

面積速度～運動方程式

中心力が作用するモデルを考える

運動方程式は

$$ma_r = -f(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

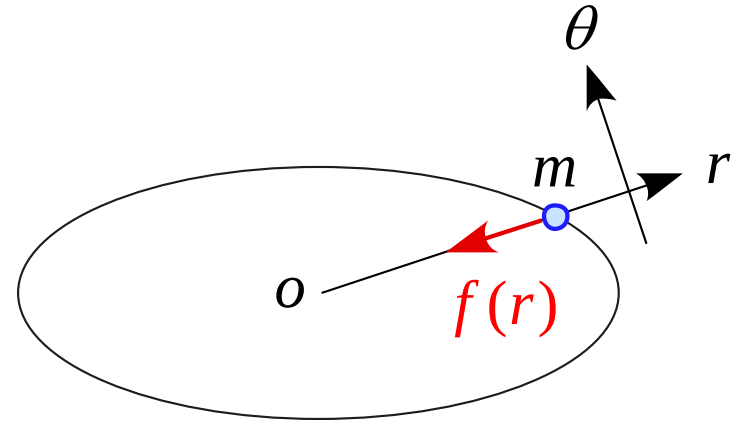
θ 方向の式に着目し、 a_θ を代入すると

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = 0$$

$$m \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] = 0$$

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

となる。



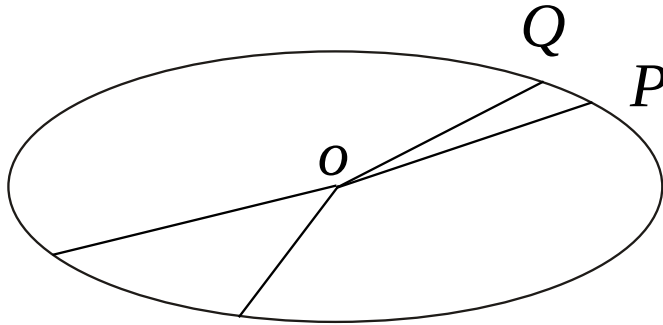
一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

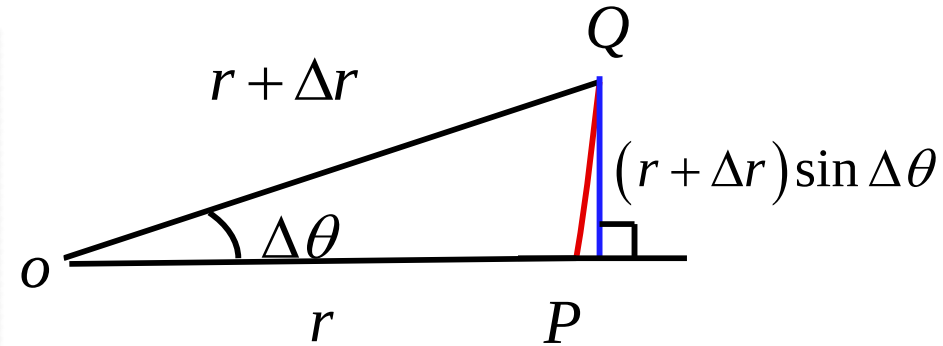
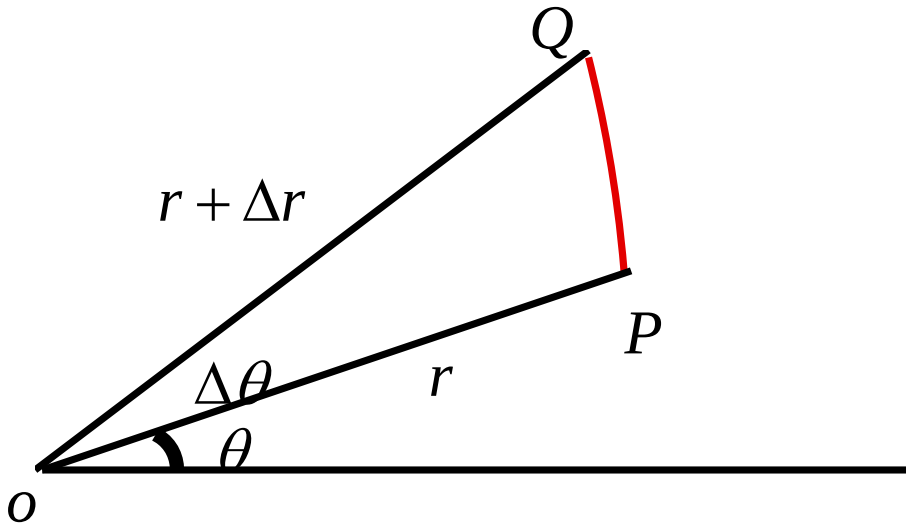
$$a_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

面積速度～運動方程式

面積速度：動径ベクトルが
単位時間に描く面積



面積 oPQ に着目すると



よって、面積は

$$\Delta S = \frac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta \theta$$

とみなすことができる。

動径によって面積が描かれる速さは
 Δt を無限小にした時の

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}$$

の極限值で与えられる。

面積速度～運動方程式

この極限を考えると

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} r (r + \Delta r) \sin \Delta \theta}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} r \cdot r \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right) \sin \Delta \theta}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} r^2 \frac{\sin \Delta \theta}{\Delta t} \left(1 + \frac{\Delta r}{r}\right)\end{aligned}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

となる。

この式と、 θ 方向の運動方程式を比較すると

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

となる。

従って、

どんな中心力であっても

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.}$$

面積速度が一定である。

ケプラーの第2法則

面積速度～万有引力

太陽のまわりを回る惑星のモデルを考える
太陽の質量を M 、惑星の質量を m とする。

運動方程式は

$$ma_r = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$ma_\theta = 0$$

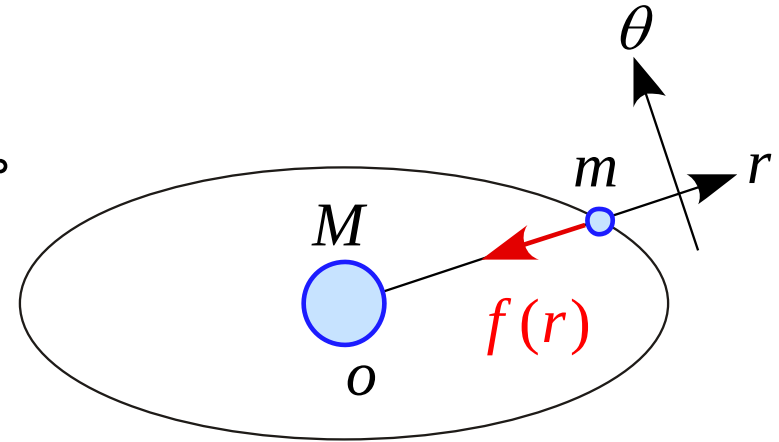
θ 方向の式に着目し、 a_θ を代入すると

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = 0$$

$$\left[\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) \right] = 0$$

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L \quad (\text{const.})$$

となる。



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

面積速度～万有引力

面積速度を考えると

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

$$2m \frac{dS}{dt} = 2m \left[\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$mr^2 \frac{d\theta}{dt} = L$$

$$\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$$

と表される。

これは面積速度が一定であることを示していて、ケプラーの第2法則に相当する。

一方、 r 方向の運動方程式は

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{L}{mr^2} \right)^2 \right] = -G \frac{Mm}{r^2}$$

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{L}{mr^3} = -G \frac{Mm}{r^2}$$

が得られる。

実際の惑星の軌道は楕円であるが、円からのずれが小さいことを考慮し、軌道を半径 a の円であると近似する。

面積速度～万有引力

よって、 $\frac{dr}{dt} = 0$ となり

$$\frac{L^2}{ma^3} = G \frac{Mm}{a^2}$$

$$L^2 = GMm^2a$$

が得られる。

公転周期 T は

$$T = \frac{\pi a^2}{\frac{dS}{dt}} = \frac{\pi a^2}{\frac{L}{2m}} = \frac{2m\pi a^2}{L}$$

と表される。

従って、

$$T = \frac{2m\pi a^2}{\sqrt{GMm^2a}}$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{\frac{3}{2}}$$

となる。この式は

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

と変形でき、これは

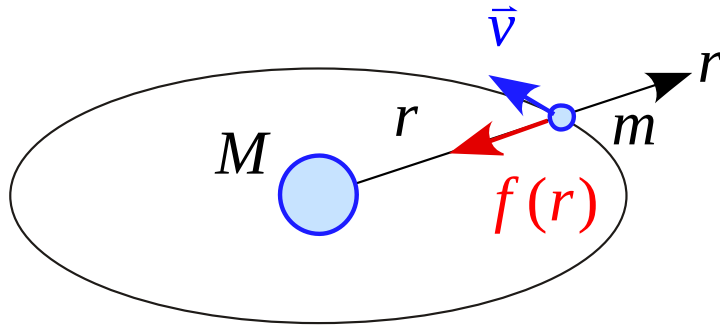
ケプラーの第3法則

「惑星の周期の二乗は長半径の三乗に比例する」

に相当することを意味している。

万有引力～エネルギー

質量 M の天体のまわりを質量 m の人工衛星が速度 $\vec{v}$ でまわっている。
天体と人工衛星の距離を r とする。



運動方程式は

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -f(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

と表される。

両辺に $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ の内積を取ると

$$m \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = -G \frac{Mm}{r^2} \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$m \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) = -G \frac{Mm}{r^3} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = -G \frac{Mm}{r^3} \frac{1}{2} 2r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(G \frac{Mm}{r} \right)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 - G \frac{Mm}{r} \right) = 0$$

となる。

万有引力～エネルギー

途中計算について

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(|\vec{v}||\vec{v}|\cos 0) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(|\vec{v}|^2) = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

ここで $|\vec{v}|^2 = v^2$ と書き変えると

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

と表される。

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(|\vec{r}||\vec{r}|\cos 0) = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}(|\vec{r}|^2) = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

ここで $|\vec{r}|^2 = r^2$ と書き変えると

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} r^2 \right)$$

と表される。

万有引力～エネルギー

従って、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 - G \frac{Mm}{r} \right) = 0$$

$$\frac{1}{2} mv^2 - G \frac{Mm}{r} = \text{const.}$$

となり、エネルギー保存則が成立する。

$$\frac{1}{2} mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = \text{const.}$$

運動エネルギー

万有引力による
位置エネルギー

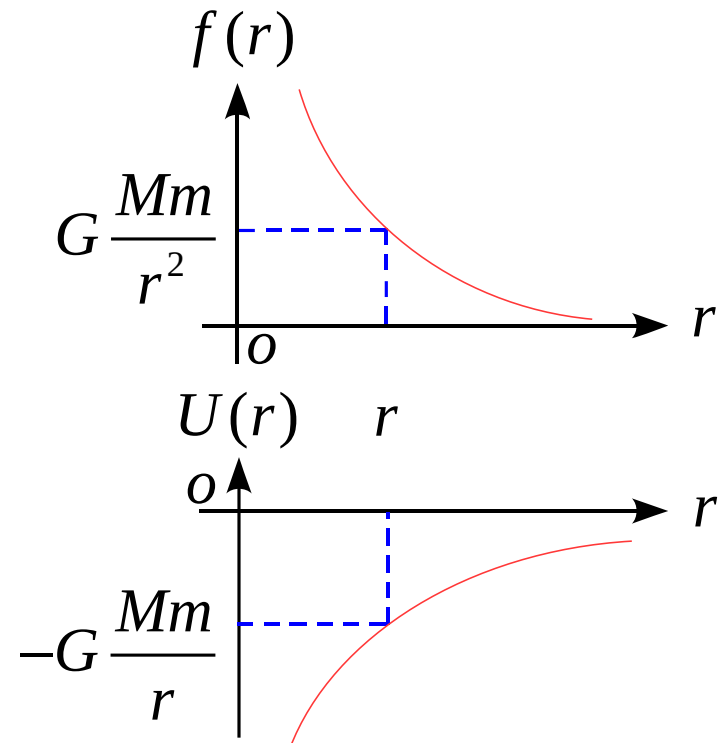
基準点について

エネルギーの式について、

$$\frac{1}{2} mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{r} \right) = 0$$

となる $r = \infty$ の点を基準として扱う。

無限遠



力学基礎演習

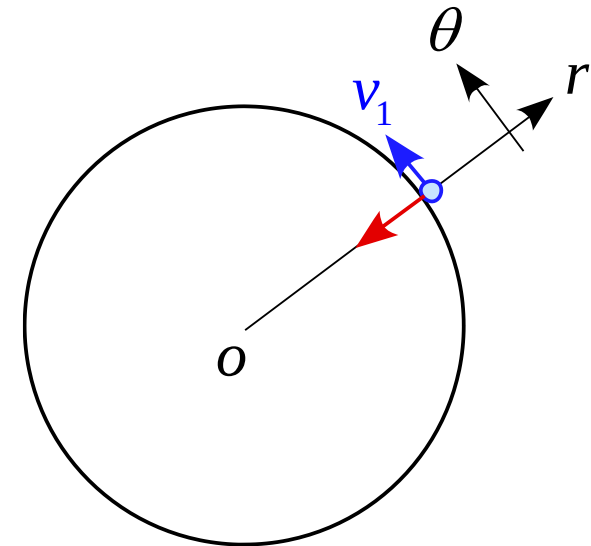
4.7.5 ポテンシャルエネルギー 問題34 48ページ

万有引力～例題

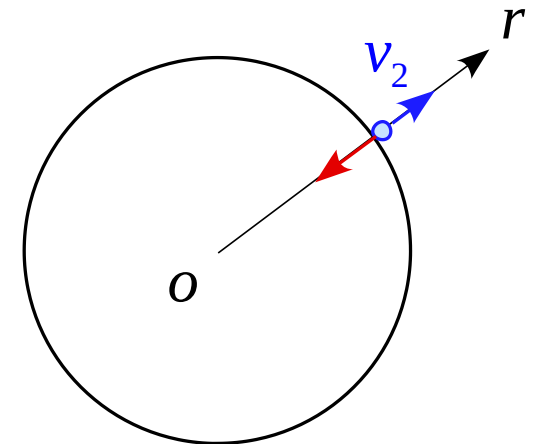
例題

地球の半径を R 、地球の質量 M 、万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。

地球の表面上で物体に水平方向に初速度 v_1 を与えた。
すると物体は地表すれすれに円運動した。
 v_1 を求めよ。



地球の表面上で物体に上空方向に初速度 v_2 を与えた。
すると物体は無限遠方に飛び去った。
このような運動をする為の v_2 の条件を求めよ。
但し、エネルギー保存則が成立するモデルとする。



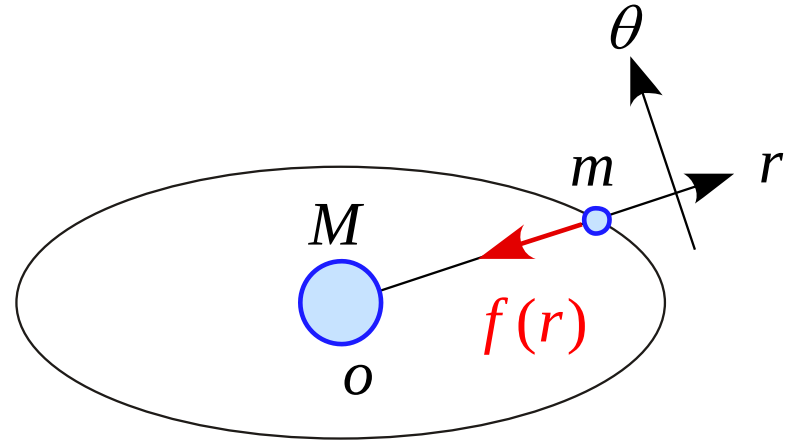
万有引力～例題

例題

極座標における運動方程式

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -G \frac{Mm}{r^2}$$

より、力学的エネルギー保存則を導け。



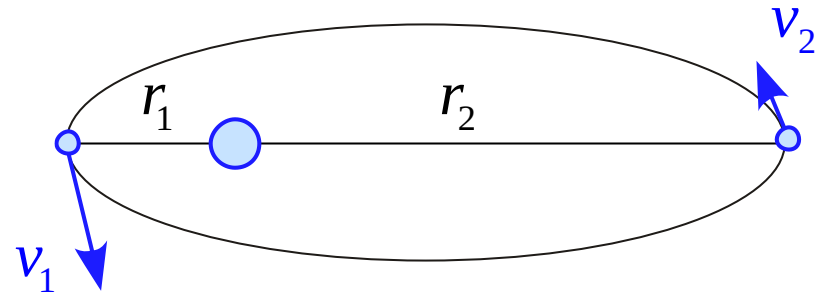
惑星のモデル～例題

例題

質量 m の惑星が質量 M の太陽のまわりを楕円軌道上で運動している。

近日点 r_1 での速さを v_1 遠日点 r_2 での速さを v_2 とする。

万有引力定数を G として以下の問いに答えよ。



1. 角運動量から v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。
2. 面積速度を求め、 v_1, v_2, r_1, r_2 の関係式を求めよ。
3. 近日点と遠日点でのエネルギーの関係を記述せよ。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $ma = F$

x で積分

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

t で積分

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

角運動量

モーメント

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- ・問題文で指定されている場合はそれを利用する
- ・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- ・一般的には運動の進行方向を正にとると良いことが多い
- ・直線的な運動は1つ、平面的是2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する
力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は

1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力

の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
 $ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

解ける

運動方程式を立てる



$$m \frac{dv}{dt} = F$$



$$v = \text{○}$$



$$x = \text{○}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

t で積分

t で積分

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

解くことが困難

どの物理量の関係が必要か検討する

t で積分

x で積分

左側から $\vec{r}$ で外積

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

力学の講義を終えて

取り扱った内容

- ・加速度 / 速度 / 変位
- ・ニュートンの運動の法則
- ・仕事とエネルギー
- ・エネルギー保存則
- ・運動量と力積
- ・運動量保存則
- ・力のモーメント
- ・角運動量
- ・角運動量保存則
- ・円運動
- ・単振動 / 単振り子
- ・万有引力の法則
- ・ケプラーの法則

取り扱っていない内容

- ・剛体の運動
- ・慣性モーメント