ニュートンの運動の法則

第1法則（慣性の法則）
すべての物体は、外部から作用を受けない限りその運動の状態をそのまま維持する。静止しているものはそのまま静止をし続け、ある速度で運動しているものはそのままの速度を保持して直線上を等速運動し続ける。

第2法則（ $m\vec{a} = \vec{F}$ ）
物体に外から力が作用するとき、その物体の得る加速度の大きさは、加えた力の大きさに比例し、その方向は力の向きに一致する。

第3法則（作用・反作用の法則）
2つの物体の間に作用する力は、それらを結ぶ直線上に作用し、その大きさは等しく、方向は反対向きである。

慣性の法則

慣性：物体が常に現在の状態を保とうとする性質

ガリレイ以前の物理にはこのような考え方は無かった。

→さまざまな間違いを含んでいた

間違いの例

・軽いものはゆっくり落ちる　→空気の摩擦力のため

・何もしなければやがて物体は止まる　→床との摩擦力のため

運動状態が変化

これらの邪魔する力さえなければ、「現在の運動状態を保つ」
→物体は運動状態を変えることはない。

慣性の法則

物体に力が働かないか、働いていてもつり合っていれば

静止している物体：静止し続ける
運動している物体：等速度運動を続ける　$\vec{v}$が一定

力に着目する

運動方程式

物体に力が働かないか、
働いていてもつり合っている

慣性の法則が成立

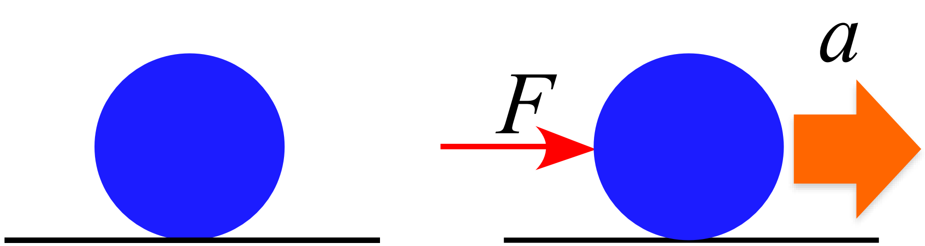
崩れる

運動状態が変化

最初：停止

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = v$$

速度を持つには、加速度が必要



大きな力が加われば、
大きな加速度が得られるはず

F は a に比例する

$$a \,\mu\, F$$

F は m に比例する

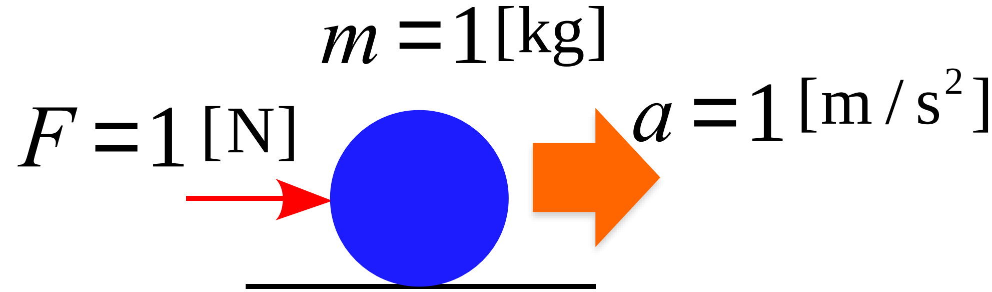
$$m \,\mu\, F$$

$$k \cdot ma = F$$

k は比例定数

定義

$m = 1[\mathrm{kg}]$ の物体に
$a = 1\,[\mathrm{m/s^2}]$ の加速度を
生じさせる力を $F = 1[\mathrm{N}]$ とする



$$k \cdot ma = F \xrightarrow{k=1} ma = F$$

運動方程式

$$ma = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = F$$

力学＝ニュートン力学

運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

次元解析

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML]}{[T^2]}$$

組立単位

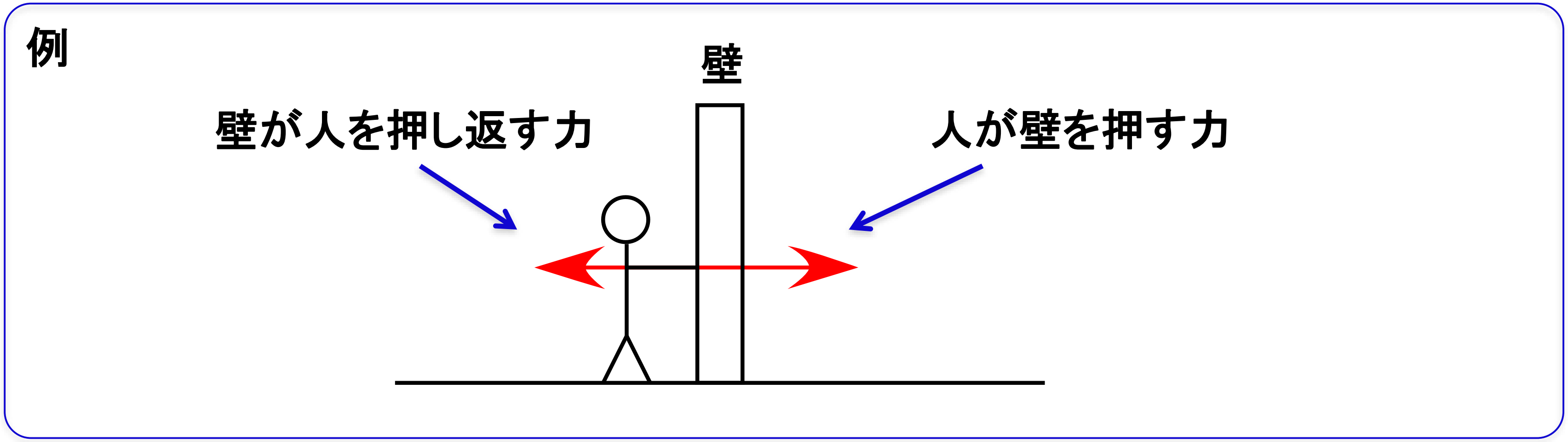
$$\left[\mathrm{kg}\cdot \mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right] = [\mathrm{N}]$$

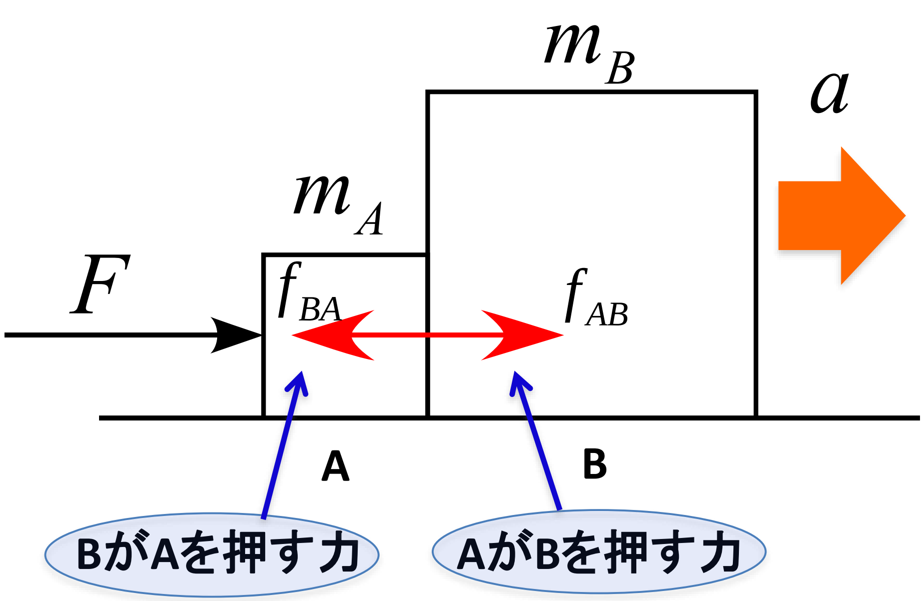
注意）
質量と重さの違い

質量：慣性の大きさを表す量 (慣性質量)
動きにくさの度合いを表した物理量

重さ：物体に働く重力 ←重さは力

作用・反作用の法則

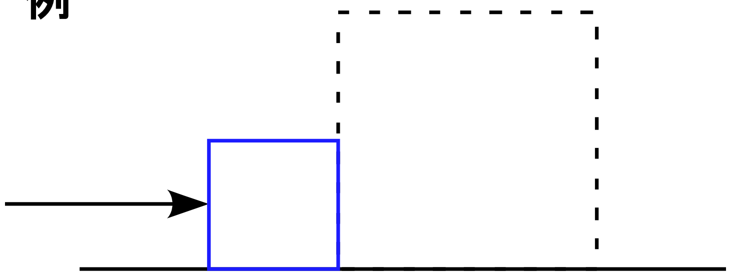


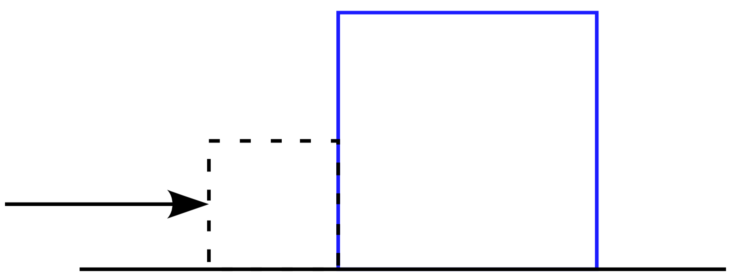


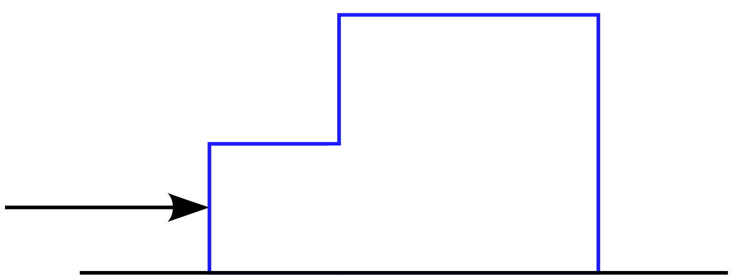
- 摩擦は無視
- 物体A、Bは一緒に右に運動

作用･反作用の法則

例







物体A、Bそれぞれの運動方程式

$$m_A a = F - f_{BA}$$

$$m_B a = f_{AB}$$

$$(m_A + m_B)a = F - f_{BA} + f_{AB}$$

接着剤で接着して、塊を押すと考えると

$$(m_A + m_B)a = F$$

同じ現象を表す式だから、数学的にも同じ式でなければならない

$$\boxed{F} = \boxed{F - f_{BA} + f_{AB}}$$

塊と見た　　AとB別々と見た

$$0 = -f_{BA} + f_{AB}$$

$$f_{BA} = f_{AB}$$

従って、f_{BA} と f_{AB} は、互いに逆向きで大きさが同じ

→作用・反作用の法則が成り立っている

自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

$$a = g$$

よって、物体の加速度は常に一定
自由落下は「等加速度運動」である。

「等加速度運動」の式を用いると

$$v = v_0 + at$$

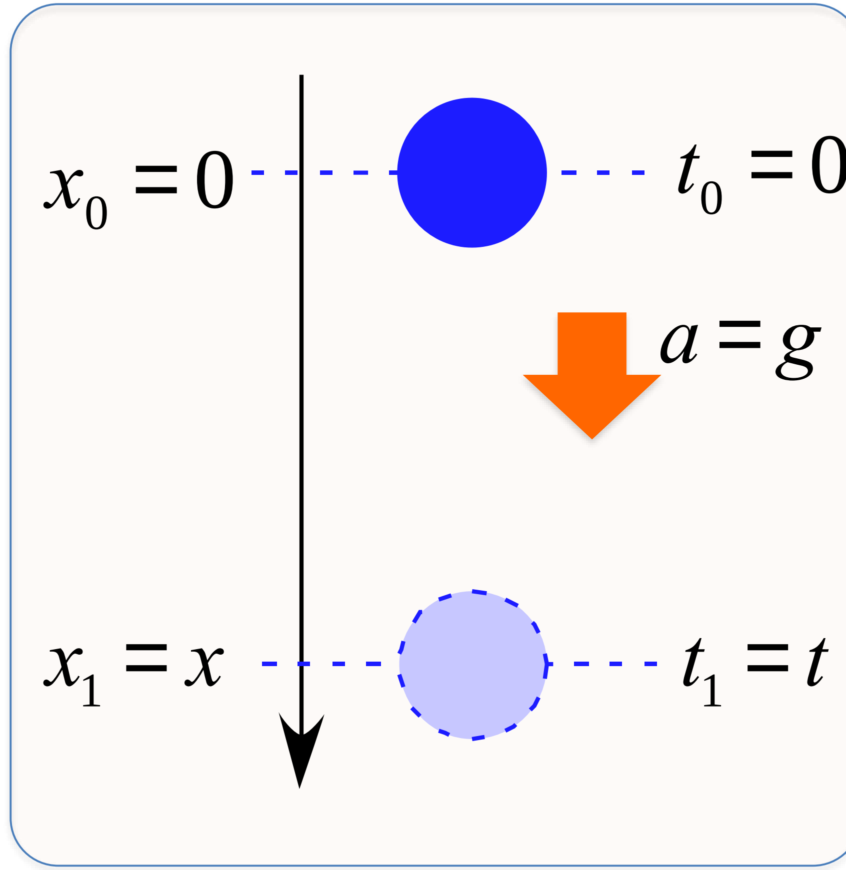
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_0 = 0$$

$$a = g$$

$$v = 0 + gt = gt$$

$$x = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$



力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- 問題文で指定されている場合はそれを利用する
- 指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- 一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
- 直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$$

$\Rightarrow$ $v=$ ◯ $\Rightarrow$ $x=$ ◯

t で積分　　　t で積分

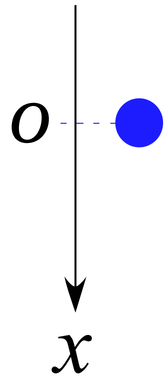
積分定数は初期条件が決める

運動方程式を立てる $\Rightarrow$ 速度、変位を求める $\Rightarrow$ 求めた速度、変位を使って問題で問われている量を計算する

自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$



この運動方程式を解くことで
速度と変位を導く。

$$a = \frac{dv}{dt}$$

を代入すると、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int g dt$$

$$\int dv = \int g dt$$

$$v = gt + C_1$$

初期条件より

$$v(0) = g \cdot 0 + C_1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

従って

$$\boxed{v(t) = gt}$$

変位については

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int gtdt$$

$$\int dx = \int gtdt$$

$$x = \frac{1}{2} gt^2 + C_2$$

初期条件より

$$x(0) = \frac{1}{2} g \cdot 0^2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

従って

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} gt^2}$$

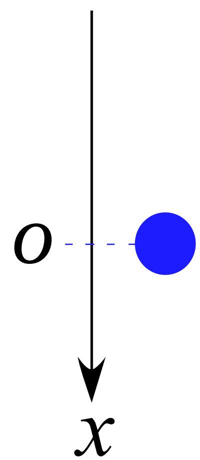
軸の設定とグラフ

自由落下　～　下向きを正に軸を取る

$$ma = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g$$



$$v(t) = gt$$

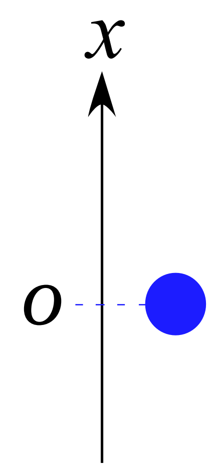
$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

自由落下　～　上向きを正に軸を取る

$$ma = -mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

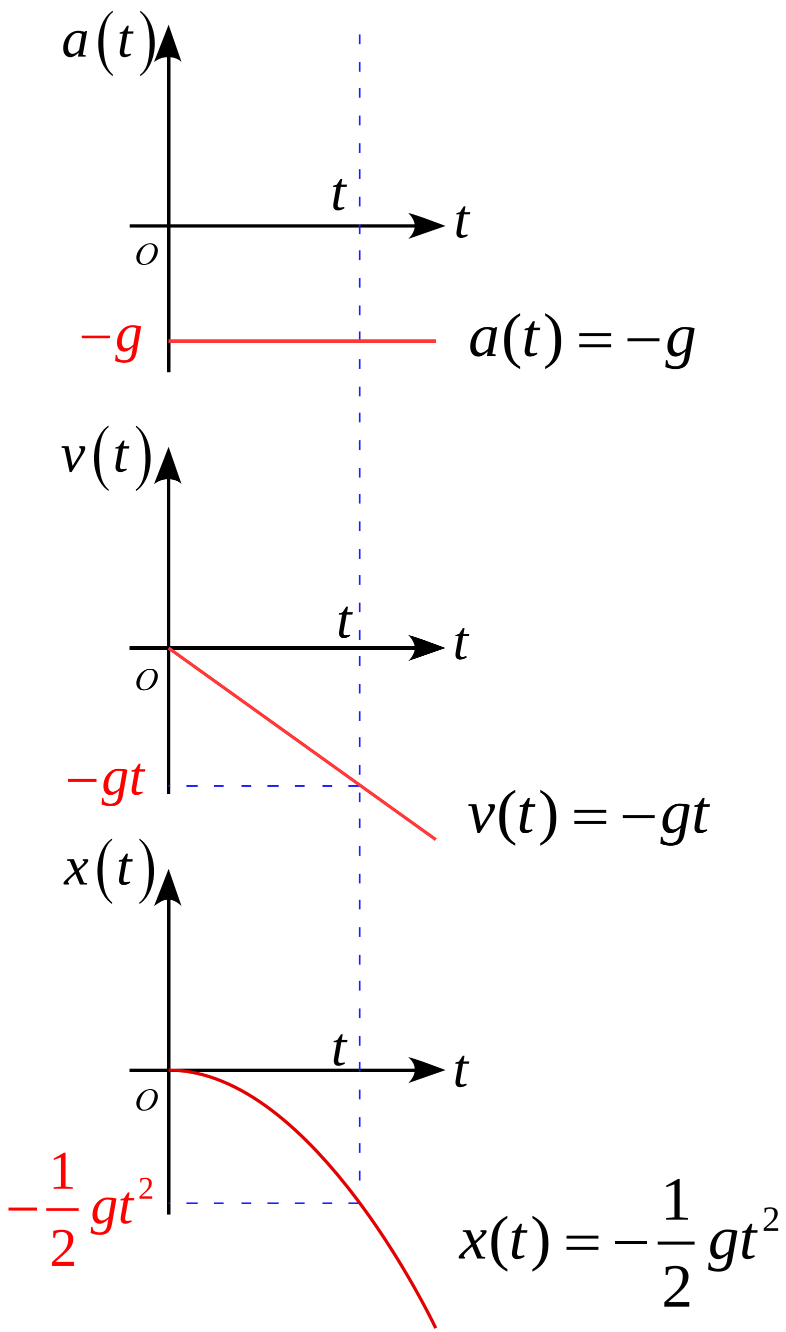
$$\frac{dv}{dt} = -g$$



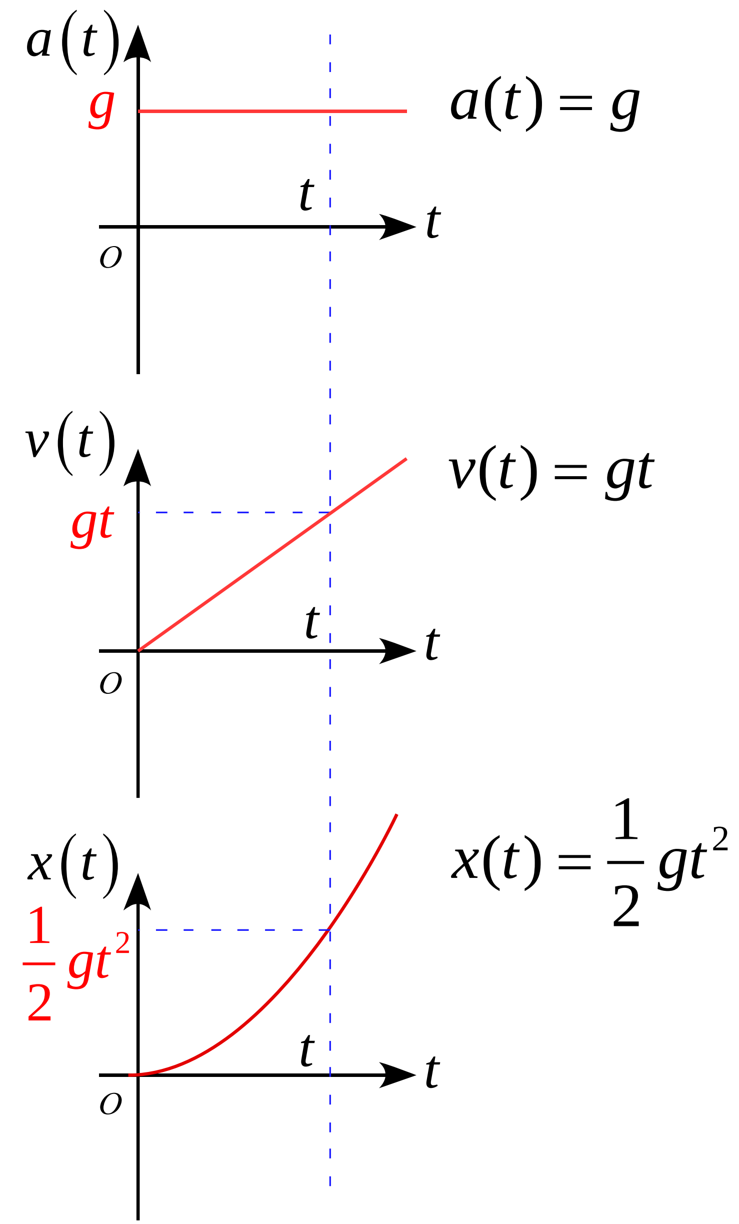
$$v(t) = -gt$$

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

自由落下 ～ 上向きを正に軸を取る



自由落下 ～ 下向きを正に軸を取る



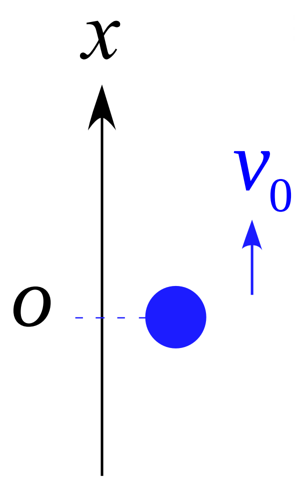
鉛直投げ上げ

運動方程式は

$$ma = -mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$



この式を t で積分すると

$$\int \frac{dv}{dt}dt = \int(-g)dt$$

$$\int dv = \int(-g)dt$$

$$v = -gt + C_1$$

初期条件より

$$v(0) = g \cdot 0 + C_1 = v_0$$

$$C_1 = v_0$$

従って

$$\boxed{v(t) = -gt + v_0}$$

変位については

$$v=\frac{dx}{dt}=-gt+v_0$$

$$\frac{dx}{dt}=-gt+v_0$$

この式を t で積分すると

$$\int\frac{dx}{dt}dt=\int\left(-gt+v_0\right)dt$$

$$\int dx=\int\left(-gt+v_0\right)dt$$

$$x=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+C_2$$

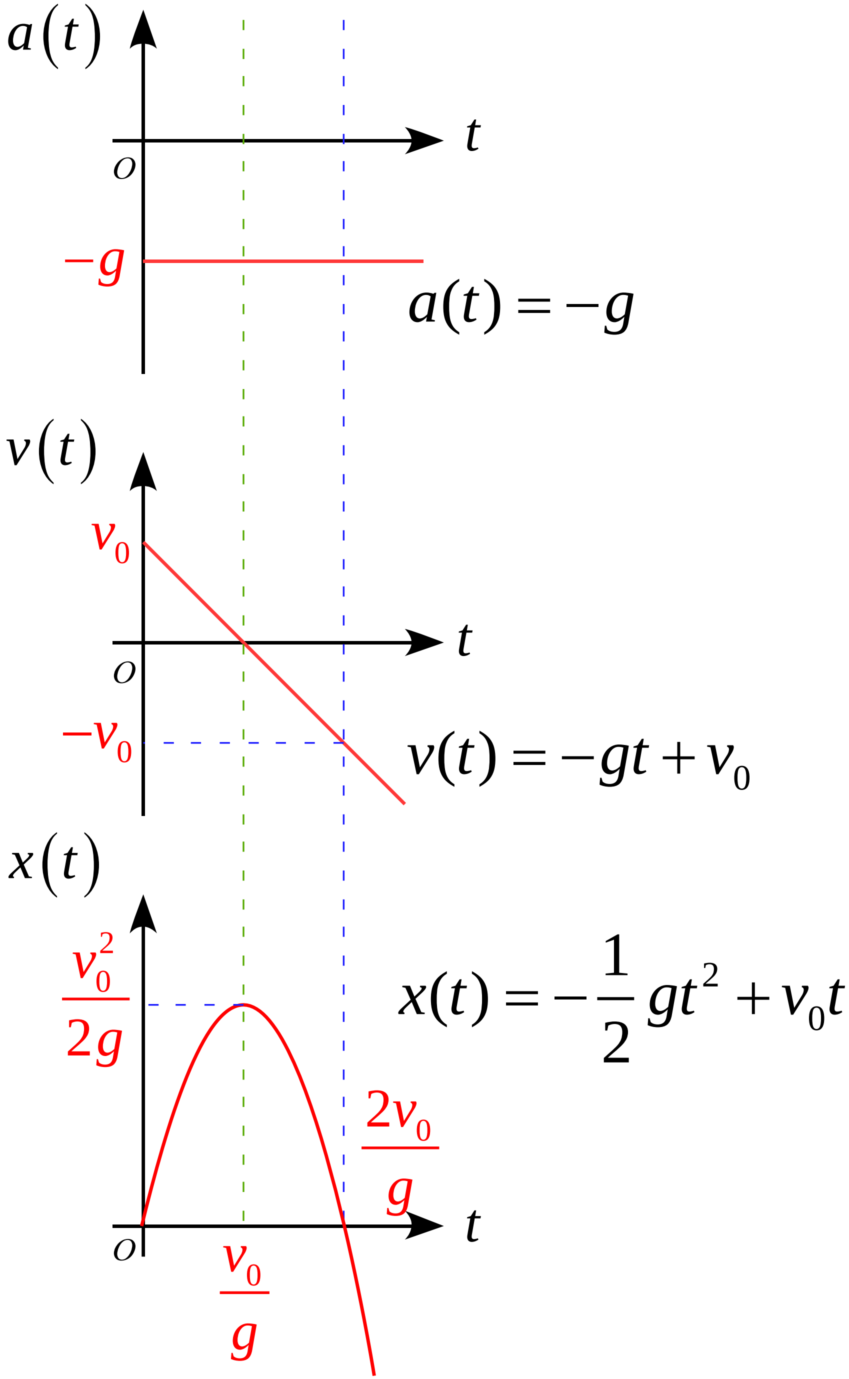
初期条件より

$$x(0)=-\frac{1}{2}g\cdot 0^2+v_0\cdot 0+C_2=0$$

$$C_2=0$$

従って

$$\boxed{x(t)=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t}$$



$v(t) = 0$ となる時刻 t_1 は

$$v(t_1) = -gt_1 + v_0 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

$x(t) = 0$ となる時刻 t_2 は (原点を除く)

$$x(t_2) = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0 t_2 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}gt_2 + v_0\right)t_2 = 0$$

$$t_2 = 0 \quad \text{or} \quad t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

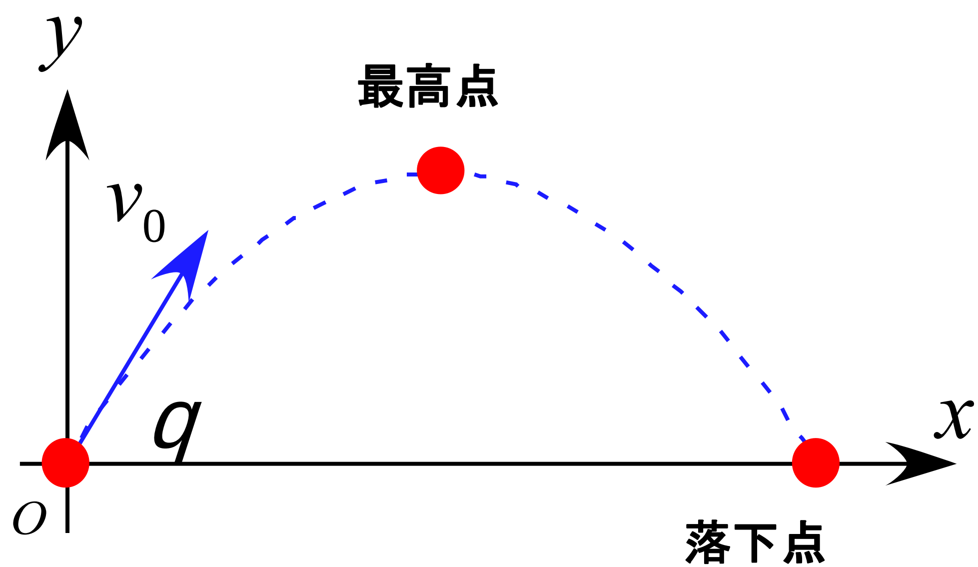
斜方投射運動(放物運動)

斜めに物体を投げ上げたときの運動

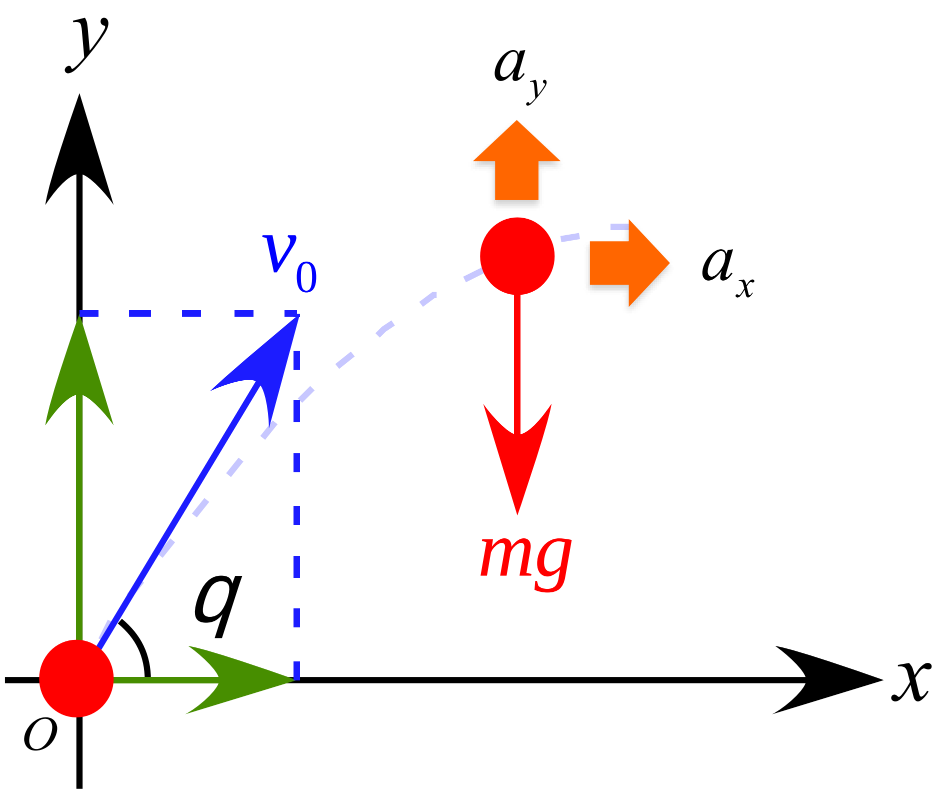
初速度：v_0

水平面との角度：q

任意の時刻における物体の
速度、位置について考える



2次元の運動 → 分解 → 1次元の運動



それぞれの軸について
運動方程式を考えると

x 方向

$$ma_x = 0$$

y 方向

$$ma_y = -mg$$

それぞれの加速度は

$$a_x = 0$$

等速直線運動

$$a_y = -g$$

加速度 $-g$
等加速度運動

この2式を t で積分する。

x 方向

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\int \frac{dv_x}{dt} dt = \int 0 dt$$

$$\int dv_x = \int 0 dt$$

$$v_x = C_{x1}$$

初期条件 $t = 0$ のとき

$$v_x(0) = v_0 \cos\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_x(0) = C_{x1} = v_0 \cos q$$

$$C_{x1} = v_0 \cos q$$

従って、速度 v_x は

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

y 方向

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dv_y}{dt} dt = \int (-g) dt$$

$$\int dv_y = \int (-g) dt$$

$$v_y = -gt + C_{y1}$$

初期条件 $t=0$ のとき

$$v_y(0) = v_0 \sin\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_y(0) = -g \cdot 0 + C_{y1} = v_0 \sin\theta$$

$$C_{y1} = v_0 \sin q$$

従って、速度 v_y は

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

それぞれの速度は

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= -gt + v_0 \sin\theta \end{aligned}}$$

ここで、さらに速度の式をそれぞれ
t で積分する

x 方向

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int v_0 \cos\theta dt$$

$$\int dx = \int v_0 \cos\theta dt$$

$$x = \left(v_0 \cos q\right) t + C_{x2}$$

初期条件 $t = 0$ のとき原点なので

$$x(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$x(0) = \left(v_0 \cos q\right) \times 0 + C_{x2} = 0$$

$$C_{x2} = 0$$

従って

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

y 方向

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta$$

この式を t で積分すると

$$\int dy = \int \left(-gt + v_0 \sin\theta\right) dt$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t + C_{y2}$$

初期条件 $t = 0$ のとき原点なので

$$y(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$y(0) = -\frac{1}{2} g \cdot 0^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \cdot 0 + C_{y2} = 0$$

$$C_{y2} = 0$$

従って

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t$$

任意の時刻における変位は

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t$$

x 方向

$$a_x(t) = 0$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

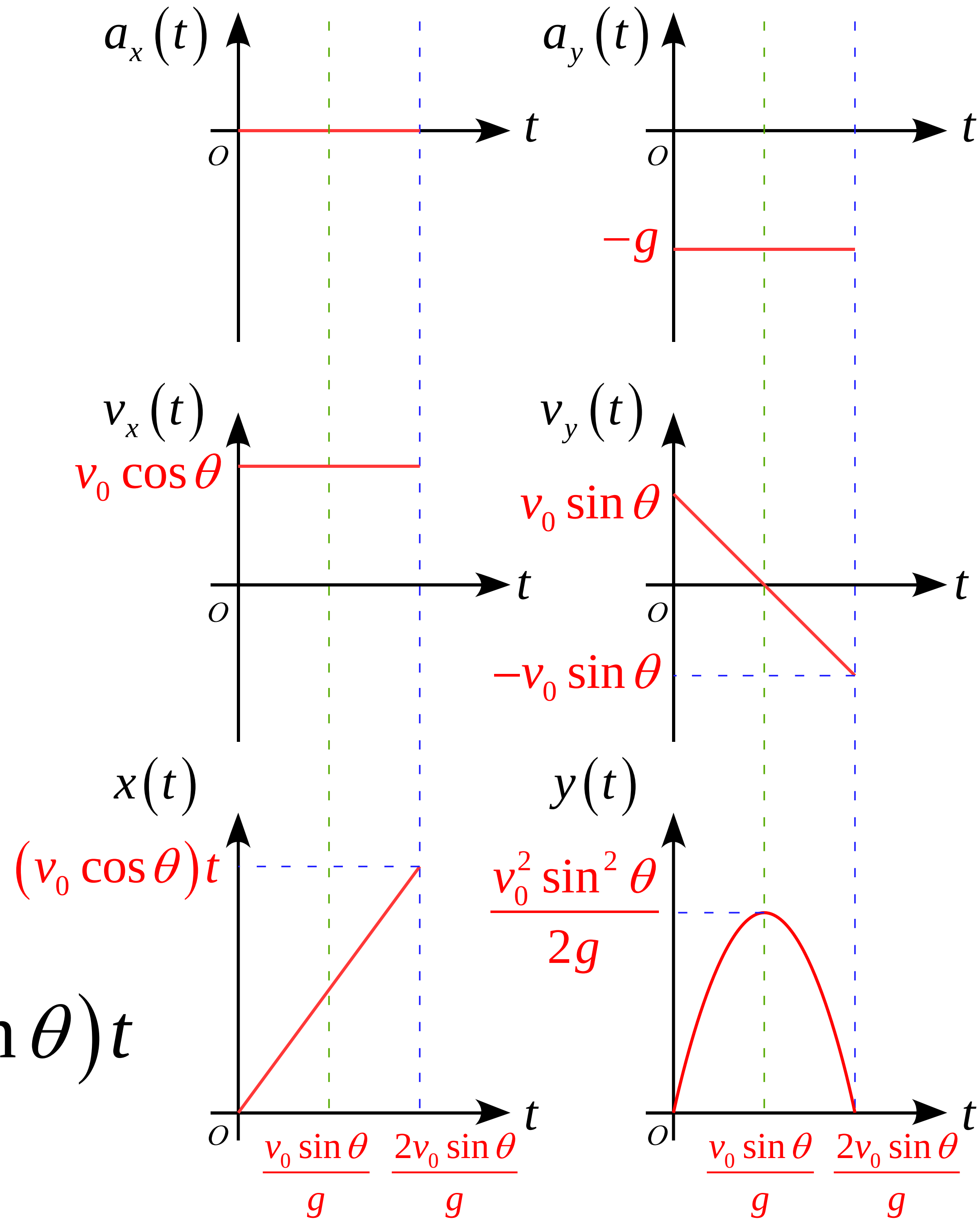
$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t$$

y 方向

$$a_y(t) = -g$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t$$



放物運動の確認

時刻 t を求めると

$$t = \frac{x}{v_0 \cos q}$$

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

これを y に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \left(\tan\theta\right) x$$

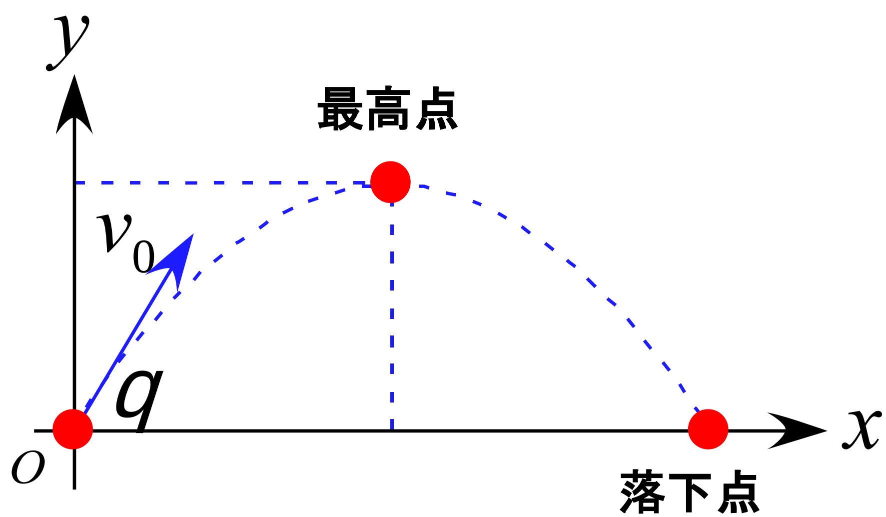
放物線

$$= \left[-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x + \tan\theta \right] x$$

$y=0$ とすると

$$x=0$$

$$x=\frac{2v_0^2\sin q\cos q}{g}$$



の2点となり、それぞれ原点と落下点となる。

放物運動の確認

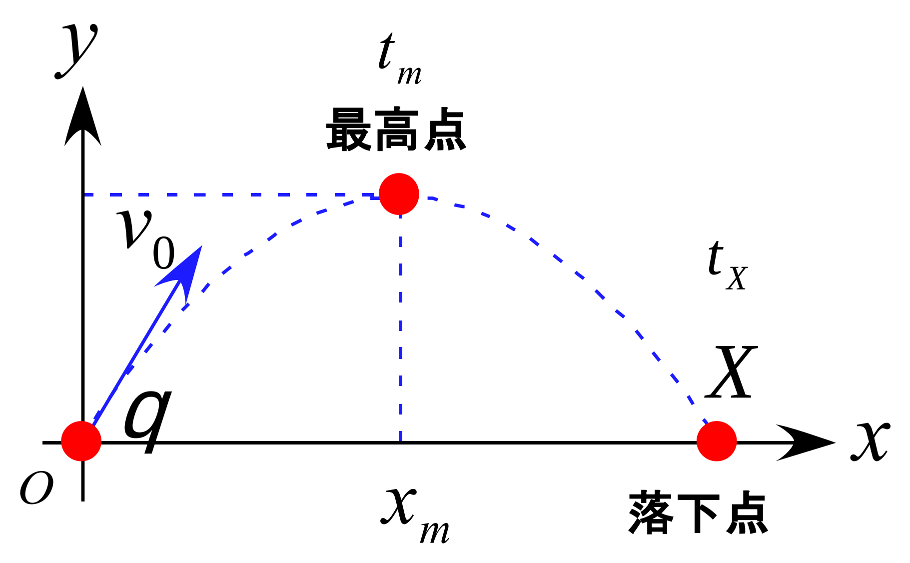
落下点の達した時刻 t_X は

$$t_X = \frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{1}{v_0 \cos\theta} \frac{2v^2{}_0 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$= \frac{2v_0 \sin q}{g}$$

対称性より最高点の時刻 t_m は

$$t_m = \frac{t}{2} = \frac{v_0 \sin q}{g}$$



このときの座標は

$$x_m = \frac{X}{2} = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$y(t_m) = -\frac{1}{2} g \cdot t_m{}^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t_m$$

$$= -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} \right)^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

放物運動～飛距離最大

飛距離最大となる初速度の角度 q_0 を考える

$$\boxed{\sin 2q = 2\sin q \cos q}$$

$$x_{\mathrm{max}} = \frac{2v_0^2 \sin q_0 \cos q_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2q_0}{g}$$

これが最大値になるのは $\sin 2q_0$ が最大値になるときで、その最大値は 1 である。

このとき、

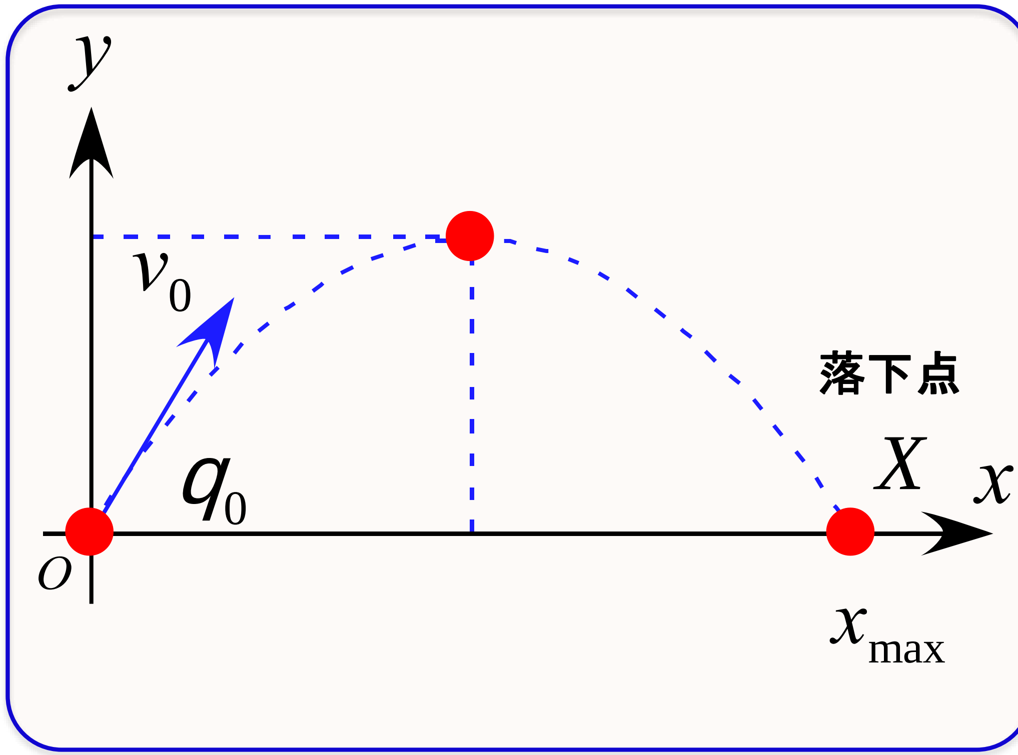
$$2q_0 = 90^\circ$$

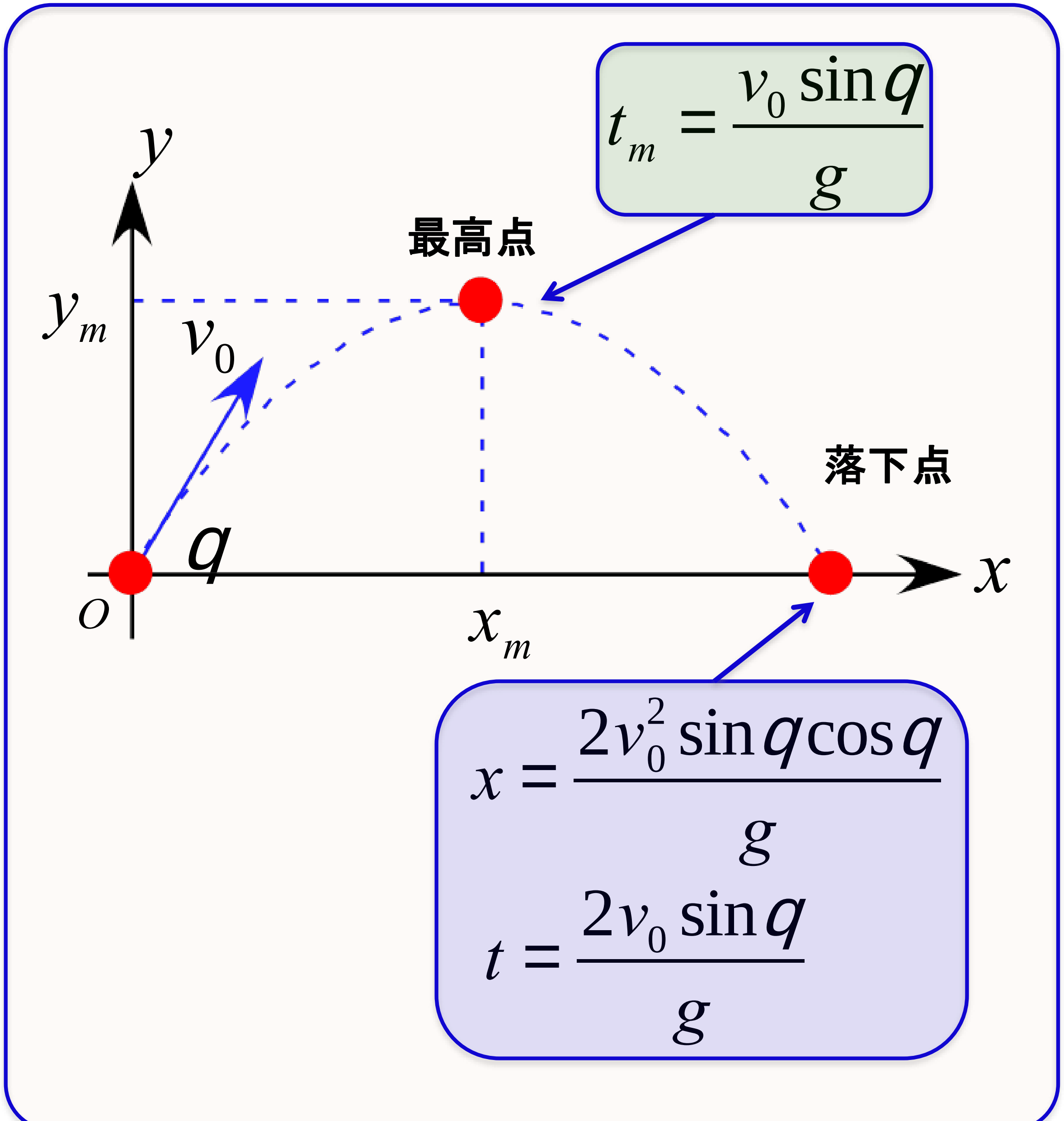
となるので x_{max} となる放出角度は

$$q_0 = 45^\circ$$

$$x_{\mathrm{max}} = \frac{v_0^2}{g}$$

である。





$t_m = \frac{v_0 \sin q}{g}$
最高点
y
y_m
v_0
q
O
x_m
落下点
x
$x = \frac{2v_0^2 \sin q \cos q}{g}$
$t = \frac{2v_0 \sin q}{g}$

放物運動の確認 ～ 平方完成

軌道の式を平方完成することでグラフを考える

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(-\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}\right)x\right] \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[x^2 - \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}x\right] \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2\right] \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2-\frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2+\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

従って、頂点の座標は

$$(x,y)=\left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g},\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\right)$$

となり、前出の計算結果と一致することが確認できる