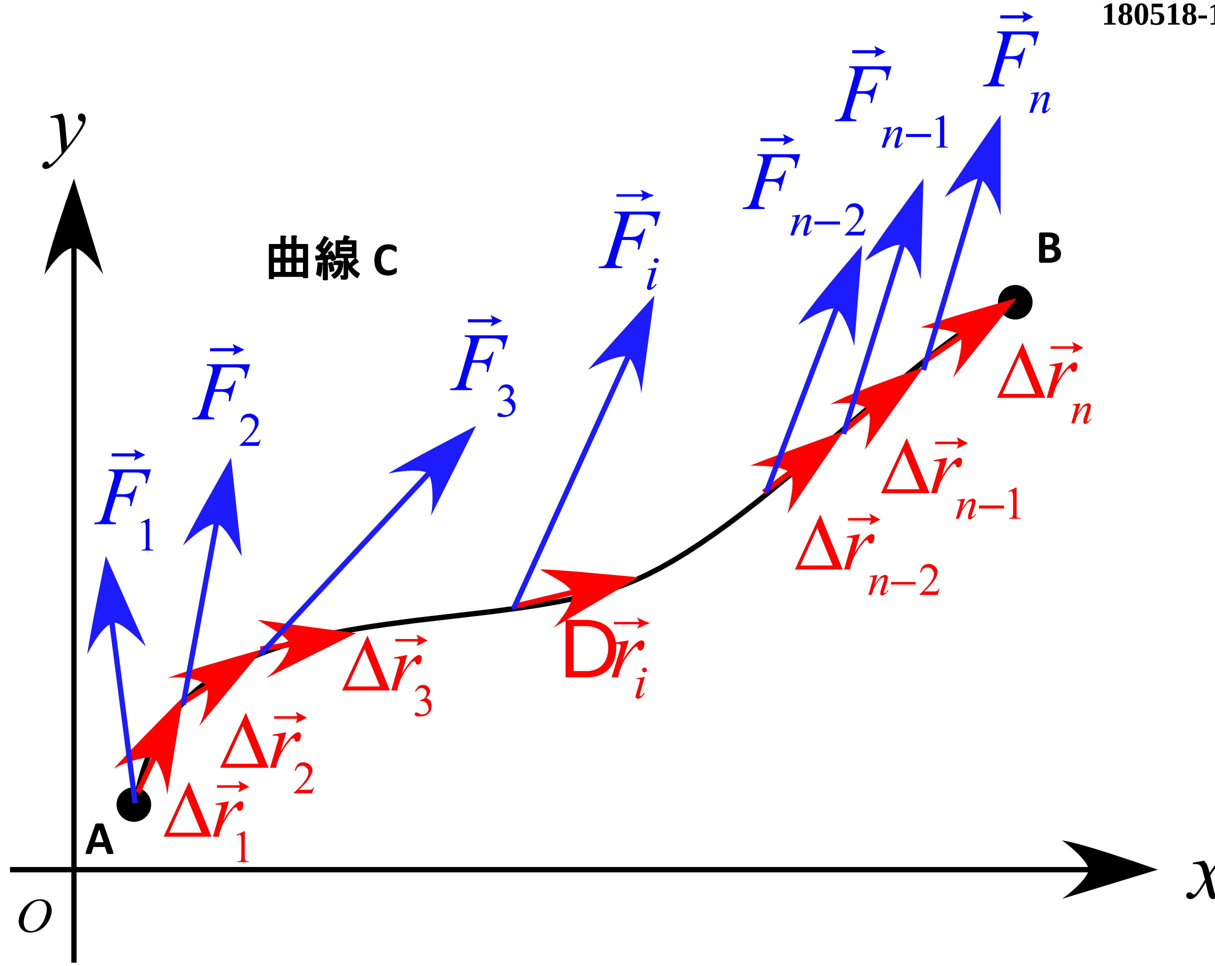
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

これを区間で積分すると

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

となる。

線積分



「仕事」は「力の距離積分」で計算することができる

仕事率

定義

仕事率：単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t}$$

国際単位：ワット　[W =J / S]

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L]\frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

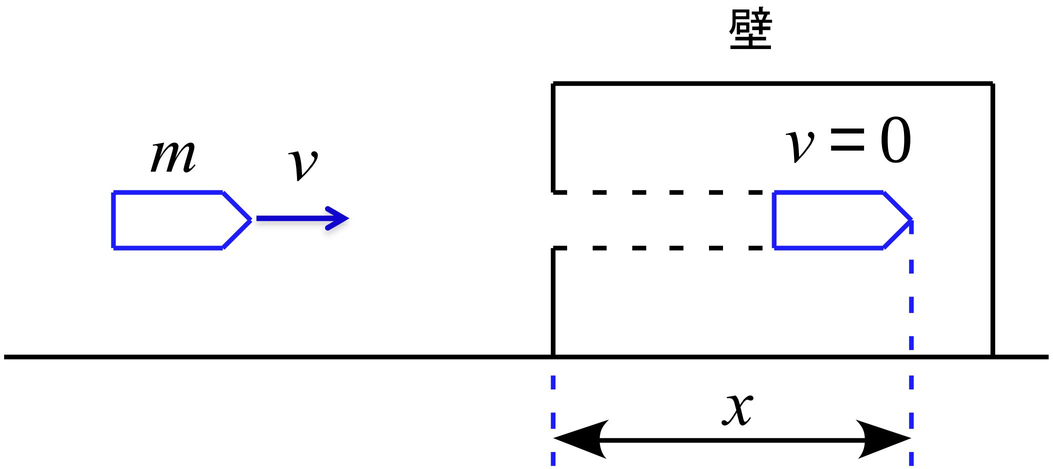
エネルギー

ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという

→ 仕事をする能力＝エネルギー

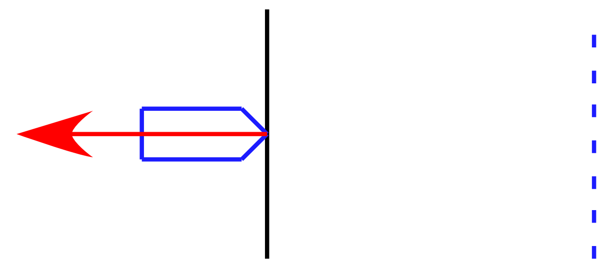
例

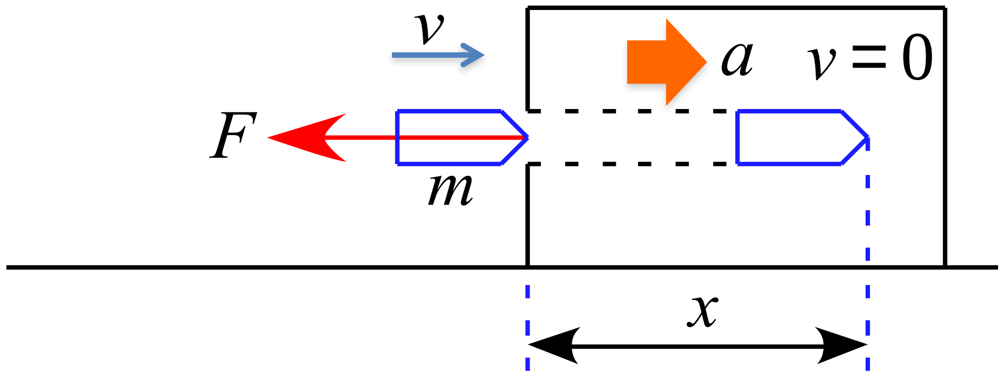
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





水平方向の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int(-F)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int(-F)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int(-F)\,dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_0^x -F\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_v^0 = \left[-Fx\right]_0^x$$

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx + F\cdot 0$$

エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\boxed{\frac{1}{2}m\cdot 0^2} - \boxed{\frac{1}{2}m\cdot v^2} = \boxed{-Fx}$$

最後の運動能力　最初の運動能力　弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [\,\mathrm{J = kg\ m^2 / s^2}\,]$$

次元

$$[M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

基準から力Fで $x=0$ から$x=h$ まで持ち上げたとする

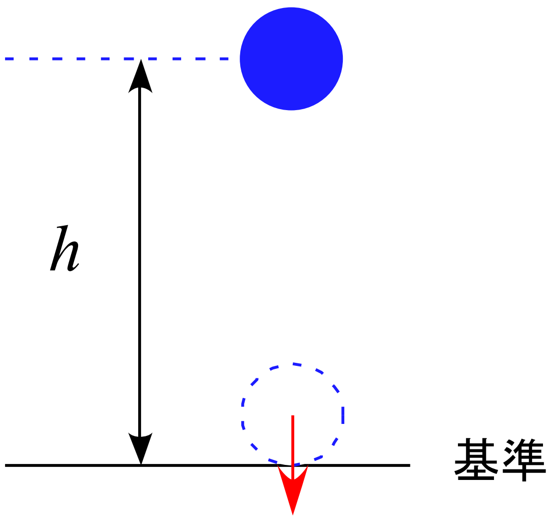
運動方程式は

$$ma = F - mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int (F - mg)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int (F - mg)dx$$



$$\boxed{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt} = \boxed{\int (F - mg)dx}$$

運動エネルギーの変化　　外力の仕事

エネルギー～位置エネルギー

準静的に持ち上げたとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \int_0^h (F - mg)\,dx$$

$$0 = \int_0^h F\,dx + \int_0^h (-mg)\,dx$$

$$\int_0^h mg\,dx = \int_0^h F\,dx$$

$$[mgx]_0^h = \int_0^h F\,dx$$

$$\boxed{mgh} = \boxed{\int_0^h F\,dx}$$

重力による位置エネルギー

持ち上げた仕事

エネルギー～位置エネルギー

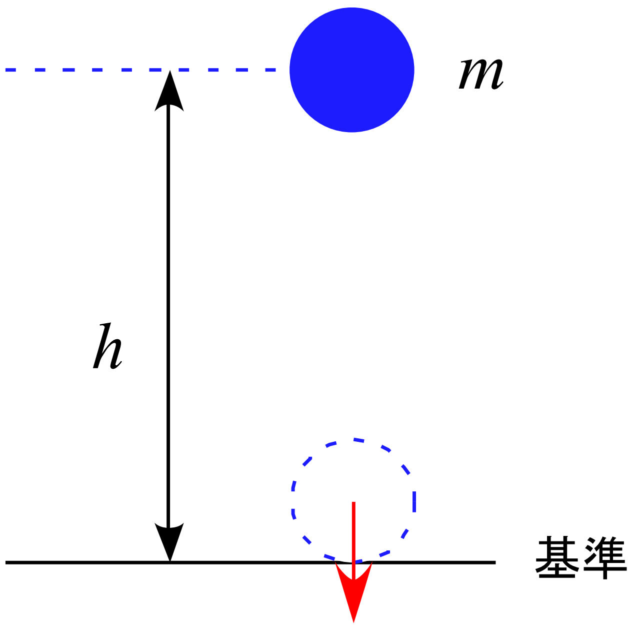
重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた

下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

$$U = mgh \quad [\mathrm{J = kg\ m^2 / s^2}]$$

基準からの高さに比例

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

エネルギー～自由落下

自由落下

運動方程式は

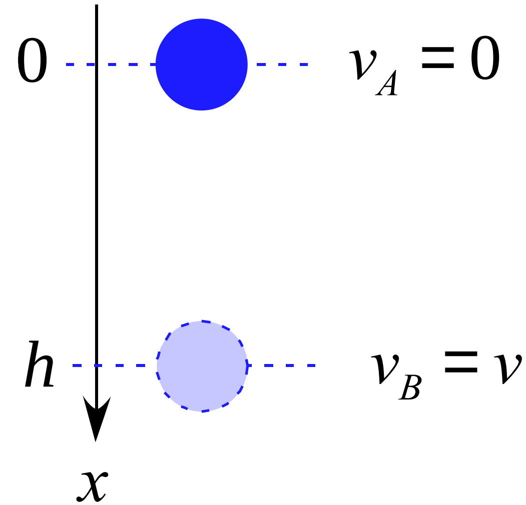
$$ma = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int mgdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int mgdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int mgdx$$



エネルギー～自由落下

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_A}^{v_B} = \left[mgx\right]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mgh - mg\cdot 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2} = \boxed{mgh}$$

運動エネルギーの変化　　外力の仕事

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = 0$$

運動エネルギー　　位置エネルギー

エネルギー保存則

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

(重力場の運動)

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = 0 \qquad x(t_2) = x$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2} = \boxed{\int_0^x Fdx}$$

エネルギーの変化量

$x = 0$ から x まで
物体に働く力 F がした仕事

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$ をかける ⇒ 単位時間あたりの変位をかけた

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する ⇒ 最初から最後まで時間に対して和を取る

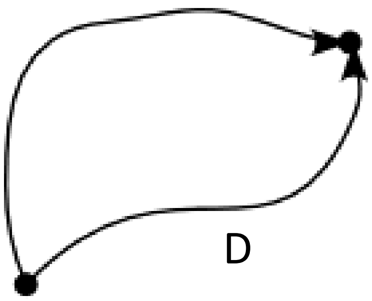
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

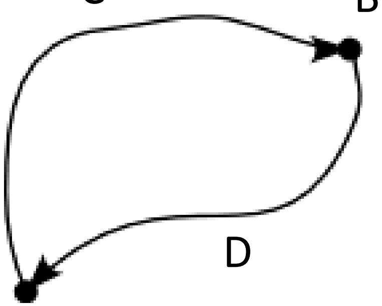
最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路





点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える

ここでの運動が保存力による運動とすると

点A－C－点Bの経路を通り、
そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A－D－点Bの経路を通り、同じ道を通って
点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

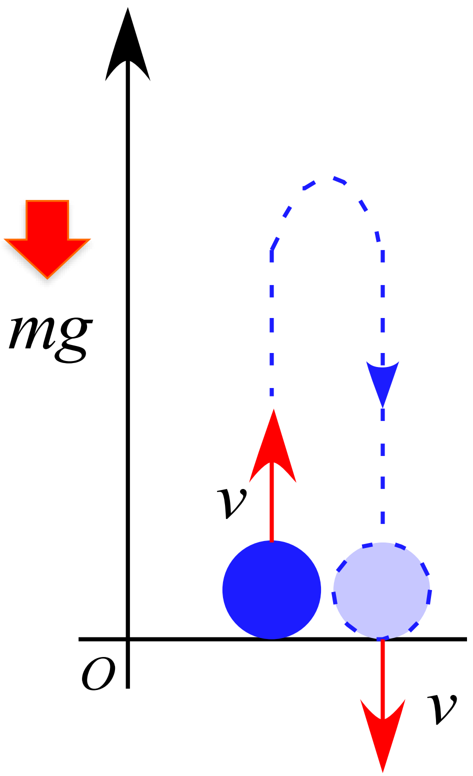
よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える



鉛直投げ上げ運動

この運動における仕事は

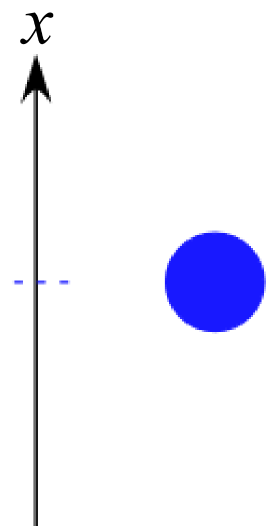
$$W = \int_0^0 F dx = \int_0^0 (-mg)\, dx = 0$$

元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる

保存力

エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-mgx\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + mgx$ は時間に対して

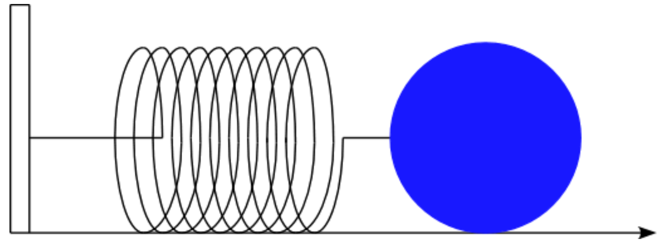
変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = 一定$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が
一定であるからエネルギー保存則が
成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

バネの単振動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 一定$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

仕事とエネルギー～例題

例題

摩擦がある斜面を質量mの物体がすべり降りる運動の運動を考える。以下の問に答えよ。
但し、動摩擦力は$f=\mu_k N$として用いてよいとする。

(1) この運動の運動方程式を記述せよ。

(2) この運動の加速度aを求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

(3) この運動で物体が距離Lを移動したとするとき、動摩擦力がした仕事$W_{摩}$を求めよ。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

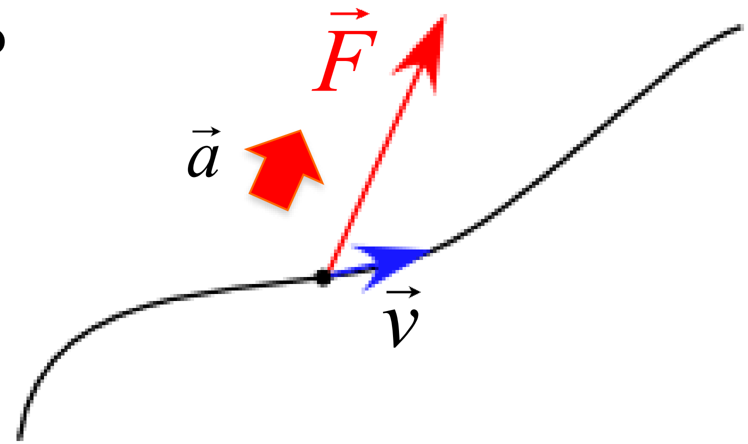
仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

運動量〜定義

質量 m の質点が力 $\vec{F}$ を受けて運動している



運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

加速度の定義から

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

であるから、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\boxed{\left(m\vec{v}\right)} = \vec{F}$$

運動量

ここで、$\vec{p} = m\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となる。

運動量〜力積

運動量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量 = 質量 × 速度

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}} = \vec{F}$$

単位時間あたりの
運動量の変化

この式を書き換えると

$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

運動量の
微小変化

力積

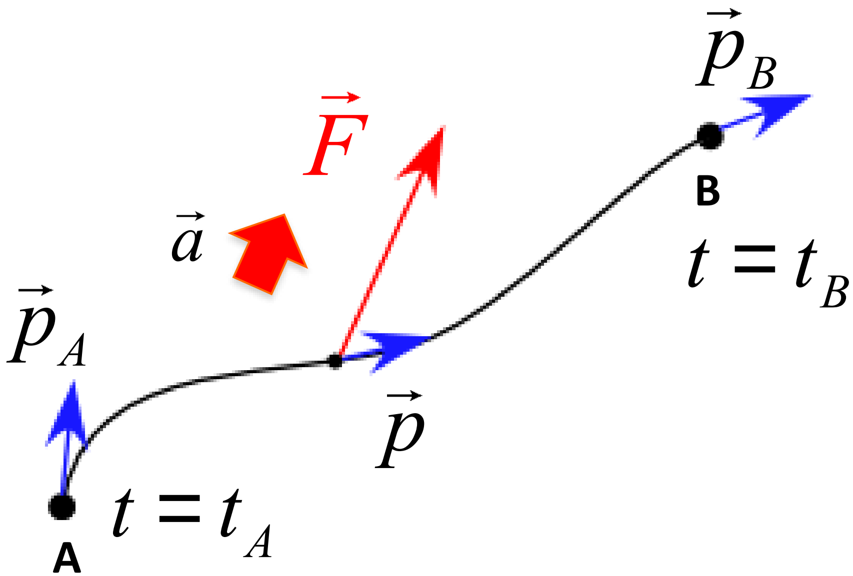
力 $\vec{F}$ が微小時間
dtだけ働いた

次元

力積

$$\vec{I} = \vec{F}dt \qquad \left[\frac{ML}{T^2}\right][T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

運動開始と運動終了を図のように
設定する



$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

積分すると

$$\int_{p_A}^{p_B} d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt$$

$$\underbrace{\boxed{\vec{p}_A - \vec{p}_B}}_{\text{運動量の変化}} = \underbrace{\boxed{\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt}}_{\text{受けた力積の総和}}$$

運動量～エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか？)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}dt$$

力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか？)

運動量の変化は力積による

運動量〜保存則

物体が衝突した前後について
考えてみよう

運動方程式はA, Bそれぞれ

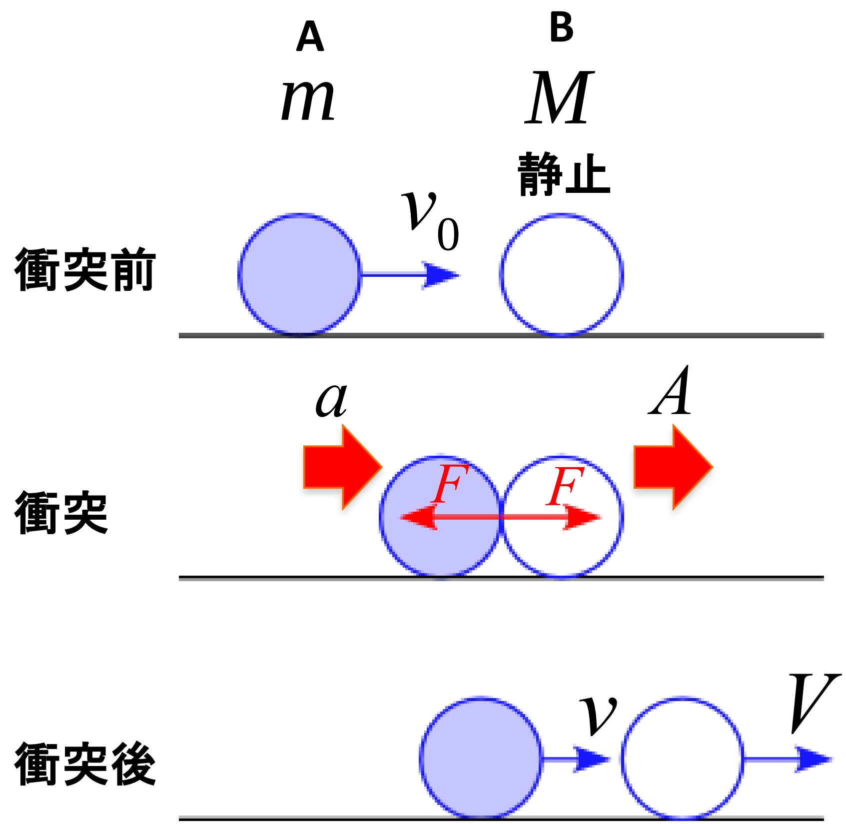
A： $ma = -F$

B： $MA = F$

従って、

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

$$M\frac{dV}{dt} = F$$



運動量～保存則

この2式の和をとると

$$m\frac{dv}{dt}+M\frac{dV}{dt}=-F+F$$

$$\frac{d}{dt}(mv)+\frac{d}{dt}(MV)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{mv+MV}\right)=0$$

運動量の合計

となる

従って、

この衝突において運動量の和は
時間的に変化していない。

運動量が保存している

即ち、この例のモデルでは

$$\underbrace{\boxed{mv+MV}}_{\text{衝突後の運動量}}=\underbrace{\boxed{mv_0+M\cdot 0}}_{\text{衝突前の運動量}}$$

が成立する。

運動量保存則

運動量保存則

外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない

$$\frac{d}{dt}\left(mv+MV\right)=0$$

$$\boxed{mv+MV}=\boxed{mv_0+MV_0}$$

衝突後の全運動量　　衝突前の全運動量

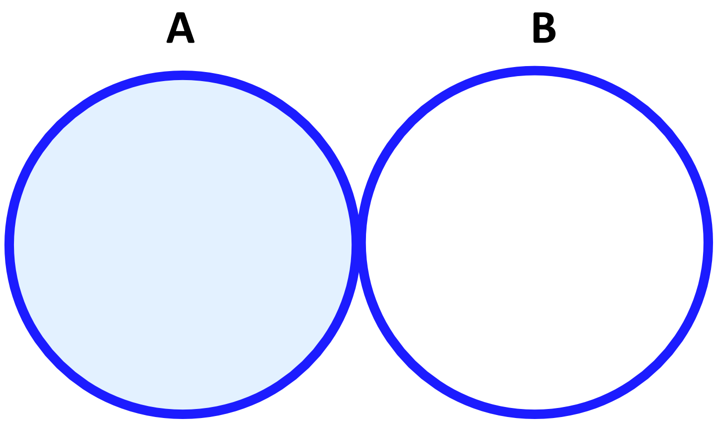
運動量保存則～例題

例題

２球の正面衝突を考える。

1. 衝突した瞬間の力を図に書き込め。

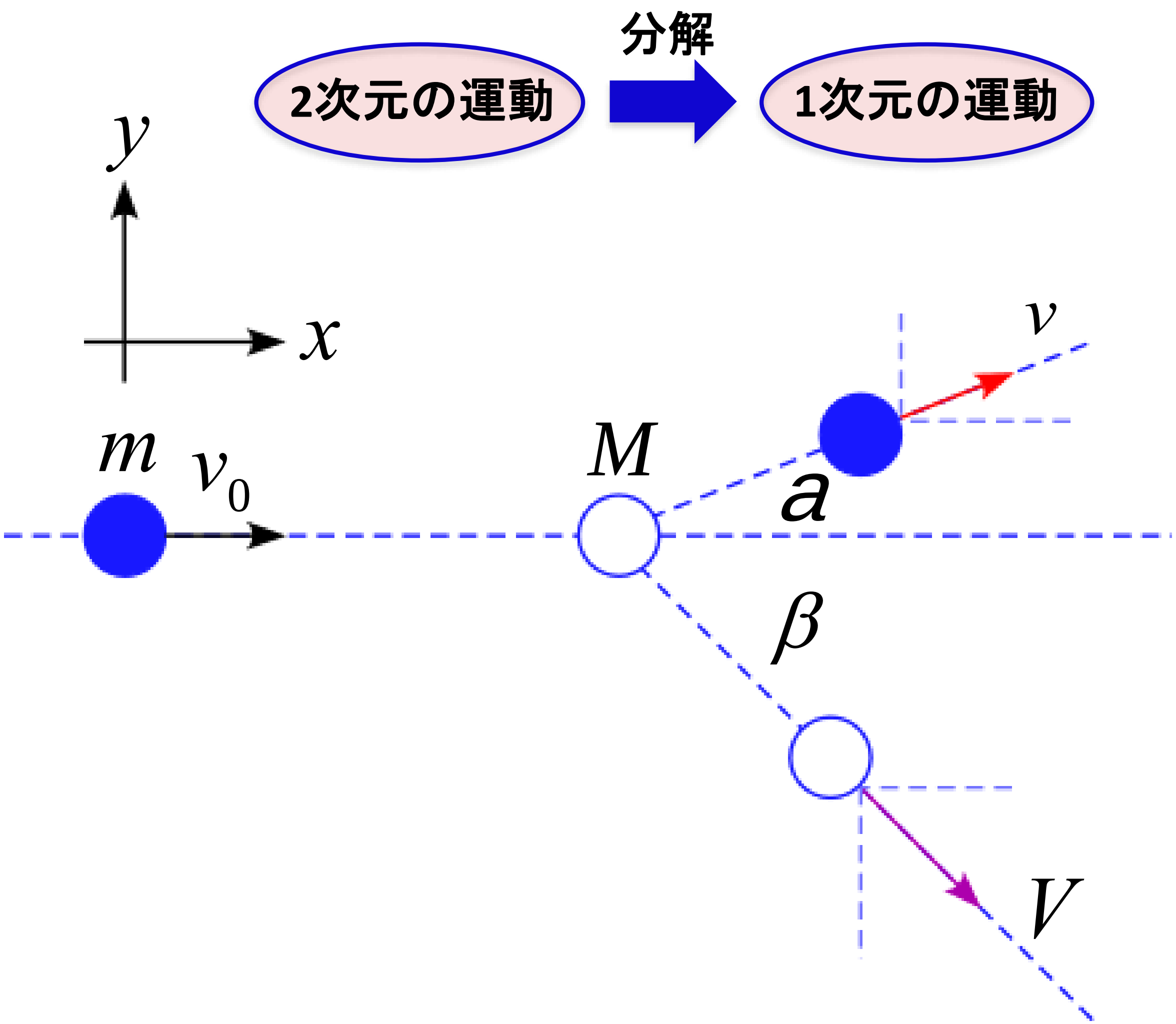
2. この運動で運動量が保存していることを示せ。



斜衝突

斜衝突 (ビリヤード)

静止している白球に青玉を完全弾性衝突させる運動 (床との摩擦は無いとする)



運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1\right)=-\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_2\right)=\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1+M\vec{V}_2\right)=0$$

衝突時に力 $\vec{F}$ が作用し、
青玉の速度 $\vec{v}_1$
白玉の速度 $\vec{V}_2$
とする

外から外力が加わっていない → 前後の運動量については保存している

$$\boxed{m\vec{v}_1+M\vec{V}_2}=\boxed{m\vec{v}_1{}'+M\vec{V}_2{}'}$$

衝突前の全運動量　衝突後の全運動量

$$m\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}+M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}=m\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix}+M\begin{pmatrix} V\cos\beta \\ -V\sin\beta \end{pmatrix}$$

従って、

x 方向: $$mv_0 + M \cdot 0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$$

y 方向: $$m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$$

x 方向: $$mv_0 = mv\cos a + MV\cos b$$

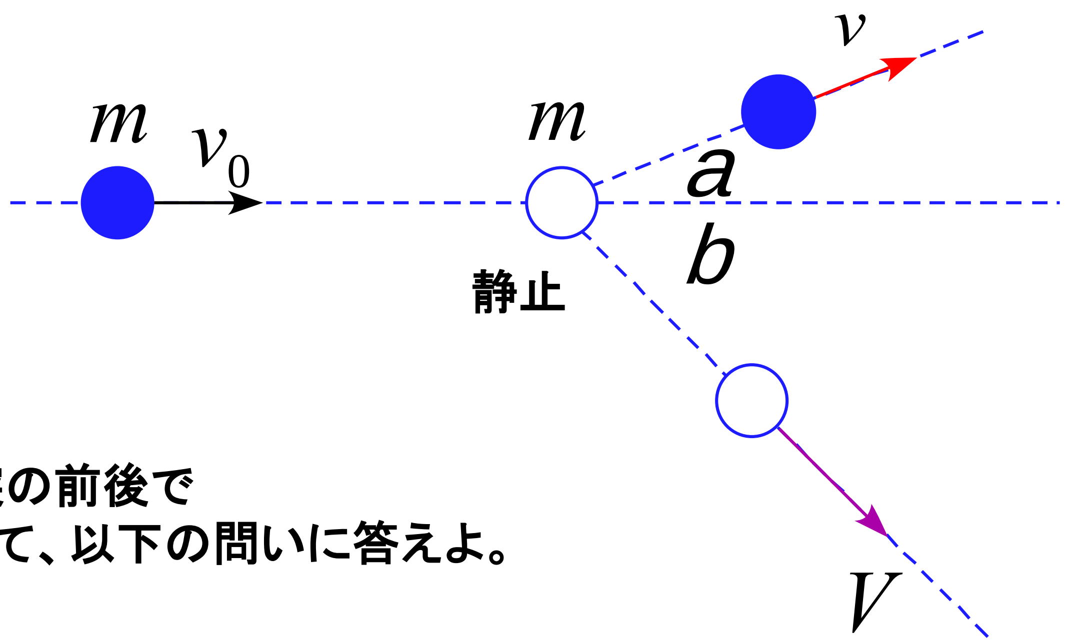
y 方向: $$0 = mv\sin a - MV\sin b$$

完全弾性衝突 → 前後でのエネルギーロスは無い

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

斜衝突～例題

斜衝突において、質量が同じであるとする。



衝突は弾性衝突であり、衝突の前後で
エネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

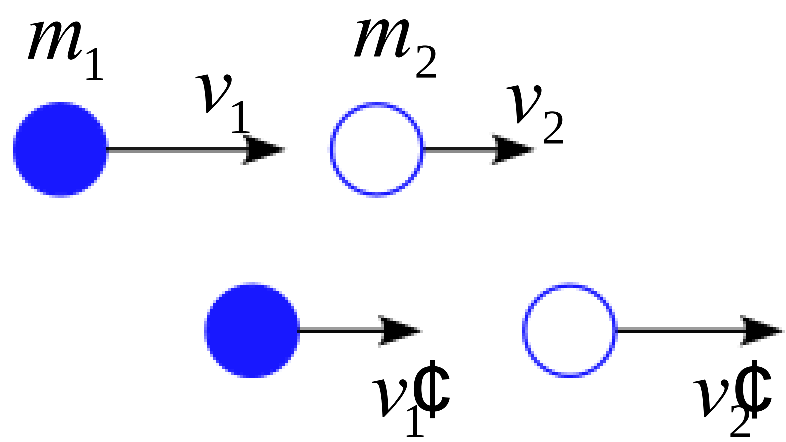
1. 図の角 $\alpha + \beta$ を求めよ。

2. 速度比 $\dfrac{v}{V}$ を β を使って表せ。

反発係数

1次元の衝突

運動量保存則



$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

であるが、速度の情報が不十分である
そこで

同じ2物体の衝突では、
衝突前後の相対速度の大きさの比は一定

(経験的法則)

を用いてその比率を定義すると

反発係数 (跳ね返り係数) e

$$e = -\frac{\boxed{v_1' - v_2'}}{\boxed{v_1 - v_2}}$$

衝突後の相対速度

衝突前の相対速度

反発係数

2体の相対運動のエネルギーの変化を考えると

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1' - v_2'\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2\left(e^2 - 1\right)$$

完全弾性衝突: $e = 1$ **理想的によく弾む場合** → **エネルギー保存則が成立**

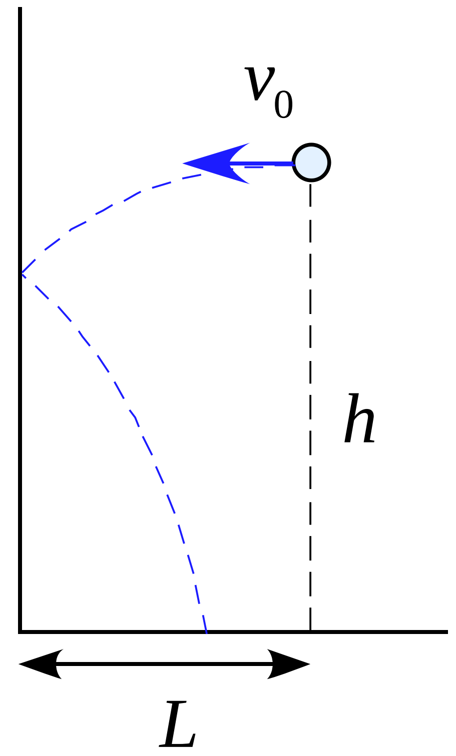
非弾性衝突: $0 \le e < 1$

完全非弾性衝突: $e = 0$ **2物体が一体になる場合**

運動量～例題

例題

質量 m の物体を高さ h の地点から壁に向かって水平方向に初速度 v_0 で投げたところ、壁に当たって跳ね返り、地面に落下した。
壁からの距離は L であり、壁と物体との間の反発係数は e である。
重力加速度を g として以下の問いに答えよ。



1. 物体が壁に当たる直前までの運動方程式を記述せよ。
2. 物体が壁に当たる時刻 t_1 を求めよ。
3. 物体が壁に衝突した瞬間の運動方程式を記述せよ。
   (水平方向のみでよい)
4. 物体が壁から受けた力積 I を求めよ。
5. 物体が壁に当たった後の運動方程式を記述せよ。
6. 落下点に到達する時刻 t_2 を求めよ。
7. 壁から落下点までの距離 l を求めよ。

運動量保存則～例題

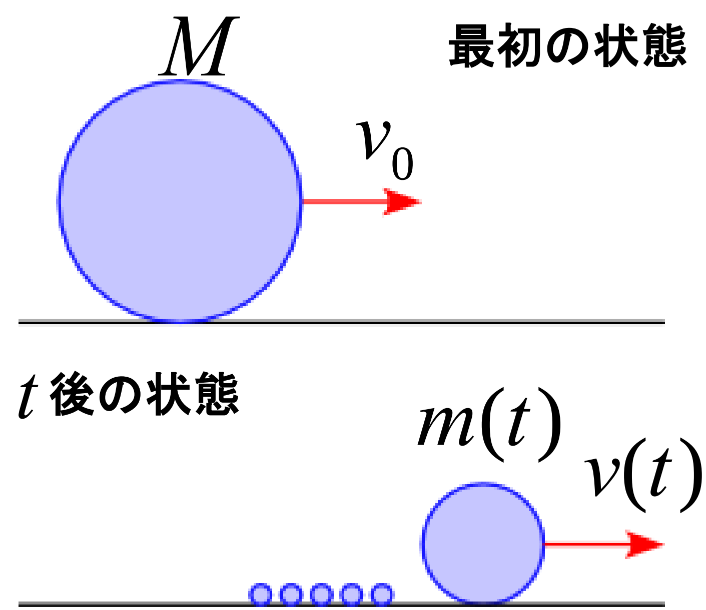
例題

滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたりm_0の物質を噴出しながら
運動する物体がある
物体の初期質量をM、初速度をv_0とする
噴出物質の速度は常に0になるように噴出されるものとする

1. 時間 t 後の質量 $m(t)$ を記述せよ

2. 時間 t 後の速度 $v(t)$ を求めよ

3. 時間 t 後の移動距離 $x(t)$ を求めよ



運動量保存則～例題

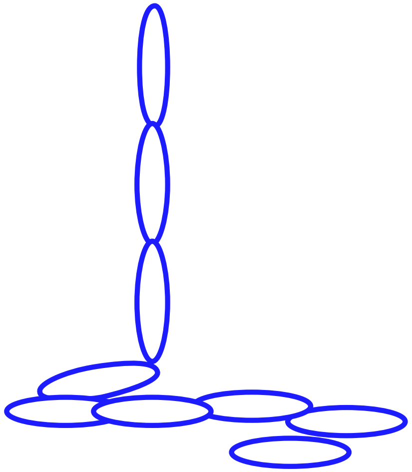
例題

床の上に線密度 ρ の鎖が置いてある。

この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。

重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

引き上げた部分の長さが x 、速度が v 、加速度が a となったとき



1. 引き上げた部分の質量 m を記述せよ。

2. この時の運動方程式を記述せよ。

3. 引き上げる力 F の大きさを求めよ。

4. 一定の速度 v で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。