運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

モーメントと角運動量の関係

回転運動と角運動量

質点の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

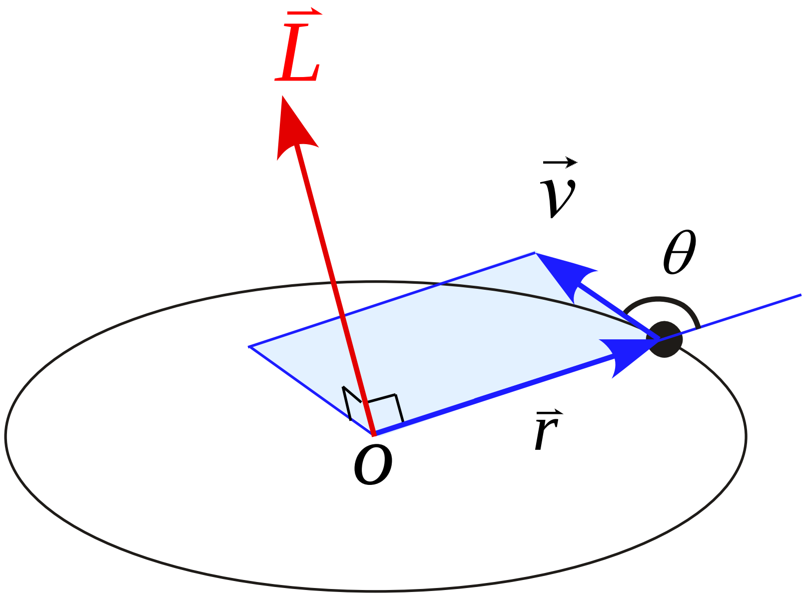
両辺に左から位置ベクトル $\vec{r}$ をかけると(外積)

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\vec{r} \times \vec{p}}_{\text{角運動量}}\right) = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\text{モーメント}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}}$$

回転運動と角運動量

途中の式変形について　(何故、$\vec{r}$ が微分の中に入るのか？)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\,//\,m\vec{v}$ より

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\vec{0}$$

課題5 (3)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

角運動量とモーメント

角運動量とモーメントの関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

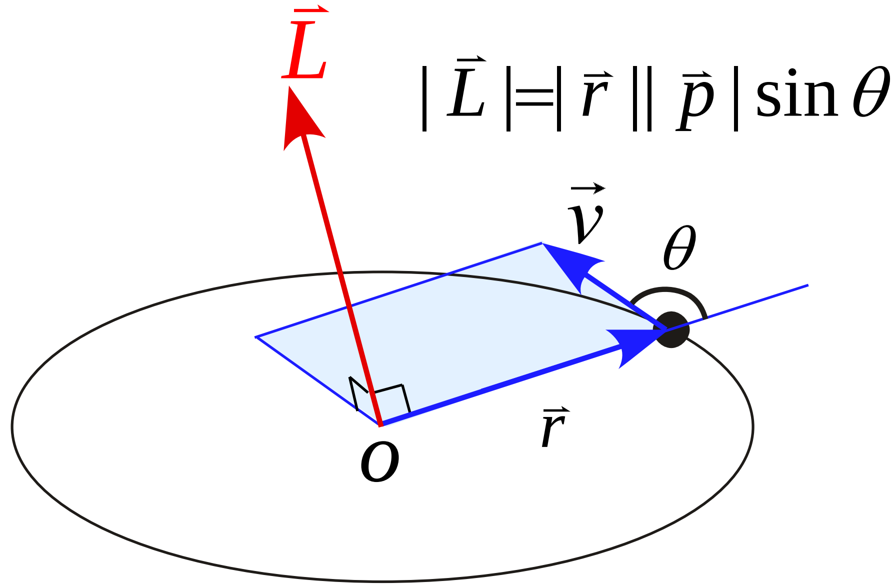
質点が点 O まわりを回転する勢いを表している

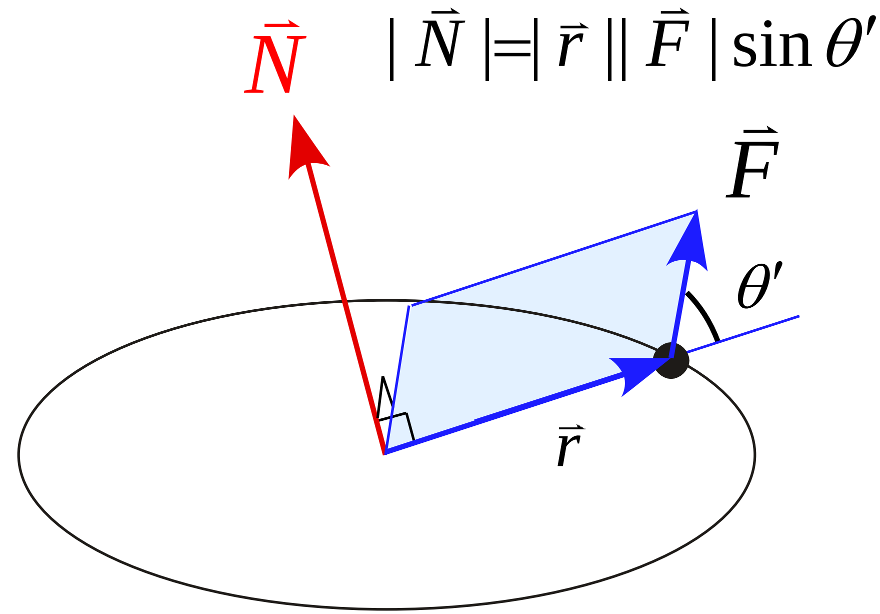
$$[L][M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T]}$$

$$N = \vec{r} \times \vec{F}$$

点Oまわりの力のモーメント

$$[L][M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$





角運動量保存則

角運動量とモーメントの関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

ある質点の点 O まわりの
角運動量の変化は
この質点に働く点 Oまわりの
力のモーメントに等しい

もし、モーメント $\vec{N} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

外力によるモーメントの総和 $\vec{N}$ が
$\vec{0}$ のときは、内力が働いていたと
しても、系の角運動量 $\vec{L}$ は変化しない

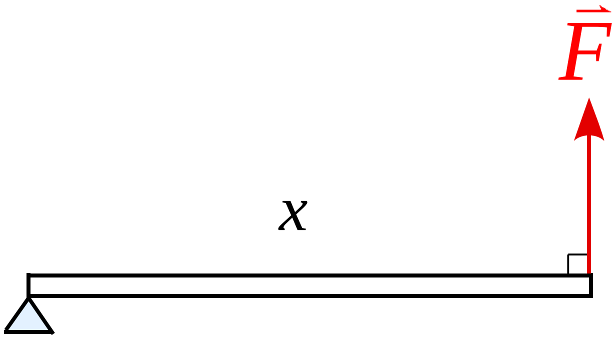
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

力のモーメント～例題

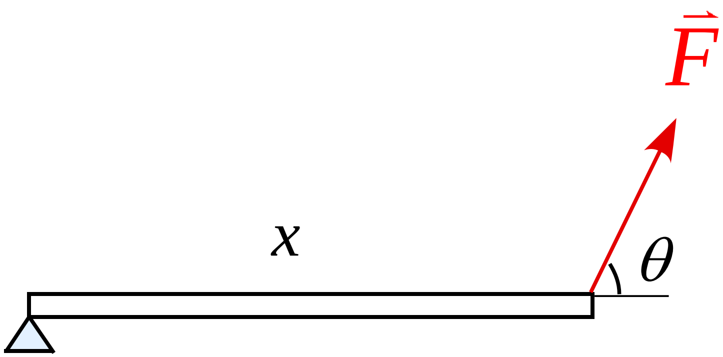
例題

以下の図の力のモーメント N を表せ。但し、棒の質量は無視できるとする。

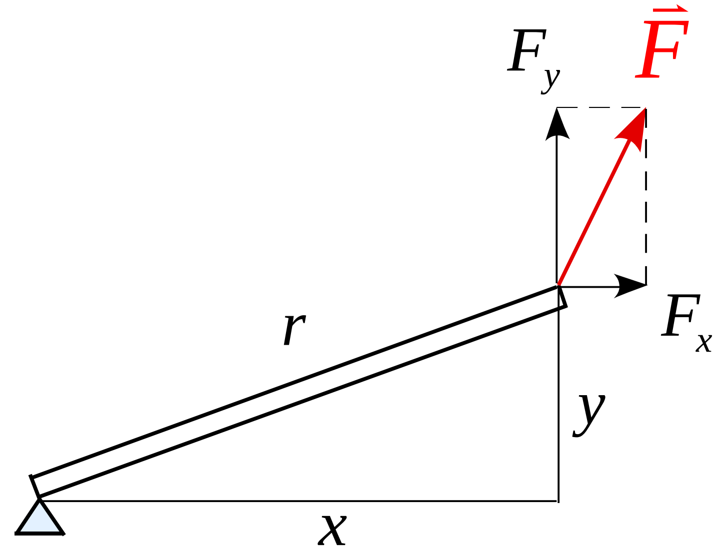
1.



2.



3.

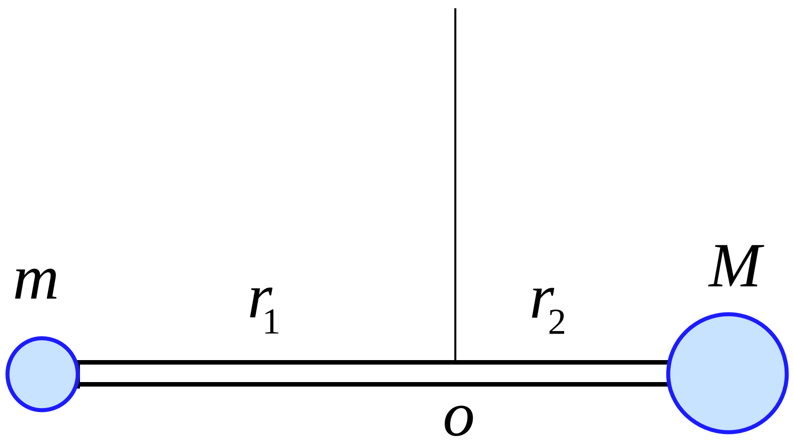


力のモーメント～例題

例題

軽い棒の両端に質量 m の物体と質量 M の物体が図のように取り付けられていて点 o で糸につるされている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。



1. 棒に作用する力を書き込め。

2. 棒の運動方程式を記述せよ。

3. 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

4. 棒が回転しない条件 $\frac{r_1}{r_2}$ を求めよ。

力のモーメント～例題

例題

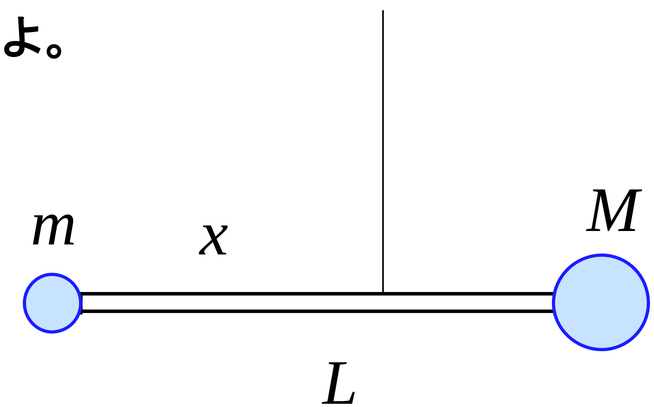
図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点が取り付けられ、糸でつるさている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

   (1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

   (2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。



2. 棒の質量が m の場合

   (1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

   (2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

力学基礎演習

4.8 剛体と力のモーメント

問題35　49ページ

追加設問　物体の運動方程式を書け。

問題36　49ページ

追加設問　物体の運動方程式を書け。

問題37　50ページ

問題38　51ページ

力のモーメント～例題

例題

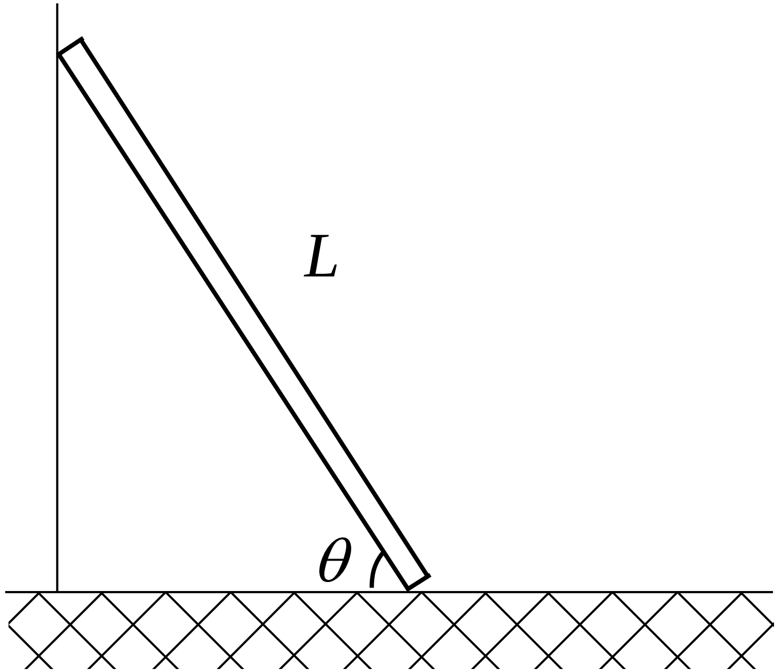
図のような長さ L、質量 m の棒が鉛直の壁に立てかけられている。

壁は滑らかであるが、床は粗いとする。

床と棒とのなす角 θ を小さくすると、棒は滑り出してしまう。

滑り出す直前の角 θ_0 の条件 $\tan\theta_0$ を求めよ。

但し、静止摩擦係数は μ を用いよ。



力のモーメント～例題

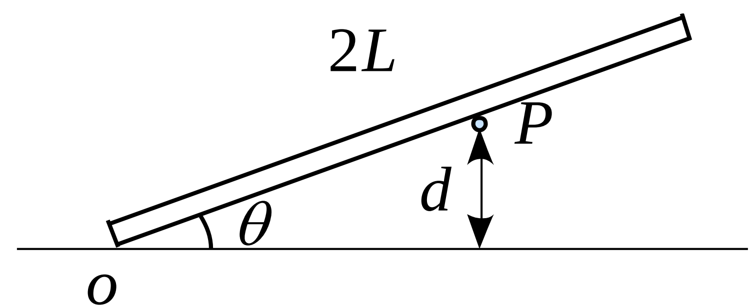
例題

粗い水平面上に一端を点 o に置き、点 Pに設置された釘に立てかけてある長さ $2L$ の棒がある。棒と水平面のなす角は θ、水平面から釘までの高さは d であるとする。棒全体の質量は mとして以下の問いに答えよ。

1. 棒に作用する力を書き込め。

2. 床と棒との垂直抗力をN摩擦力を f 、釘からの垂直抗力を N'としたとき運動方程式を記述せよ。

3. 回転の運動方程式を記述せよ。



4. 水平面と接している点 Oにおける $\dfrac{f}{N}$ を求めよ。

中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている

力 $\vec{F}$ の作用線が常にある任意の点 O を通る

中心力

$$\vec{F}(r) = F(r)\boxed{\frac{\vec{r}}{r}}$$

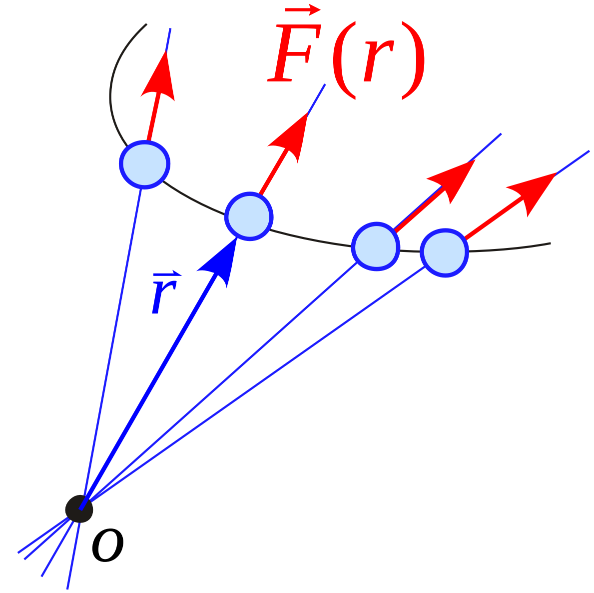
力の大きさ

力の向き

単位ベクトル

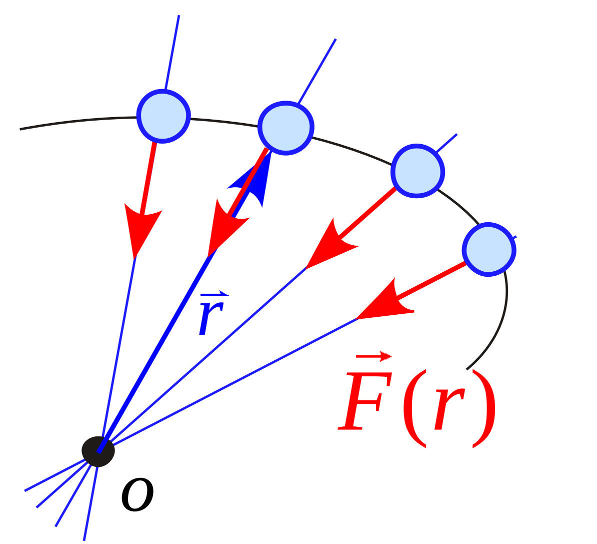
$F(r) > 0$

(斥力)



$F(r) < 0$

(引力)



中心力～角運動量保存

角運動量の変化を計算すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)$$

$$= m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= 0 + \vec{r} \times \boxed{F(r)\frac{\vec{r}}{r}}$$

中心力

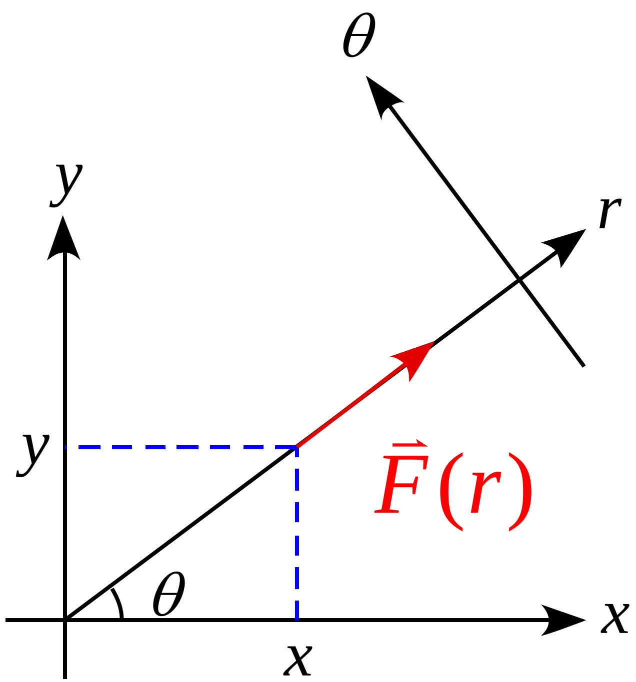
$$= 0$$

従って、中心力が働く運動では角運動量が保存する

中心力～運動方程式

運動方程式から考えるとする

極座標表示を使用する



中心力は

r 方向 $F_r = F(r)$

θ 方向 $F_\theta = 0$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、a_r, a_θ は

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表されるので、

課題6 (2)

中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F(r)$$

動径方向の運動方程式

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

と表される

中心力～運動方程式

ここで、θ方向の式が何を示しているか検討してみよう

変位は

$$x(t) = r\cos\theta$$

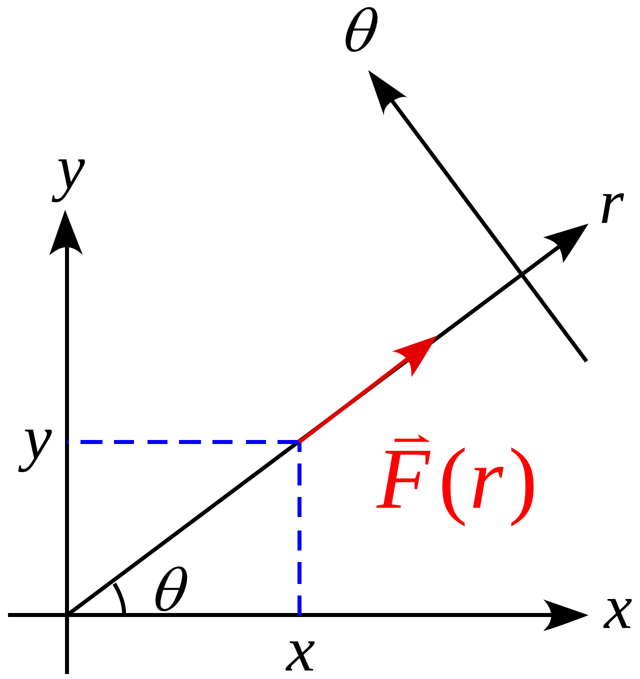
$$y(t) = r\sin\theta$$

である。
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 L は

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

である

中心力～運動方程式

角運動量 $\vec{L}$ の計算について

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - r_x \cdot 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix}$$

と表される

課題 1 (1)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

中心力～運動方程式

従って、z 成分だけ考えればよく

$$L_z = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

$$= r\cos\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] - r\sin\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= rm\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - rm\frac{dr}{dt}\sin\theta\cos\theta + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}$$

と表される

中心力～運動方程式

従って、θ方向の式において

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{dL}{dt}=0$$

となる

即ち、

$$ma_\theta=0$$

は角運動量保存則を表している

単振り子～例題

例題

質量 m の物体が長さ l のひもにつるされている。
ひもをつるしている点を通る鉛直線を基準とし、ひもの振れ角 θ を取る。
以下の問いに答えよ。

1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

   と表すことができる。
   振れ角 θ が十分小さいときの周期 T を求めよ。

3. 物体を θ_0 まで傾け、$t=0$ で離したとする。
   振れ角 $\theta(t)$ と、糸の張力 S を求めよ。
   但し、θ_0 は十分に小さな角度であるとする。

角運動量～例題

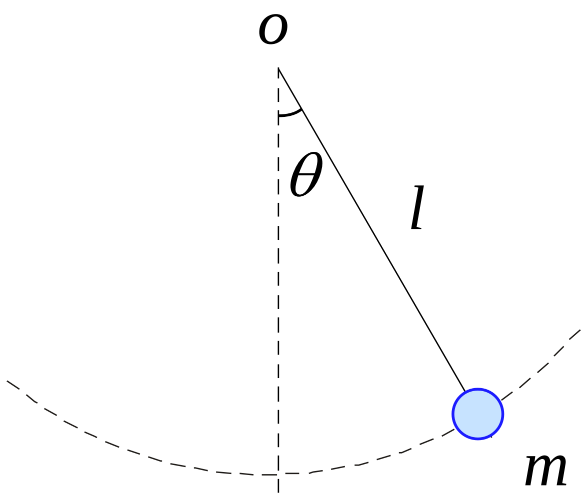
例題

質量 m の質点が xy 平面で半径 r_0 の円運動をしている。
$t=0$ で $(x, y)=(r_0, 0)$ にあり、反時計まわりに角速度 ω で回転するとする。

1. 運動量 $\vec{p}=(p_x, p_y)$ を求めよ。

2. この運動における質点の角運動量 $\vec{L}$ を求めよ。

角運動量～例題



例題

図のような単振り子において、振れ角を θ としたとき、

回転の運動方程式から

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

となることを示したい。以下の問いに答えよ。

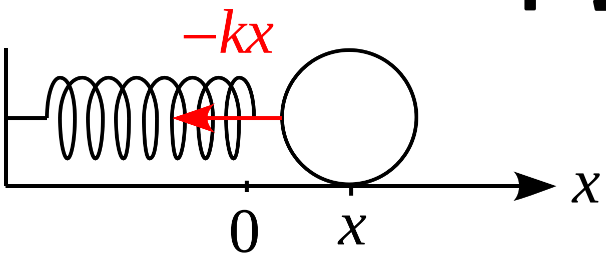
1. 質点の速さを v としたとき、点 o まわりの角運動量を表せ。

2. 点 O まわりの力のモーメントを求めよ。

3. 回転の運動方程式を記述せよ。

4. 題意の式を導け。

単振動～まとめ



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{x(t) = A\sin(\omega t + \delta),\ \omega^2 = \frac{k}{m}}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

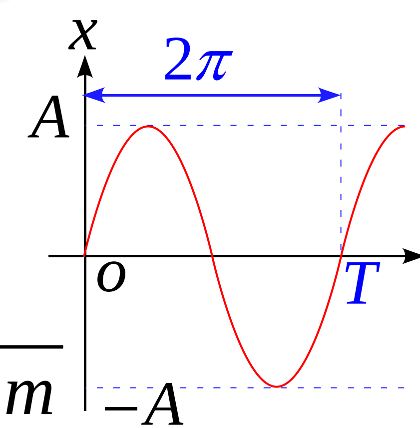
ωについて

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\boxed{\frac{k}{m}}A\sin(\omega t + \delta)$$

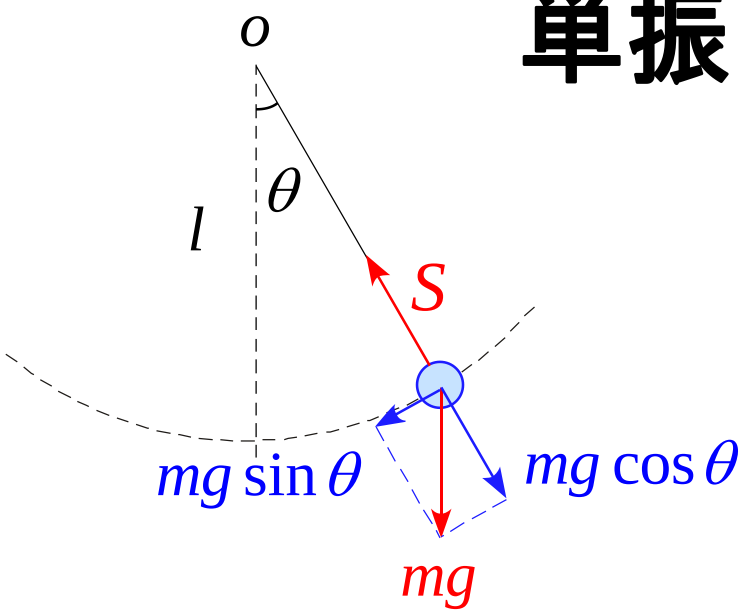
周期 T について



$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

単振り子～まとめ



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg\cos\theta - S$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = mg\cos\theta - S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = -mg\sin\theta$$

単振り子～まとめ

糸の長さは $r = l$ (一定) なので

$$\frac{dr}{dt} = 0$$

従って、

$$-ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = mg\cos\theta - S$$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

となる。
2式目は

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\theta$$

と変形できる。

振れ角 θ が十分に小さければ

$$\sin\theta \simeq \theta$$

と近似ができ、

$$\boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta}$$

微分方程式を解くと

$$\boxed{\theta(t) = A\sin\left(\omega t + \delta\right) \ ,\omega^2 = \frac{g}{l}}$$

Aとδは初期条件が決める

となる。

単振り子～まとめ

ω について

$$\frac{d\theta}{dt} = A\omega\cos(\omega t + \delta)$$

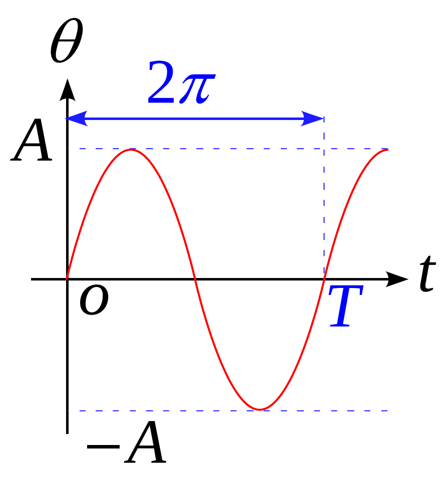
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -A\boxed{\omega^2}\sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\boxed{\frac{g}{l}}A\sin(\omega t + \delta)$$

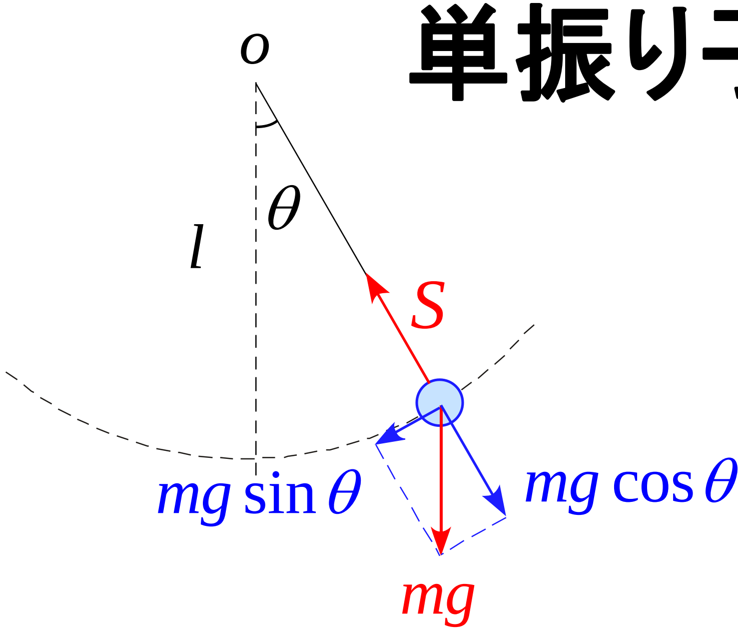
周期 T について

$$\boxed{\omega T = 2\pi}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$



単振り子～エネルギー



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = mg\cos\theta - S$$

$$ma_\theta = -mg\sin\theta$$

a_r, a_θ

に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = mg\cos\theta - S$$

$$m\left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = -mg\sin\theta$$

単振り子～エネルギー

一般的な極座標表示 (速度)

$$v_r = \frac{dr}{dt} \qquad v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}$$

運動方程式の θ 方向の式に着目

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = -mg\sin\theta$$

糸の長さは $r = l$ **(一定) なので** $\frac{dr}{dt} = 0$

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg\sin\theta$$

さらに、極座標表示において θ **方向の速度は一般的に** $\boxed{v_\theta = r\frac{d\theta}{dt}}$ **であるから**

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

と表される。

単振り子～エネルギー

ここで両辺に $v_\theta = l\dfrac{d\theta}{dt}$ をかけると

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}v_\theta = -mg\sin\theta l\frac{d\theta}{dt}$$

代入

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}$$

$$ml\frac{1}{l}\frac{dv_\theta}{dt}v_\theta = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$mv_\theta\frac{dv_\theta}{dt} = -mgl\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2\right) = \frac{d}{dt}\left(mgl\cos\theta\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv_\theta^2 - mgl\cos\theta\right) = 0$$

となる。

単振り子～エネルギー

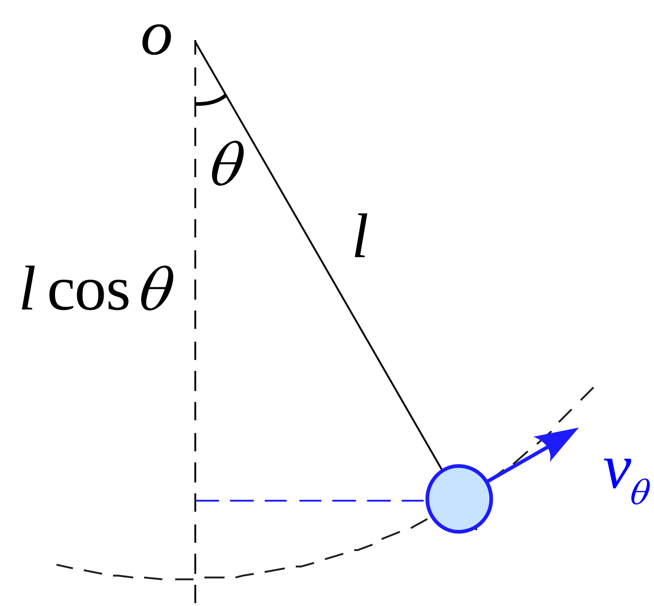
従って、この運動においてエネルギーが保存することがわかる。

$$\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\frac{1}{2}mv_\theta^2}_{\text{運動エネルギー}}+\left(\underbrace{-mgl\cos\theta}_{\text{位置エネルギー}}\right)\right]=0$$

ここで、この式において、最下点を基準にするため mgl を加えると

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2+mgl-mgl\cos\theta\right]=0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}mv_\theta^2+mgl\left(1-\cos\theta\right)\right]=0$$



と表される。