

振動～単振動

単振動(調和振動)のモデル

バネの復元力

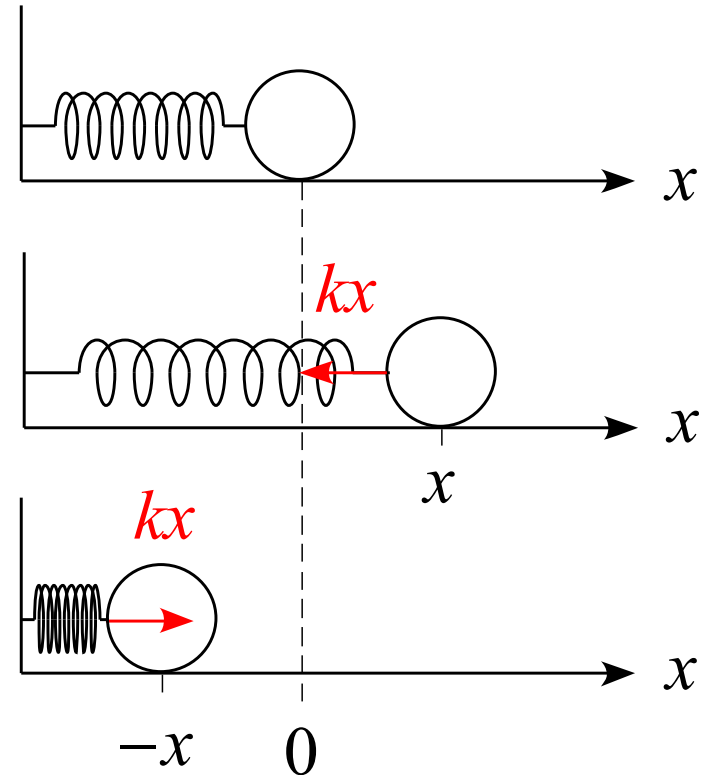
$$\vec{f}_s = -k\vec{x} \quad \text{フックの法則}$$

運動方程式

$$m\vec{a} = -k\vec{x}$$

$$m \frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -k\vec{x}$$

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{k}{m} \vec{x}$$



ここで、 $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ とおくと

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

振動～単振動

2回微分したら
符号が逆になって元に戻る

三角関数  sin cos

この微分方程式の解は一般に

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

角振動数

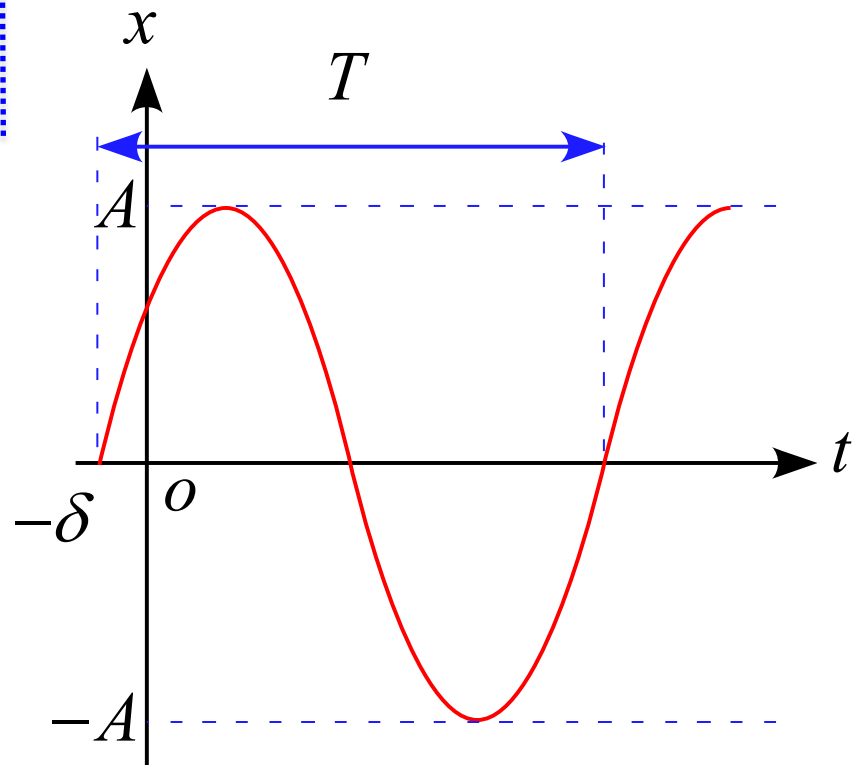
初期位相

と書ける。

周期 T は

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



振動～単振動

初期条件

$t = 0$ で、 $x = 0, \delta = 0$ とすると

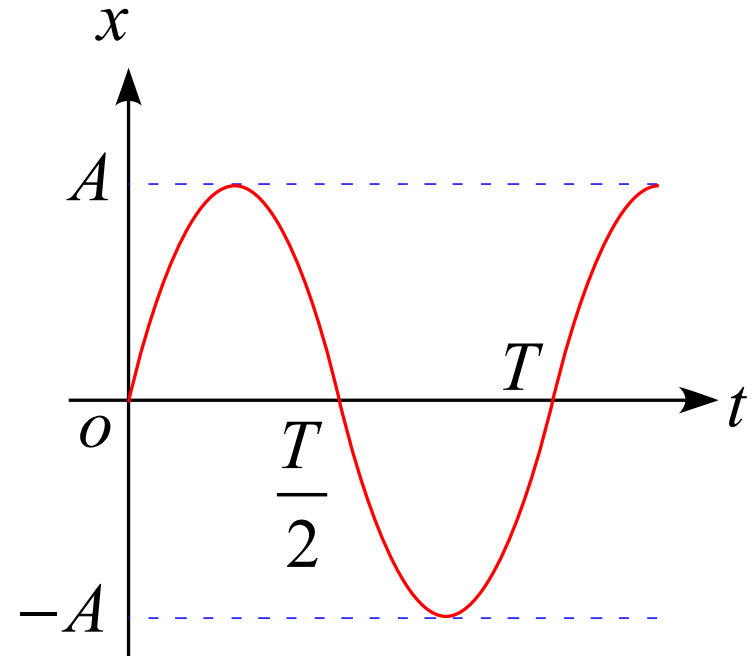
$$x(t) = A \sin \omega t$$

と表すことができる。

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A \sin \omega t] \\ &= A\omega \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} [A\omega \cos \omega t] \\ &= -A\omega^2 \sin \omega t \\ &= -\omega^2 x \end{aligned}$$

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$



$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

振動～初期条件

単振動の初期条件

単振動では2つの初期条件が必要になる

$$x = A \sin(\omega t + \delta), \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$


 定数

A : 振幅

δ : 初期位相

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} [A \sin(\omega t + \delta)]$$

$$= A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

例えば

$t = 0$ で、 $x = x_0, v = v_0$ とすると

$$x(0) = A \sin(\omega \cdot 0 + \delta) = x_0$$

$$A \sin \delta = x_0$$

$$v(0) = A\omega \cos(\omega \cdot 0 + \delta) = v_0$$

$$A\omega \cos \delta = v_0$$

振動～初期条件

よって

$$A \sin \delta = x_0$$

$$A^2 \sin^2 \delta = x_0^2$$

$$A \cos \delta = \frac{v_0}{\omega}$$

$$A^2 \cos^2 \delta = \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2$$

和を取ると

$$A^2 \sin^2 \delta + A^2 \cos^2 \delta = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2$$

$$A^2 (\sin^2 \delta + \cos^2 \delta) = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2$$

$$A^2 = x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2$$

よって

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2}$$

振動～初期条件

比を取ると

$$A \sin \delta = x_0$$

$$A \cos \delta = \frac{v_0}{\omega}$$

$$\frac{A \sin \delta}{A \cos \delta} = \frac{x_0}{\frac{v_0}{\omega}}$$

$$\tan \delta = \frac{\omega x_0}{v_0}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega x_0}{v_0} \right)$$

まとめると

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega} \right)^2}$$

$$\delta = \tan^{-1} \left(\frac{\omega x_0}{v_0} \right)$$

と表される。

力学基礎演習

4.6 単振動

問題23 39ページ

追加設問

物体の運動方程式を書け。

単振動～例題

例題

単振動の一般解 $x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$ において、以下の初期条件を満たすような $x(t)$ を求めよ。

1. $x(0) = 0, v(0) = v_0$

2. $x(0) = x_0, v(0) = 0$

3. $x(0) = x_0, v(0) = v_0$

4. $x(t_1) = x_0, v(t_1) = 0$

単振動～微分方程式

2階の線形微分方程式を解く

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

解を $x = e^{\lambda t}$ とおくと

$$\begin{aligned}\frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} e^{\lambda t} \right) \\ &= \frac{d}{dt} (\lambda e^{\lambda t}) \\ &= \lambda^2 e^{\lambda t}\end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned}\lambda^2 e^{\lambda t} &= -\frac{k}{m} e^{\lambda t} \\ \lambda^2 e^{\lambda t} + \frac{k}{m} e^{\lambda t} &= 0\end{aligned}$$

$$\lambda^2 + \frac{k}{m} = 0$$

微分方程式の**特性方程式**

この式を満たす λ が存在すれば
 $x = e^{\lambda t}$ がこの微分方程式の解である
ことを示している。

単振動～微分方程式

この特性方程式の解は

$$\lambda^2 = -\frac{k}{m} = \omega^2$$

$$\lambda = \pm \sqrt{-\frac{k}{m}} = \pm i\omega$$

解は2つ存在

従って、この2つの解は

$$x_1 = e^{i\omega t}$$

$$x_2 = e^{-i\omega t}$$

と書ける。

単振動～微分方程式

この2解の和や定数倍したものも解となる。
従って、

オイラーの公式

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

$$\begin{aligned} x &= ax_1 + bx_2 \\ &= ae^{i\omega t} + be^{-i\omega t} \\ &= a(\cos \omega t + i \sin \omega t) + b[\cos(-\omega t) + i \sin(-\omega t)] \\ &= a(\cos \omega t + i \sin \omega t) + b(\cos \omega t - i \sin \omega t) \\ &= (a + b) \cos \omega t + i(a - b) \sin \omega t \\ &= \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t \\ &= \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \sin(\omega t + \delta) \\ &= A \sin(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

$$\alpha = a + b$$

$$\beta = i(a - b)$$

$$A = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$$

単振動～エネルギー

バネの弾性力による位置エネルギー

運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = - \int kx dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = - \int kx dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = - \int kx dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt + \int kx dx = 0$$

$$\frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2 = C$$

C は積分定数

従って、運動エネルギーと
バネの弾性力による位置エネルギーの和が
一定の値になることを表している。

単振動～運動エネルギー

運動エネルギー $K(t)$ は

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{1}{2} m v^2 \\ &= \frac{1}{2} m \left[A \omega \cos(\omega t + \delta) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) \end{aligned}$$

一般解

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt} \left[A \sin(\omega t + \delta) \right]$$

$$= A \omega \cos(\omega t + \delta)$$

単振動～位置エネルギー

バネの弾性力による位置エネルギー $U_s(t)$ は

$$U_s(t) = \frac{1}{2} k x^2$$

$$= \frac{1}{2} k \left[A \sin(\omega t + \delta) \right]^2$$

$$= \frac{1}{2} (m \omega^2) A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta)$$

一般解

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta)$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

単振動～力学的エネルギー

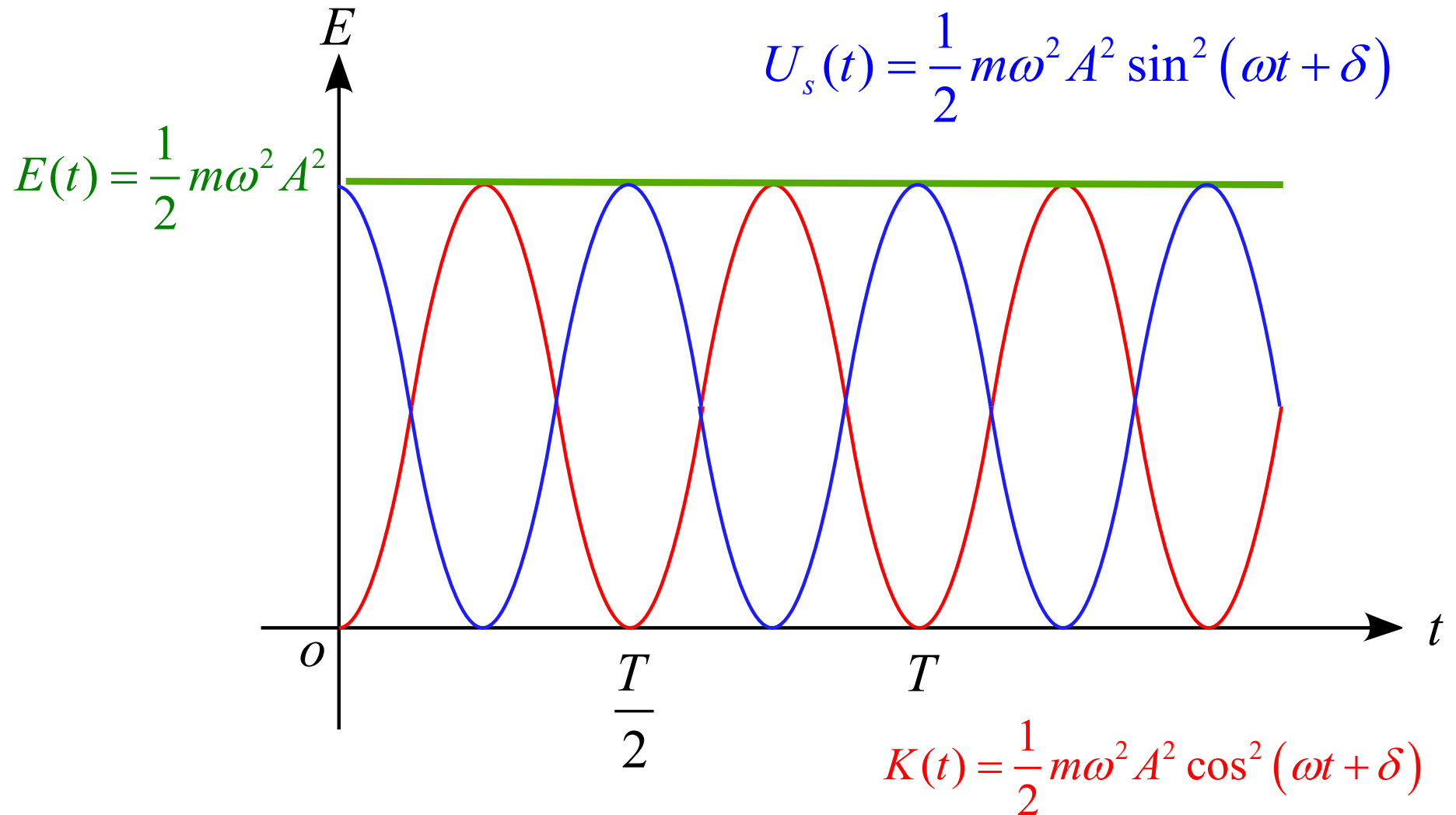
従って、力学的エネルギー $E(t)$ は

$$\begin{aligned} E(t) &= K(t) + U_s(t) \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \cos^2(\omega t + \delta) + \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \delta) \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \left[\cos^2(\omega t + \delta) + \sin^2(\omega t + \delta) \right] \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \end{aligned}$$

となり、常に一定の値になることが確認できる。

単振動～エネルギーグラフ

単振動の力学的エネルギーのグラフ



単振動～例題

例題

なめらかな水平面上に壁からバネが取り付けられている。

バネは自然長の状態で静止しているとする。

以下の問いに答えよ。

$t = 0$ で初速度 v_0 を壁向きに与えると、物体は単振動をした。
物体の質量を m 、バネ定数を k とする。

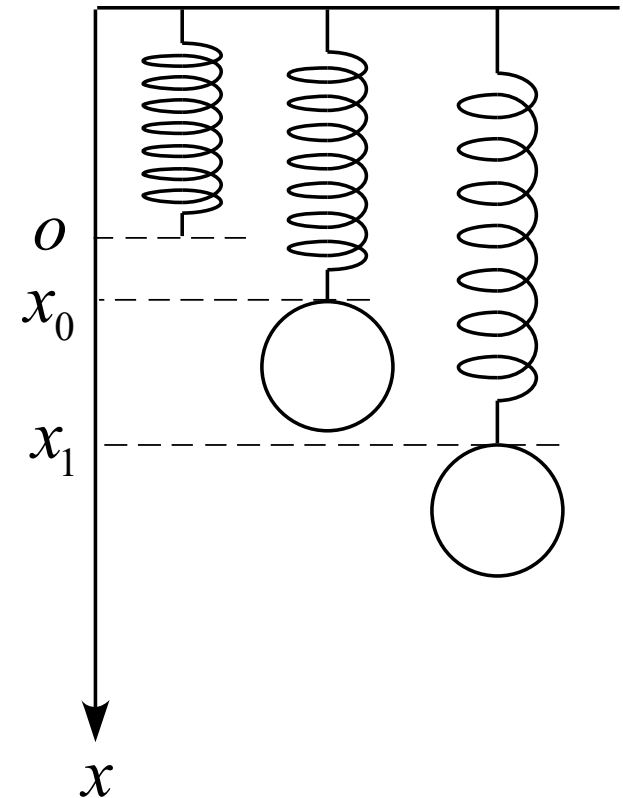
1. 物体の運動方程式を記述せよ。
2. 物体の速度 $v(t)$ を求めよ。
3. 物体の変位 $x(t)$ を求めよ。
4. 物体の加速度 $a(t)$ を求めよ。
5. $v(t), x(t), a(t)$ のグラフを横軸 t として描け。

単振動～例題

例題

バネの片方を天井に固定し吊り下げた。このときのバネの下端を原点とする。
バネの下端に質量 m の物体を取り付けて静止させた。この位置を x_0 とする。
物体をそこからさらに x_1 の位置まで引き下げ、静かに離し振動させた。
この瞬間を $t = 0$ とする。以下の問いに答えよ。

1. 物体の運動方程式を記述せよ。
2. 物体の速度 $v(t)$ を求めよ。
3. 物体の変位 $x(t)$ を求めよ。



単振り子～例題

例題

質量 m の物体が長さ L のひもにつるされている。

ひもをつるしている点を通る鉛直線を基準とし、振れ角 θ_0 で静かに手放した。

このときの位置を A とする。但し、 $A \ll L$ である。

以下の問いに答えよ。

1. 物体の運動方程式を記述せよ。
2. 物体の運動は単振り子とみなせる。周期、振幅を求めよ。
3. 物体を手放した時刻を $t = 0$ とすると、原点を初めて通過する時刻 t_1 を求めよ。
4. 物体の変位 $x(t)$ のグラフを横軸 t として描け。

(参考)

その他の振動

- ・減衰振動

速度に比例する抵抗力・・・など

- ・強制振動

強制力が働く

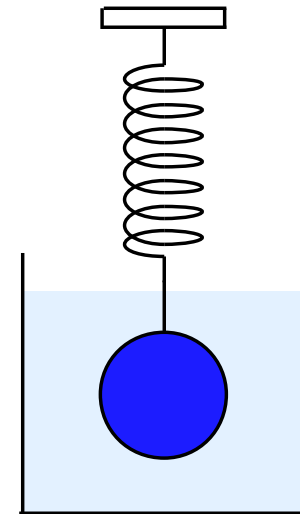
外部から周期的な力が加わった場合

復元力が働くように設計された橋梁
(一定の周期で風が吹く)

ブランコ

お寺の鐘

液体中



エネルギー平均～例題

例題

質点が単振動している。1周期についての運動エネルギーの平均値 $\overline{K}$ と位置エネルギーの平均値 $\overline{U}$ を求め、これらが等しいことを示せ。

力学基礎演習

4.7.2 保存力

問題28 44ページ

追加設問

物体の運動方程式を書け。