運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

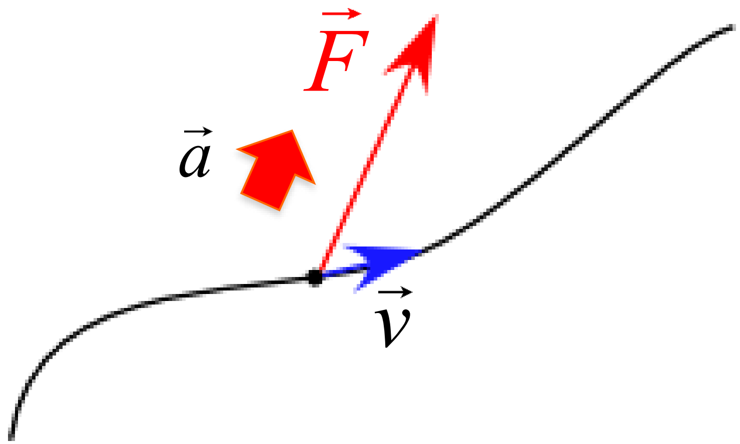
仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

運動量〜定義

質量 m の質点が力 $\vec{F}$ を受けて運動している



運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

加速度の定義から

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

であるから、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\boxed{\left(m\vec{v}\right)} = \vec{F}$$

運動量

ここで、$\vec{p} = m\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となる。

運動量～力積

運動量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量 = 質量 × 速度

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}} = \vec{F}$$

単位時間あたりの
運動量の変化

この式を書き換えると

$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

運動量の
微小変化

力積

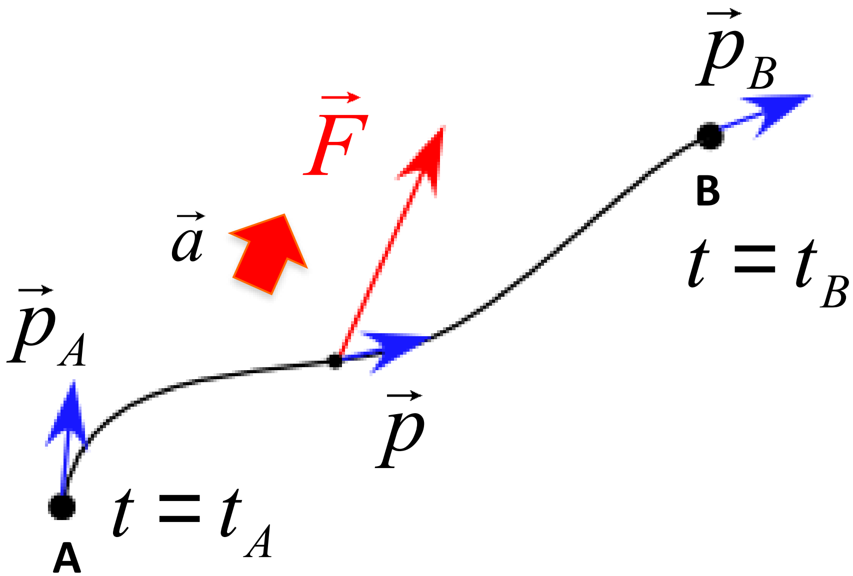
力 $\vec{F}$ が微小時間
dtだけ働いた

次元

力積

$$\vec{I} = \vec{F}dt \qquad \left[\frac{ML}{T^2}\right][T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

運動開始と運動終了を図のように
設定する



$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

積分すると

$$\int_{p_A}^{p_B} d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt$$

$$\boxed{\vec{p}_A - \vec{p}_B} = \boxed{\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt}$$

運動量の変化

受けた力積の総和

運動量～エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか？)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか？)

運動量の変化は力積による

運動量〜保存則

物体が衝突した前後について
考えてみよう

運動方程式はA, Bそれぞれ

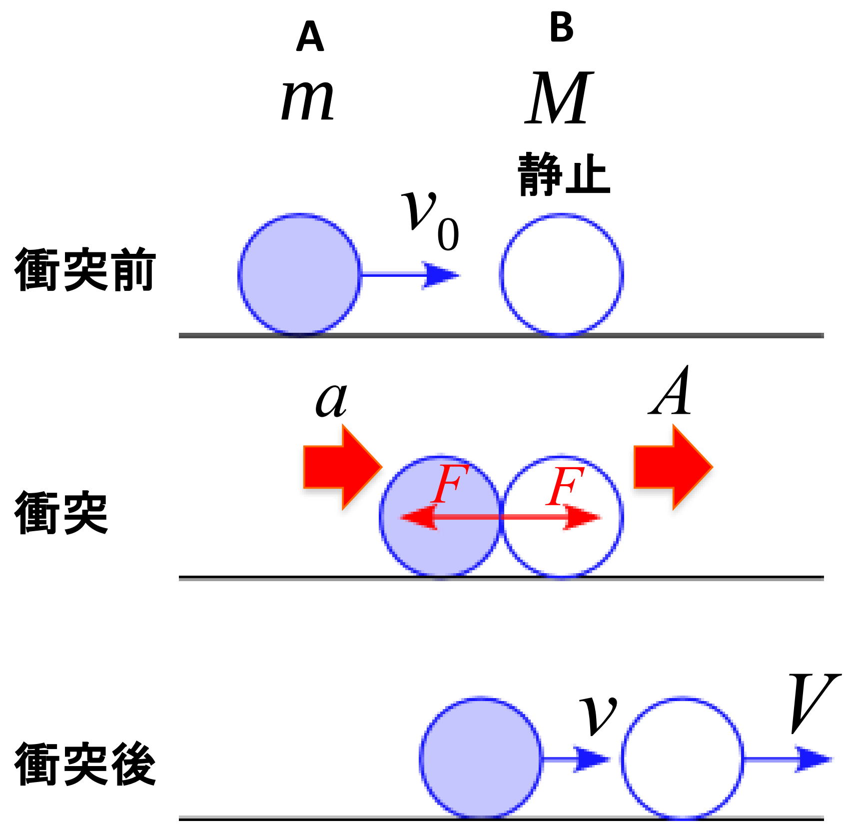
A： $ma = -F$

B： $MA = F$

従って、

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

$$M\frac{dV}{dt} = F$$



運動量〜保存則

この2式の和をとると

$$m\frac{dv}{dt}+M\frac{dV}{dt}=-F+F$$

$$\frac{d}{dt}(mv)+\frac{d}{dt}(MV)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{mv+MV}\right)=0$$

運動量の合計

となる

従って、

この衝突において運動量の和は
時間的に変化していない。

運動量が保存している

即ち、この例のモデルでは

$$\boxed{mv+MV}=\boxed{mv_0+M\cdot 0}$$

衝突後の運動量　衝突前の運動量

が成立する。

運動量保存則

運動量保存則

外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない

$$\frac{d}{dt}\left(mv+MV\right)=0$$

$$\boxed{mv+MV}=\boxed{mv_0+MV_0}$$

衝突後の全運動量

衝突前の全運動量

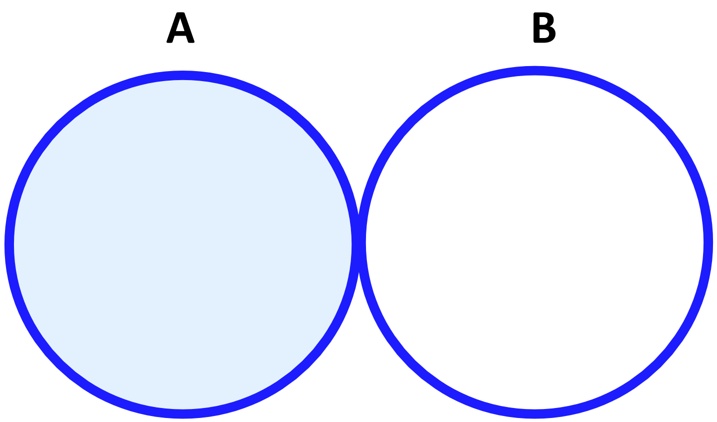
運動量保存則～例題

例題

２球の正面衝突を考える。

1. 衝突した瞬間の力を図に書き込め。

2. この運動で運動量が保存していることを示せ。



力学基礎演習

4.5 力積と運動量
問題18　35ページ

追加設問　衝突時の物体の運動方程式を書け。

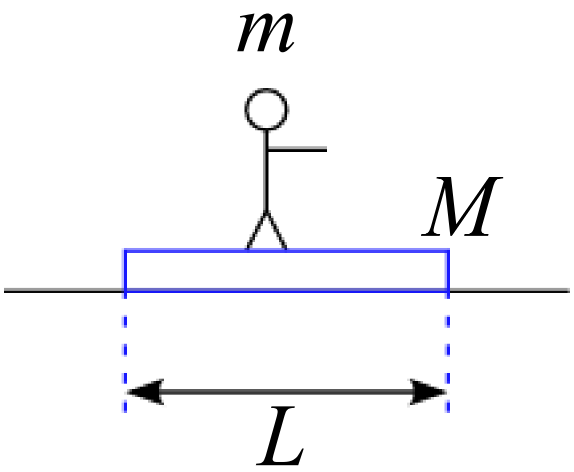
4.5.1 運動量保存の法則
問題20　36ページ

追加設問　衝突時の物体の運動方程式を書け。

運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上に質量 M 、長さ L の板がある。
この板の上を質量 m の人が端から端まで歩くとする。



1. この運動に作用する力を図に書き込め。
　但し、板が人から受ける水平方向の力を F とする。

2. この運動で人と板の運動方程式を書け。

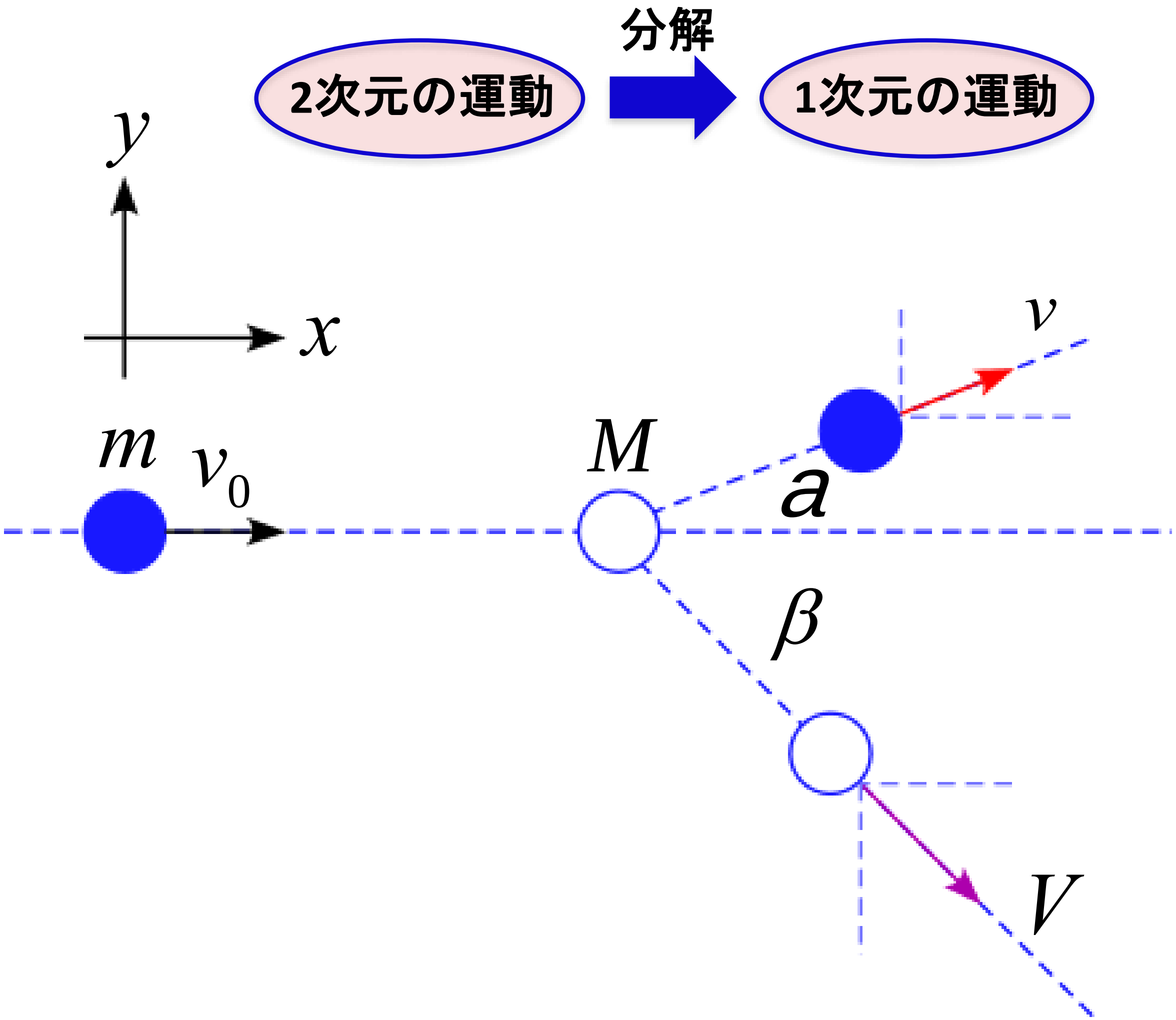
　但し、板の変位 $x_1(t)$ 、人の加速度 $x_2(t)$ とする。

3. 初速度 $v_0 = 0$ のとき、板の移動距離を求めよ。

斜衝突

斜衝突 (ビリヤード)

静止している白球に青玉を完全弾性衝突させる運動 (床との摩擦は無いとする)



運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1\right) = -\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_2\right) = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2\right) = 0$$

衝突時に力 $\vec{F}$ が作用し、
青玉の速度 $\vec{v}_1$
白玉の速度 $\vec{V}_2$
とする

外から外力が加わっていない ➡ 前後の運動量については保存している

$$\boxed{m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2} = \boxed{m\vec{v}_1{}' + M\vec{V}_2{}'}$$

衝突前の全運動量　衝突後の全運動量

$$m\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} V\cos\beta \\ -V\sin\beta \end{pmatrix}$$

従って、

x 方向: $$mv_0 + M \cdot 0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$$

y 方向: $$m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$$

x 方向: $$mv_0 = mv\cos a + MV\cos b$$

y 方向: $$0 = mv\sin a - MV\sin b$$

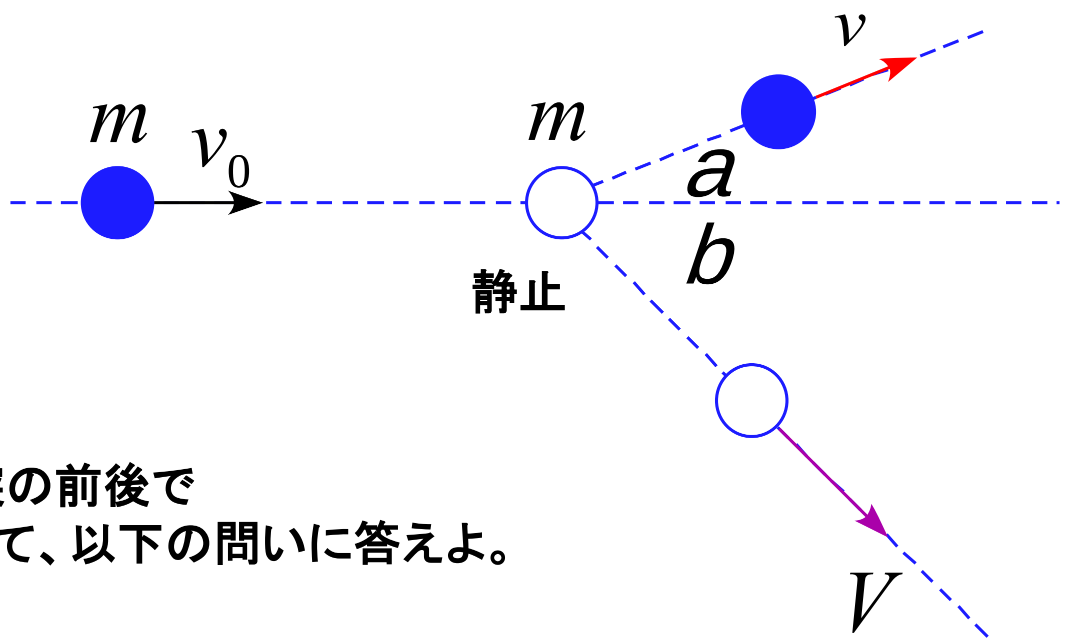
完全弾性衝突

前後でのエネルギーロスは無い

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

斜衝突～例題

斜衝突において、質量が同じであるとする。



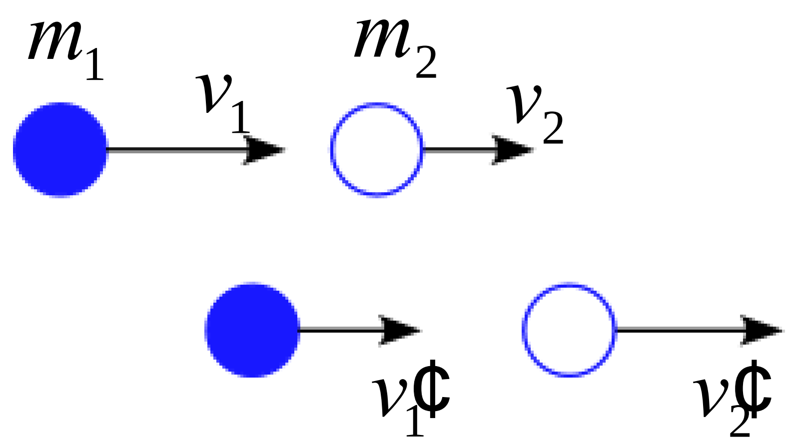
衝突は弾性衝突であり、衝突の前後で
エネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

1. 図の角 $\alpha+\beta$ を求めよ。

2. 速度比 $\dfrac{v}{V}$ を β を使って表せ。

反発係数

1次元の衝突



運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

であるが、速度の情報が不十分である
そこで

同じ2物体の衝突では、
衝突前後の相対速度の大きさの比は一定

(経験的法則)

を用いてその比率を定義すると

反発係数 (跳ね返り係数) e

$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

衝突後の相対速度

衝突前の相対速度

反発係数

2体の相対運動のエネルギーの変化を考えると

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1' - v_2'\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2\left(e^2 - 1\right)$$

完全弾性衝突: $e = 1$ **理想的によく弾む場合** → **エネルギー保存則が成立**

非弾性衝突: $0 \le e < 1$

完全非弾性衝突: $e = 0$ **2物体が一体になる場合**

力学基礎演習

問題17　35ページ

追加設問

衝突時の物体の運動方程式を書け。

問題19　36ページ

追加設問

衝突時の物体の運動方程式を書け。

問題21　37ページ

追加問題

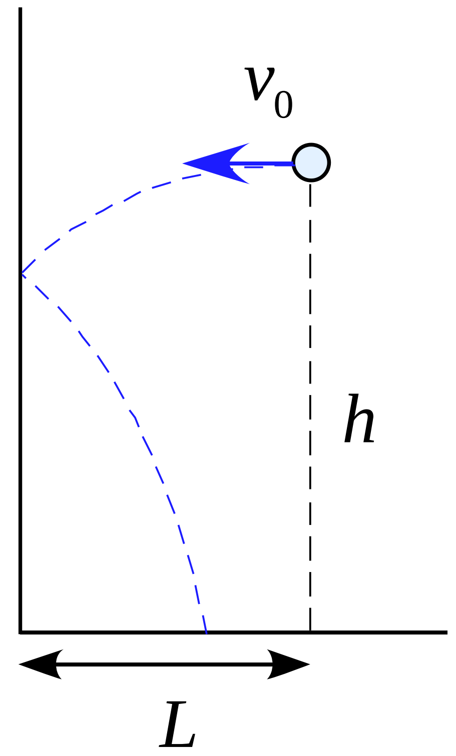
衝突時に力 F が作用したとしてそれぞれ運動方程式を記述せよ。

運動量～例題

例題

質量 m の物体を高さ h の地点から壁に向かって水平方向に初速度 v_0 で投げたところ、壁に当たって跳ね返り、地面に落下した。
壁からの距離は L であり、壁と物体との間の反発係数は e である。
重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

1. 物体が壁に当たる直前までの運動方程式を記述せよ。
2. 物体が壁に当たる時刻 t_1 を求めよ。
3. 物体が壁に衝突した瞬間の運動方程式を記述せよ。(水平方向のみでよい)
4. 物体が壁から受けた力積 I を求めよ。
5. 物体が壁に当たった後の運動方程式を記述せよ。
6. 落下点に到達する時刻 t_2 を求めよ。
7. 壁から落下点までの距離 l を求めよ。



運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたりm_0の物質を噴出しながら運動する物体がある

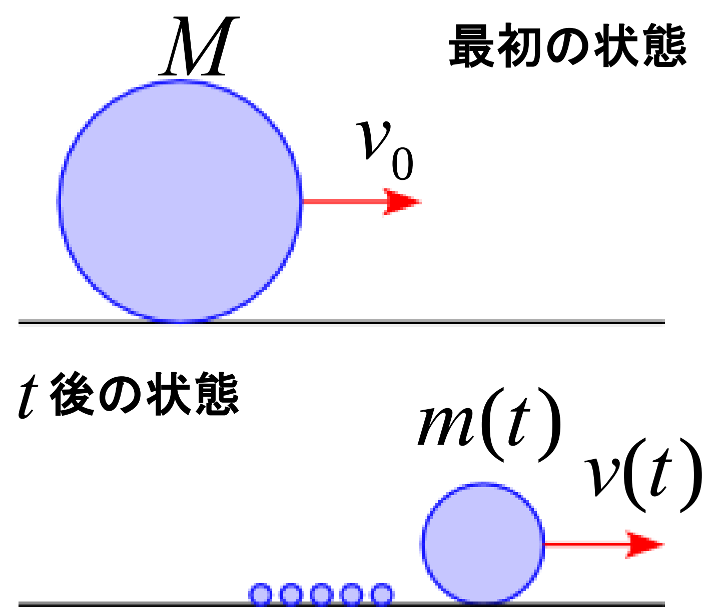
物体の初期質量をM、初速度をv_0とする

噴出物質の速度は常に0になるように噴出されるものとする

1. 時間 t 後の質量 $m(t)$ を記述せよ

2. 時間 t 後の速度 $v(t)$ を求めよ

3. 時間 t 後の移動距離 $x(t)$ を求めよ



運動量保存則～例題

例題

床の上に線密度 ρ の鎖が置いてある。

この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。

重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

引き上げた部分の長さが x 、速度が v 、加速度が a となったとき

1. 引き上げた部分の質量 m を記述せよ。

2. この時の運動方程式を記述せよ。

3. 引き上げる力 F の大きさを求めよ。

4. 一定の速度 v で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。