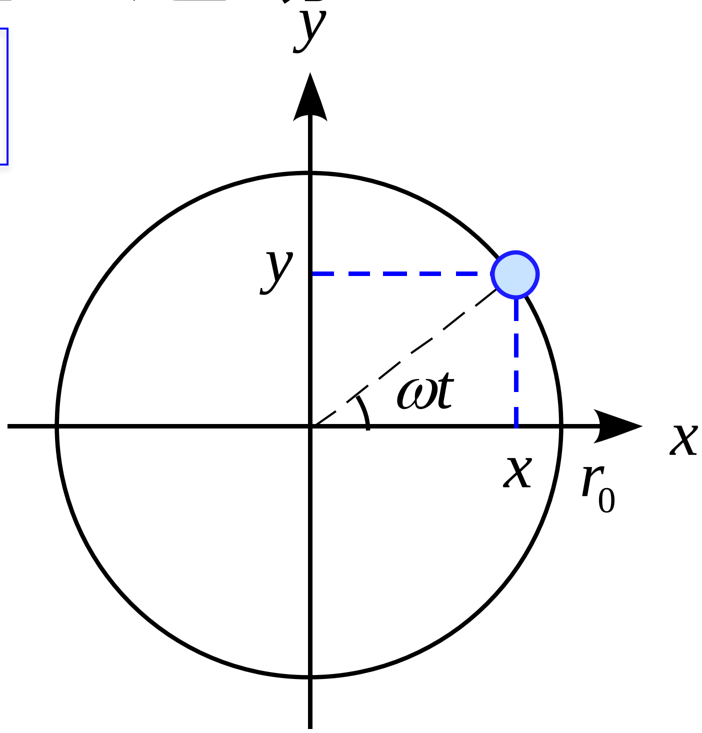
力学基礎演習

4.6.1 振り子の運動
問題24　40ページ
4.8.2 角運動量保存の法則
問題39　52ページ

円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動



ある時刻 t での位置は

$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt}\left[r_0 \cos \omega t\right] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left[r_0 \sin \omega t\right] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。

円運動～等速円運動

従って、

$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(-r_0\omega\sin\omega t\right)^2+\left(r_0\omega\cos\omega t\right)^2}$$

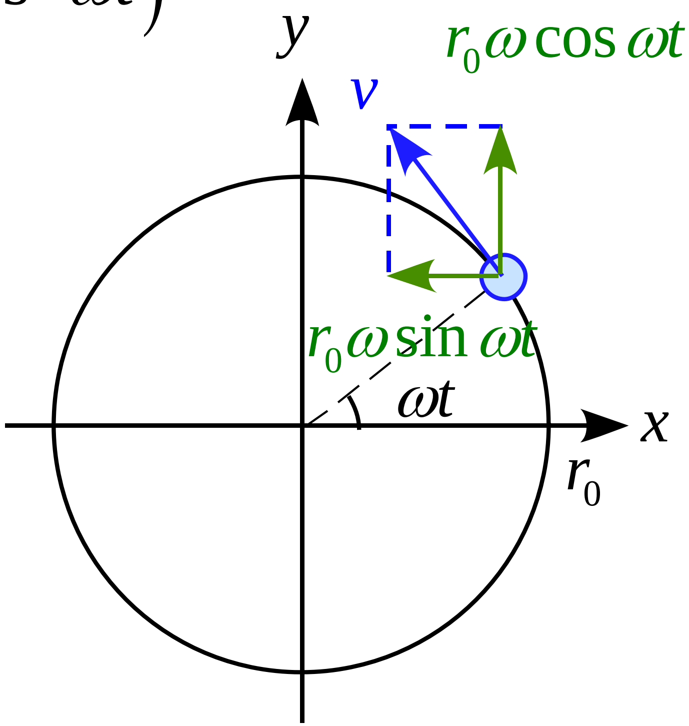
$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\sin^2\omega t+{r_0}^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)}$$

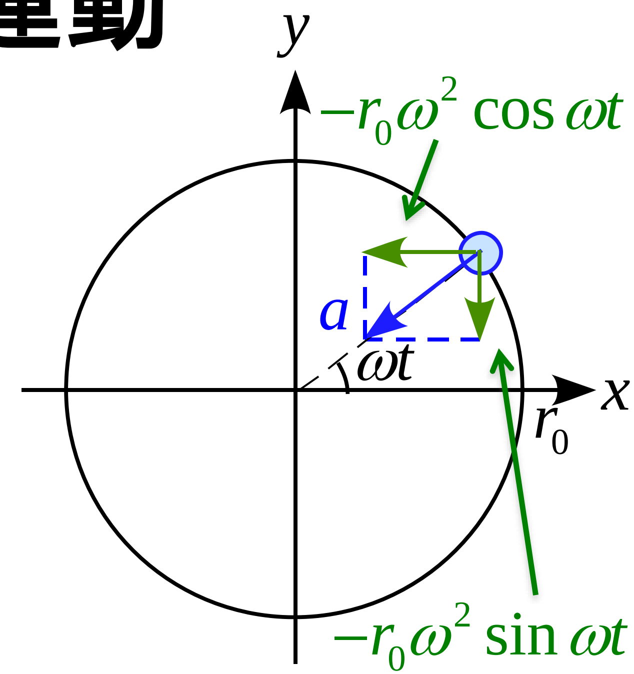
$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2}$$

$$=r_0\omega$$

となる。



円運動～等速円運動



加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}\left[-r_0\omega\sin\omega t\right] = -r_0\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}\left[r_0\omega\cos\omega t\right] = -r_0\omega^2\sin\omega t$$

と表される。

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega^2\cos\omega t\right)^2 + \left(-r_0\omega^2\sin\omega t\right)^2}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4\cos^2\omega t + {r_0}^2\omega^4\sin^2\omega t}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4} = r_0\omega^2$$

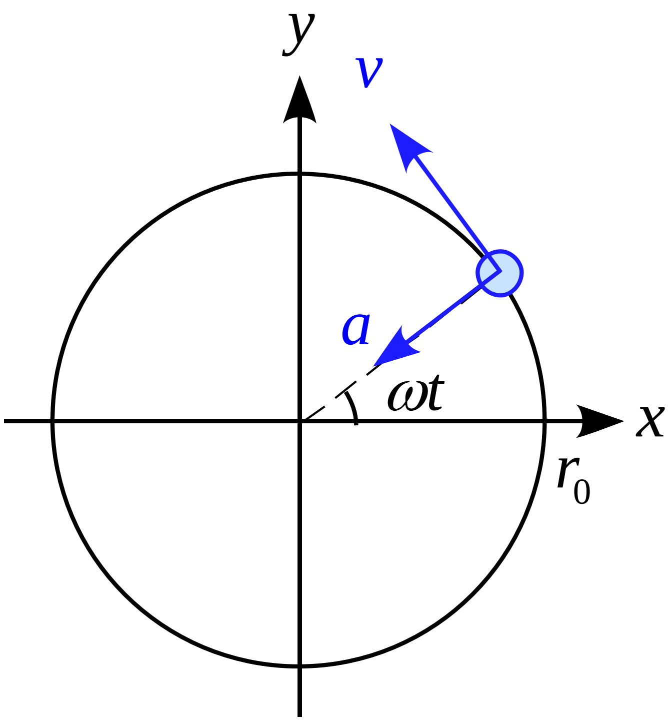
となる。

円運動～等速円運動

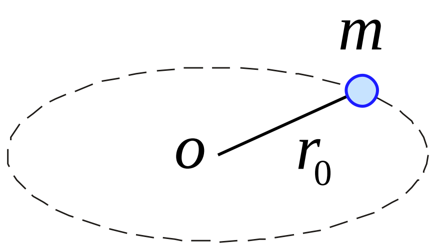
等速円運動 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ **(一定)**

$$v = r_0 \omega$$

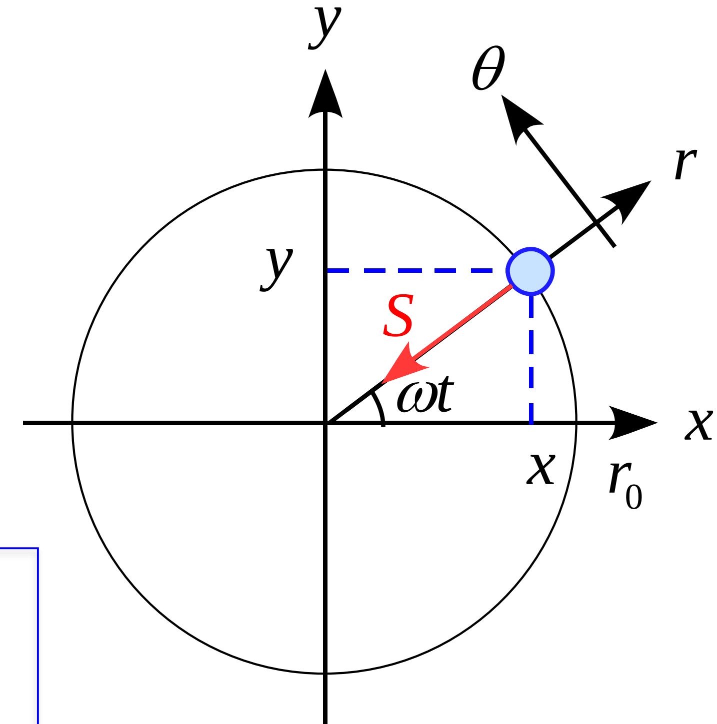
$$a = r_0 \omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



円運動〜運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$

a_r, a_θ

に代入

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定) なので $\dfrac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = S$$

$$mr_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

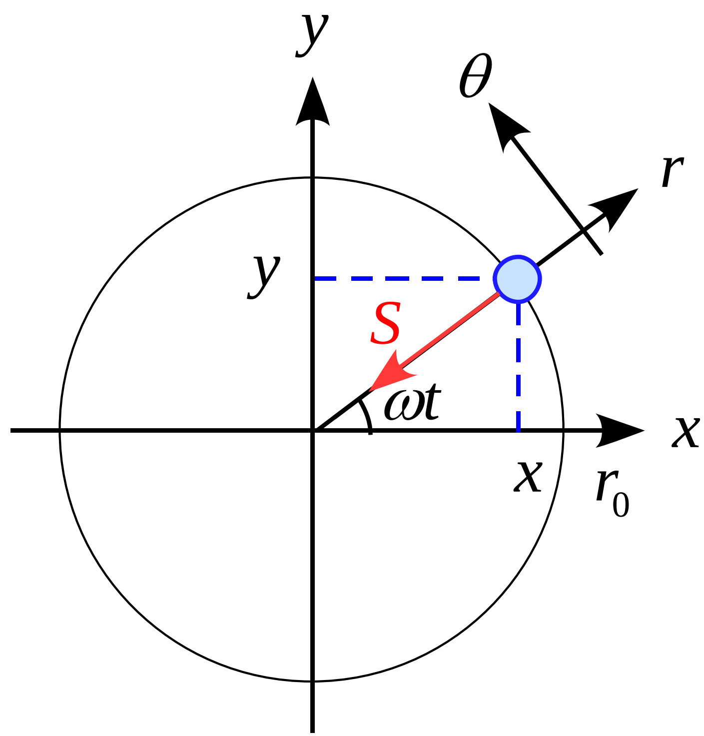
角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

とすると、

$$m\boxed{r_0\omega^2} = S$$

$$ma = S$$

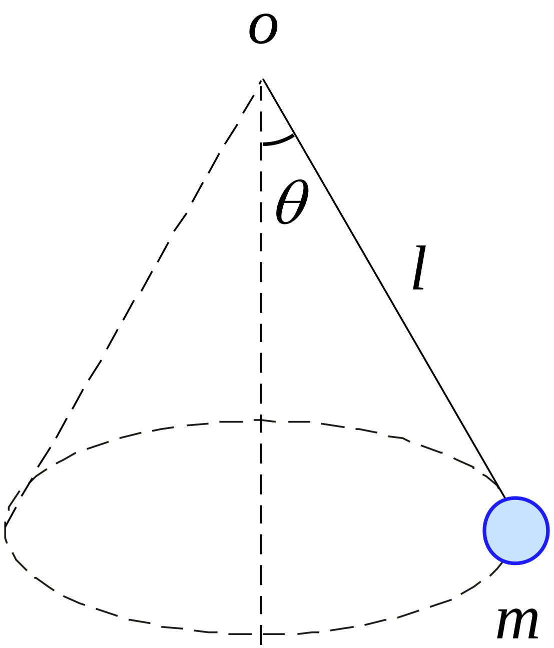
中心方向に加速度があると考えられる



力学基礎演習

4.2.2 等速円運動
問題5　26ページ

円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問いに答えよ。

1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

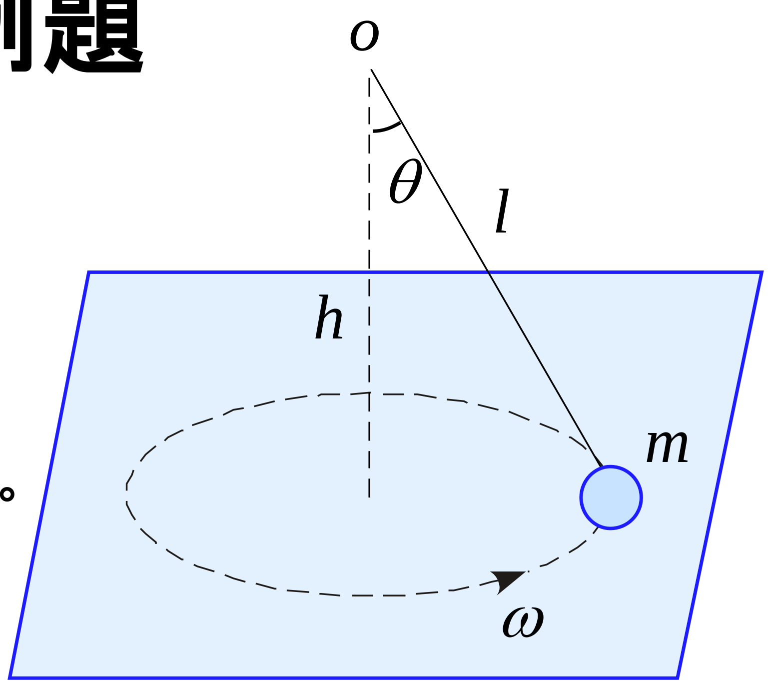
2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表すことができる。
糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面上で角速度 ω の円運動している。
糸は水平面から高さ h の地点に設置されている。
水平面は滑らかで摩擦は無視できるとする。
以下の問いに答えよ。

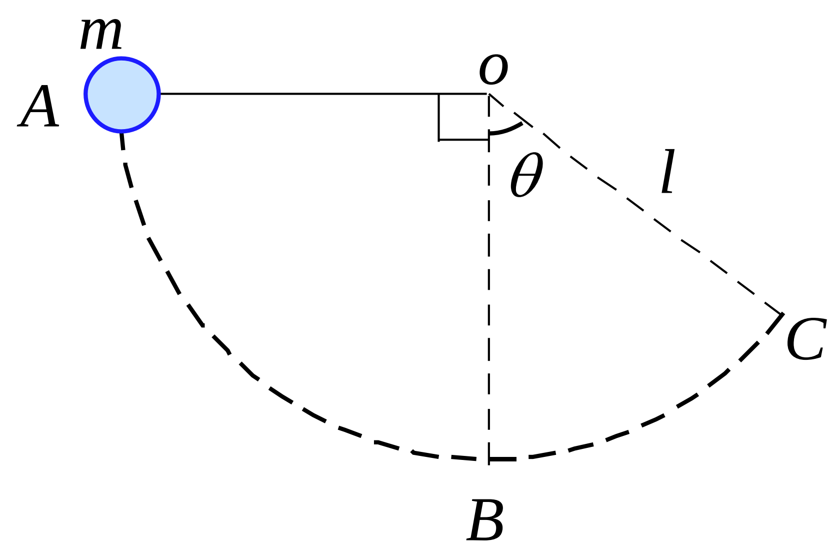
1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3. 糸の張力 S 、水平面からの垂直抗力 N を求めよ。

4. 角速度 ω が ω_0 を超えると水平面から離れる。ω_0 を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

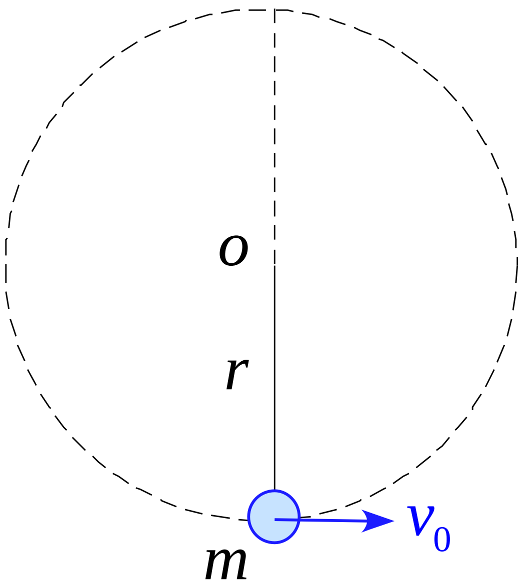
以下の問いに答えよ。

1. r **方向、** θ **方向の加速度を** a_r, a_θ **としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。**

2. **最下点** B **での糸の張力** T_B **を求めよ。**

3. **点** C **での糸の張力** T_C **を求めよ。**

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。
糸の長さは r 、物体の質量は m である。
物体を水平の状態にして放し、円運動する。
糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。
最下点で初速 v_0 を与えたとき
以下の問いに答えよ。

1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 物体が1回転するために必要な初速 v_0 の条件を求めよ。