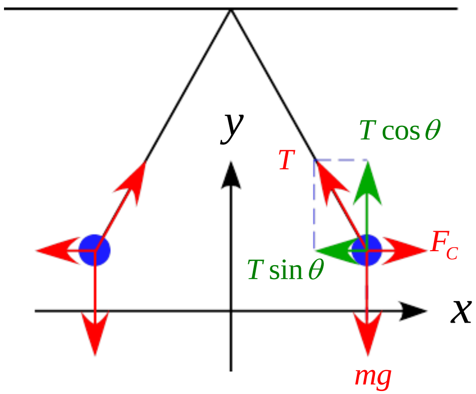
解説 - 05



運動方程式は

$$ma_x = F_C - T\sin\theta$$

$$ma_y = T\cos\theta - mg$$

静止しているので $a_x = 0, a_y = 0$

$$0 = F_C - T\sin\theta$$

$$0 = T\cos\theta - mg$$

従って、

$$T\sin\theta = F_C$$

$$T\cos\theta = mg$$

$$\frac{T\sin\theta}{T\cos\theta} = \frac{F_C}{mg}$$

$$\tan\theta = \frac{F_C}{mg}$$

ここで F_C は

$$F_C = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}$$

である。

また、θ が十分に小さいので $x \ll L$ となり

$$\tan\theta = \frac{\frac{x}{2}}{\sqrt{L^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}$$

$$= \frac{\frac{x}{2}}{L\sqrt{1 - \left(\frac{x}{2L}\right)^2}} \approx \frac{x}{2L}$$

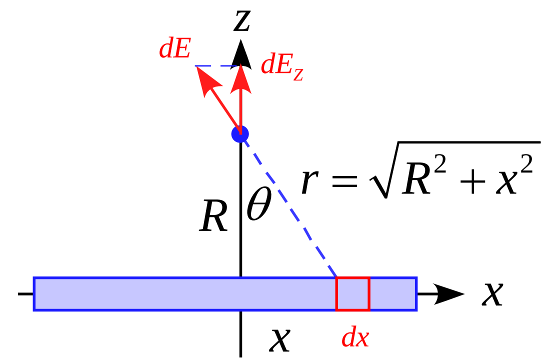
従って、

$$\frac{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q^2}{x^2}}{mg} = \tan\theta \approx \frac{x}{2L}$$

$$x^3 \approx \frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}$$

$$x \approx \left(\frac{q^2 L}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{\frac{1}{3}}$$

解説 - 06



(1)

微小部分の電荷は

$$dQ = \rho dx$$

である。

よって、微小部分が作る電場は

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{r^2}$$

である。

対称性により、X 成分は打ち消しあうので Z 成分だけ計算すればよい。

Z 成分の電場は

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{r^2}\cdot\cos\theta$$

ここで

$$x = R\tan\theta \qquad r = \frac{R}{\cos\theta}$$

$$dx = \frac{R}{\cos^2\theta}d\theta$$

であるから

解説 - 06

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dx}{r^2}\cdot\cos\theta$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho}{\left(\frac{R}{\cos\theta}\right)^2}\cdot\cos\theta\frac{R}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$= \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\cos\theta d\theta$$

従って、全電場は

$$E_z = \frac{\rho}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta$$

$$= \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

(2)

$$V_{BA} = \int_{R_1}^{R_2} E_z dz$$

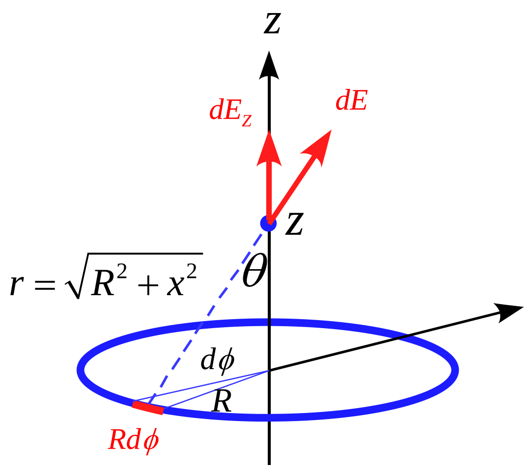
$$= \int_{R_1}^{R_2}\frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 z}dz$$

$$= \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{z}dz$$

$$= \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\left(\log R_2 - \log R_1\right)$$

$$= \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0}\log\frac{R_2}{R_1}$$

解説 - 07



(1)

微小部分の電荷は

$$dQ = \rho R d\phi$$

である。

よって、微小部分が作る電場は

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R d\phi}{r^2}$$

である。

対称性により、Z 成分だけ計算すればよい

Z 成分の電場は

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R d\phi}{r^2}\cdot\cos\theta$$

ここで

$$\cos\theta = \frac{z}{r}$$

であるから

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R d\phi}{r^2}\cdot\frac{z}{r}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R z}{r^3}d\phi$$

従って、全電場は

$$E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R z}{r^3}\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R z}{r^3}\cdot 2\pi$$

$$= \frac{\rho R z}{2\varepsilon_0\left(R^2 + Z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

(2)

微小部分による電位は

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R d\phi}{r}$$

である。

従って、電位は

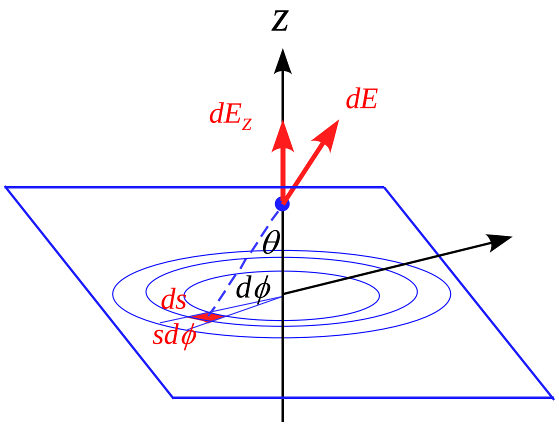
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R}{r}\int_0^{2\pi}d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho R}{r}\cdot 2\pi$$

$$= \frac{\rho R}{2\varepsilon_0 r}$$

$$= \frac{\rho R}{2\varepsilon_0\sqrt{R^2 + z^2}}$$

解説 - 08



(1)

微小部分の電荷は

$$dQ = \sigma s d\phi ds$$

である。

よって、微小部分が作る電場は

$$dE = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma s d\phi ds}{r^2}$$

である。

対称性により、Z 成分だけ計算すればよい

Z 成分の電場は

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma s d\phi ds}{r^2}\cdot\cos\theta$$

ここで

$$s = a\tan\theta \qquad r = \frac{a}{\cos\theta}$$

$$ds = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta$$

であるから

$$dE_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma a\tan\theta d\phi \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta}{\left(\frac{a}{\cos\theta}\right)^2}\cdot\cos\theta$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\sin\theta d\theta d\phi$$

従って、全電場は

$$E_z = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}2\pi\left[-\cos\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

(2)

電位は

$$V_{BA} = \int_a^0 E_z dz$$

$$= \int_a^0 \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}dz$$

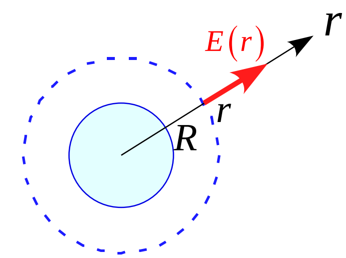
$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_a^0 dz$$

$$= -\frac{\sigma a}{2\varepsilon_0}$$

解説 - 09

(1)

$r \geq R$



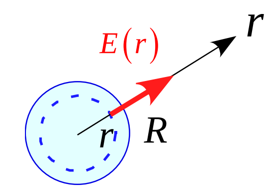
$$\int_s \vec{E}\cdot\vec{n}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

(2)

$r \leq R$

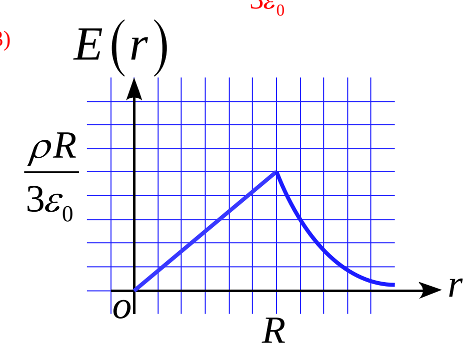


$$\int_s \vec{E}\cdot\vec{n}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$

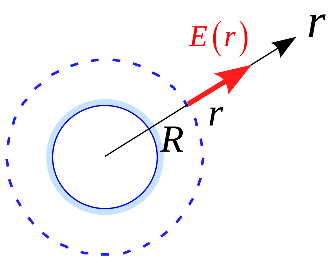
(3)



解説 - 10

(1)

$r \geq R$



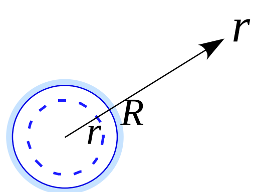
$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \sigma dS$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} 4\pi R^2 \sigma$$

$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \frac{R^2}{r^2}$$

(2)

$r < R$

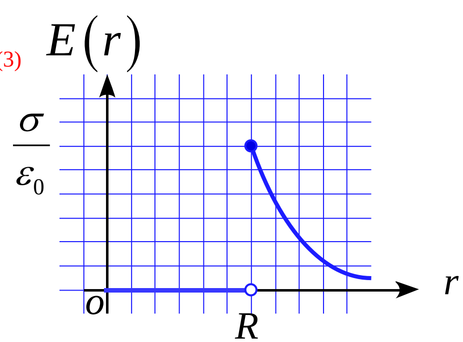


$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_S \sigma dS$$

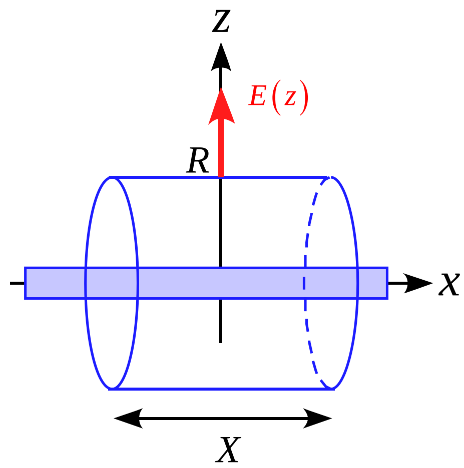
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 0$$

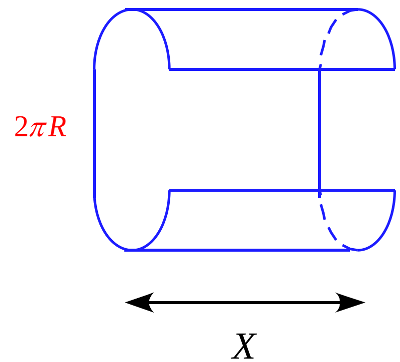
$$E(r) = 0$$

(3)



解説 - 11





$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_l \rho dl$$

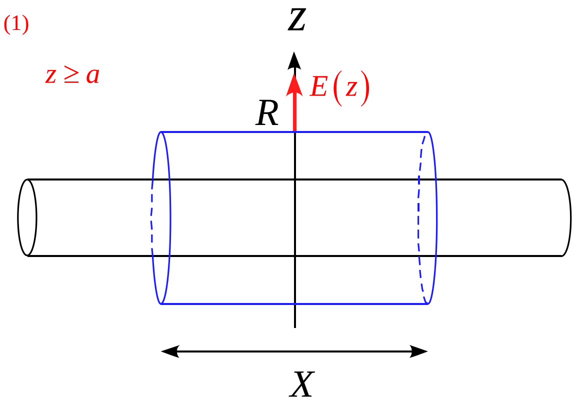
$$E(z) \cdot 2\pi RX = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho X$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

解説 - 12

(1)

$z \geq a$

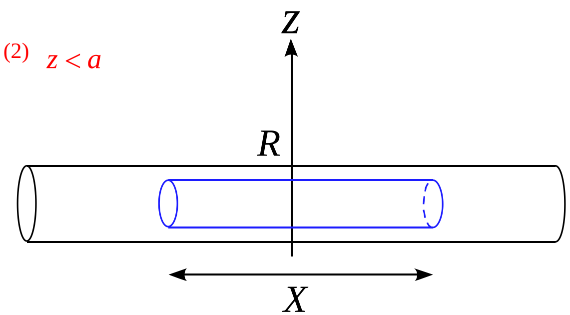


$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_l \rho dl$$

$$E(z) \cdot 2\pi zX = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho X$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 z}$$

(2) $z < a$

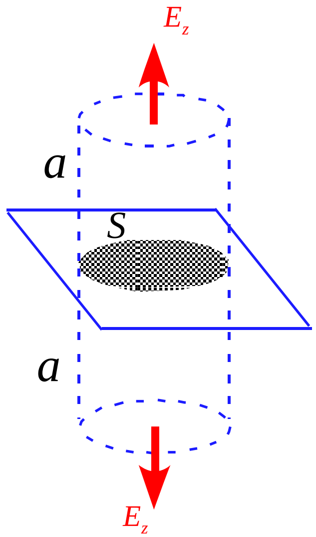


$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_l \rho dl$$

$$E(z) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 0$$

$$E(z) = 0$$

解説 - 13



$$\int_s \vec{E}\cdot\vec{n}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_S \sigma dS$$

$$2E_z \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S$$

$$E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

解説 - 14

(1)

$$i = \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi r^2} = \frac{1\mathrm{A}}{3.14\times(0.001\mathrm{m})^2}$$

$$= 3.18\times10^5$$

$$\simeq 3.2\times10^5\ \mathrm{A/m^2}$$

(2)

$$I_0 = iS = \left(3.2\times10^5\ \mathrm{A/m^2}\right)\times\left(3.14\times(0.0005\mathrm{m})^2\right)$$

$$= 0.25\mathrm{A}$$

解説 - 16

(2)

回路方程式において $t=0$ の時 $Q(0)=0$ より

$$RI(0)+\frac{Q(0)}{C}=V$$

$$RI(0)+\frac{0}{C}=V$$

$$I(0)=\frac{V}{R}$$

(3)

回路方程式において $t=\infty$ の時

$$I(\infty)=\frac{dQ}{dt}=0$$

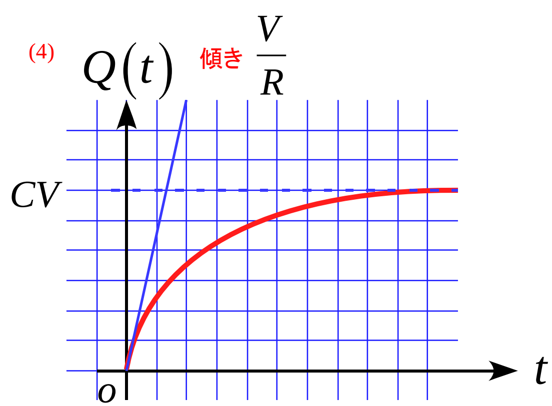
より

$$RI(\infty)+\frac{Q(\infty)}{C}=V$$

$$R\cdot0+\frac{Q(\infty)}{C}=V$$

$$Q(\infty)=CV$$

(4)



解説 - 17

(2)

回路方程式において $t=0$ の時 $Q(0)=2CV$ より

$$RI(0)+\frac{Q(0)}{C}=V$$

$$RI(0)+\frac{2CV}{C}=V$$

$$I(0)=-\frac{V}{R}$$

(3)

回路方程式において $t=\infty$ の時

$$I(\infty)=\frac{dQ}{dt}=0$$

より

$$RI(\infty)+\frac{Q(\infty)}{C}=V$$

$$R\cdot0+\frac{Q(\infty)}{C}=V$$

$$Q(\infty)=CV$$

(4)