

運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $ma = F$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

運動量～定義

質量 m の質点が力 $\vec{F}$ を受けて運動している

運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

加速度の定義から

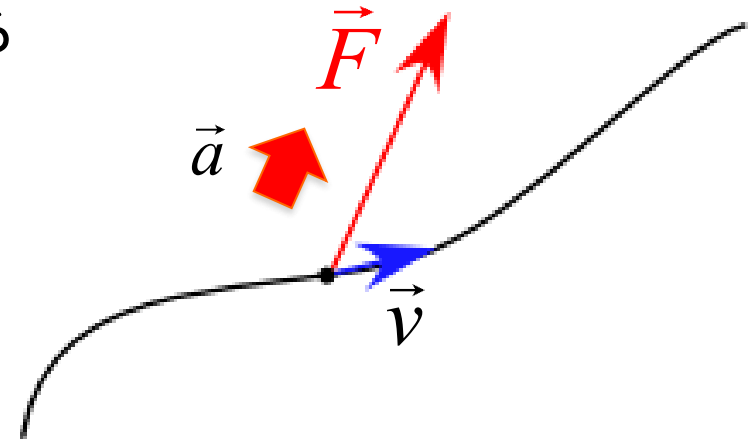
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

であるから、

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{F}$$

運動量



ここで、 $\vec{p} = m\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となる。

運動量～力積

運動量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量 = 質量 × 速度

次元

$$[M] \frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

単位時間あたりの
運動量の変化

この式を書き換えると

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

運動量の
微小変化

力積

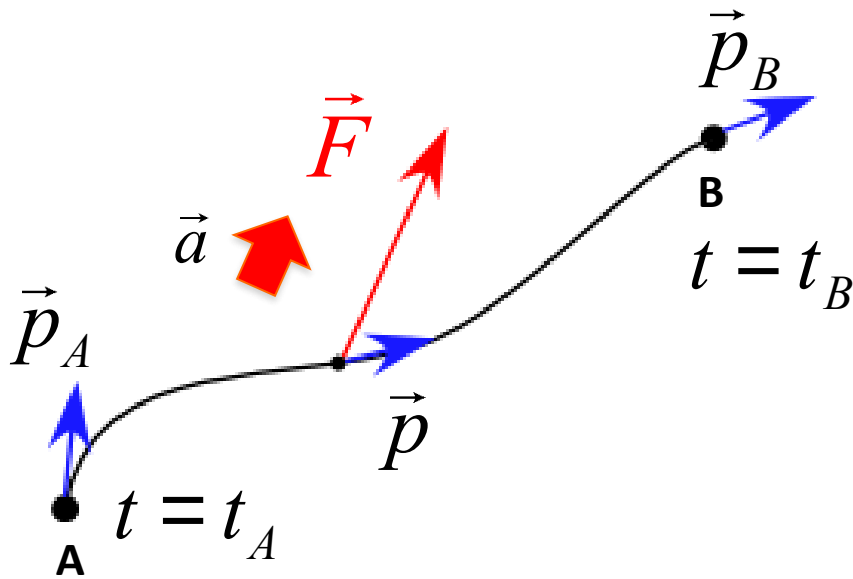
力 $\vec{F}$ が微小時間
 dt だけ働いた

次元

力積

$$\vec{I} = \vec{F}dt \quad \left[\frac{ML}{T^2} \right] [T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

運動開始と運動終了を図のように
設定する



$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

積分すると

$$\int_{p_A}^{p_B} d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt$$

$$\vec{p}_A - \vec{p}_B = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt$$

運動量の変化

受けた力積の総和

運動量～エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか?)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか?)

運動量の変化は力積による

運動量～保存則

物体が衝突した前後について
考えてみよう

運動方程式はA, Bそれぞれ

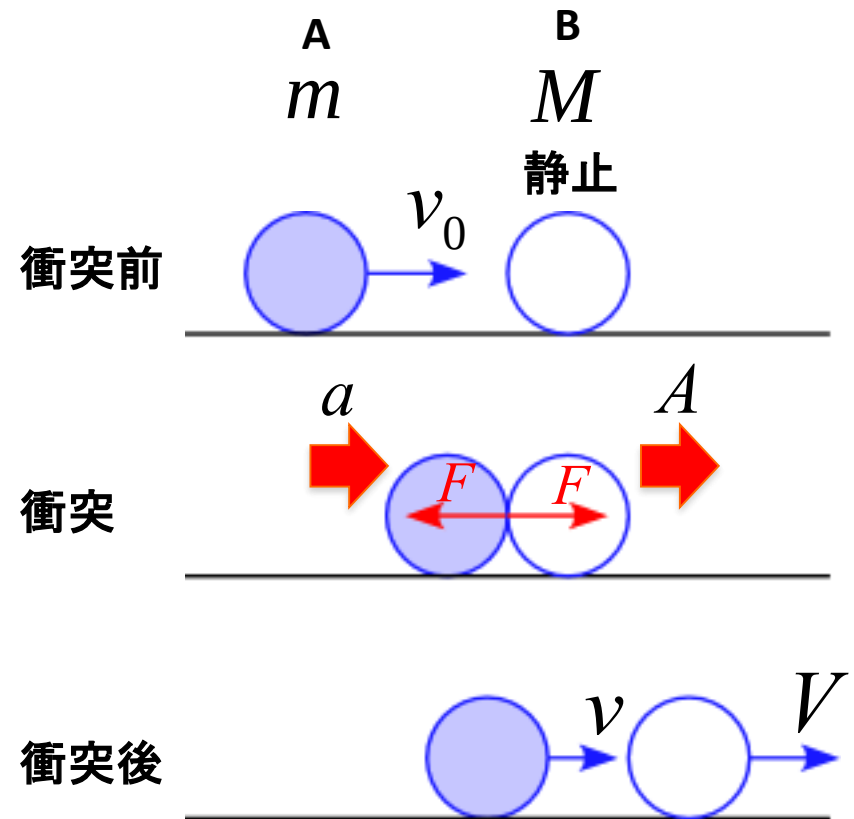
$$A: ma = -F$$

$$B: MA = F$$

従って、

$$m \frac{dv}{dt} = -F$$

$$M \frac{dV}{dt} = F$$



運動量～保存則

この2式の和をとると

$$m \frac{dv}{dt} + M \frac{dV}{dt} = -F + F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) + \frac{d}{dt}(MV) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(mv + MV) = 0$$

となる

従って、

この衝突において運動量の和は
時間的に変化していない。

運動量が保存している

即ち、この例のモデルでは

$$mv + MV = mv_0 + M \cdot 0$$

衝突後の運動量

衝突前の運動量

が成立する。

運動量保存則

運動量保存則

外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない

$$\frac{d}{dt}(mv + MV) = 0$$

$$mv + MV = mv_0 + MV_0$$

衝突後の全運動量

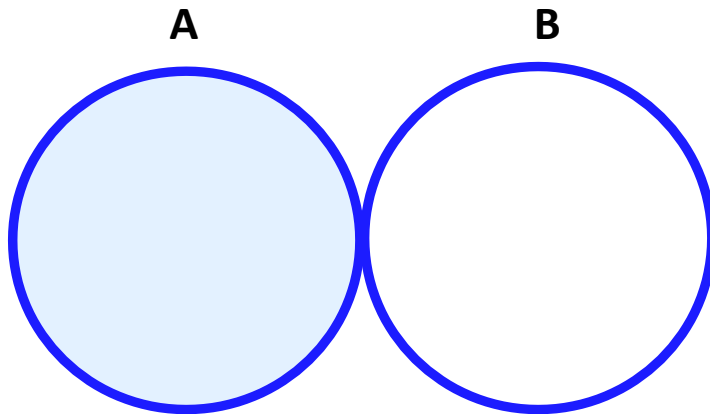
衝突前の全運動量

運動量保存則～例題

例題

2球の正面衝突を考える。

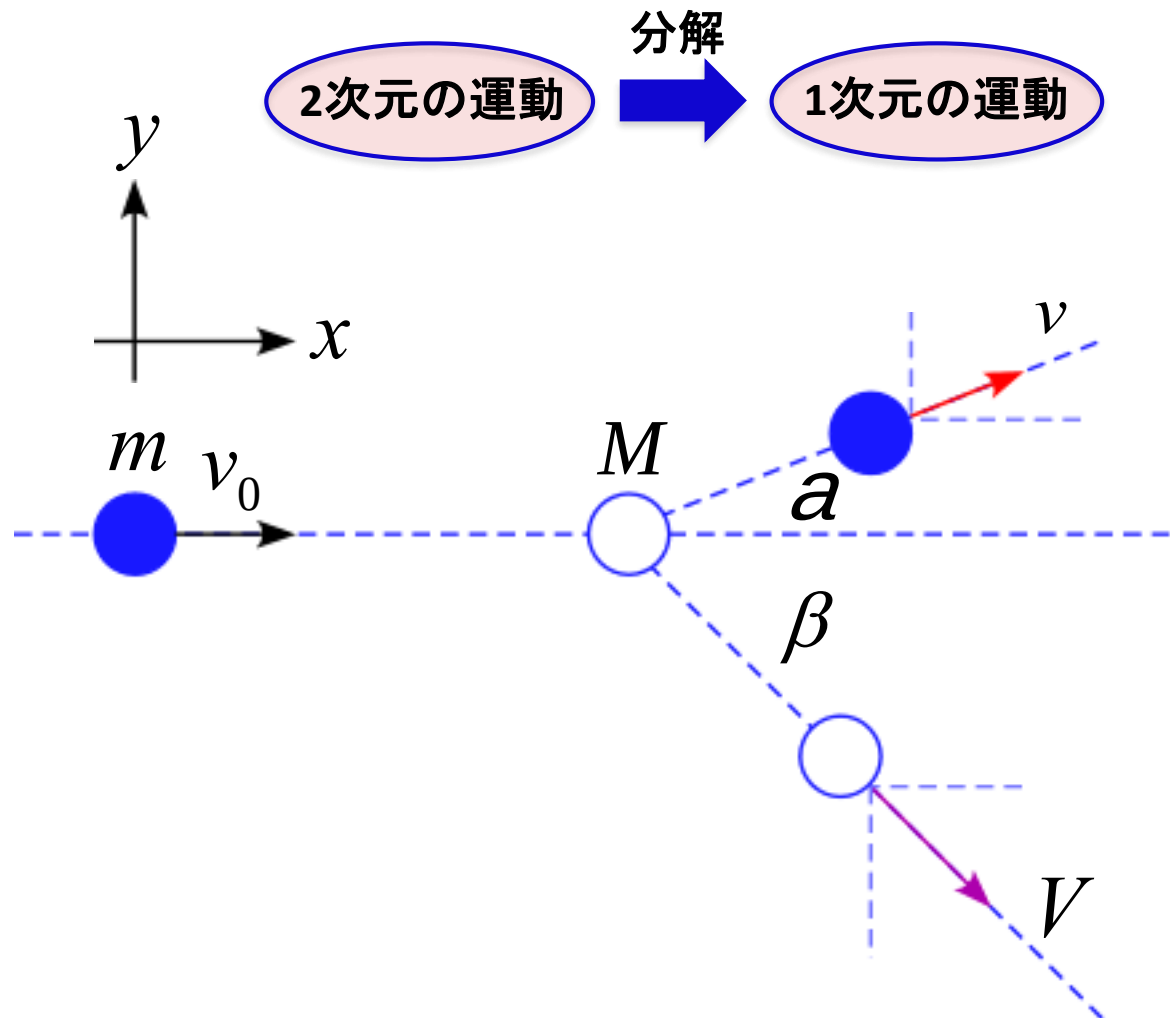
1. 衝突した瞬間の力を図に書き込め。
2. この運動で運動量が保存していることを示せ。



斜衝突

斜衝突 (ビリヤード)

静止している白球に青玉を完全弾性衝突させる運動 (床との摩擦は無いとする)



運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_1) = -\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2) = 0$$

$$\frac{d}{dt}(M\vec{V}_2) = \vec{F}$$

衝突時に力 $\vec{F}$ が作用し、
青玉の速度 $\vec{v}_1$ とする
白玉の速度 $\vec{V}_2$

外から外力が加わっていない



前後の運動量については保存している

$$m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2 = m\vec{v}_1' + M\vec{V}_2'$$

衝突前の
全運動量

衝突後の
全運動量

$$m \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} v \cos \alpha \\ v \sin \alpha \end{pmatrix} + M \begin{pmatrix} V \cos \beta \\ -V \sin \beta \end{pmatrix}$$

従って、

$$x \text{ 方向: } mv_0 + M \cdot 0 = mv \cos \alpha + MV \cos \beta$$

$$y \text{ 方向: } m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv \sin \alpha - MV \sin \beta$$

$$x \text{ 方向: } mv_0 = mv \cos a + MV \cos b$$

$$y \text{ 方向: } 0 = mv \sin a - MV \sin b$$

完全弾性衝突

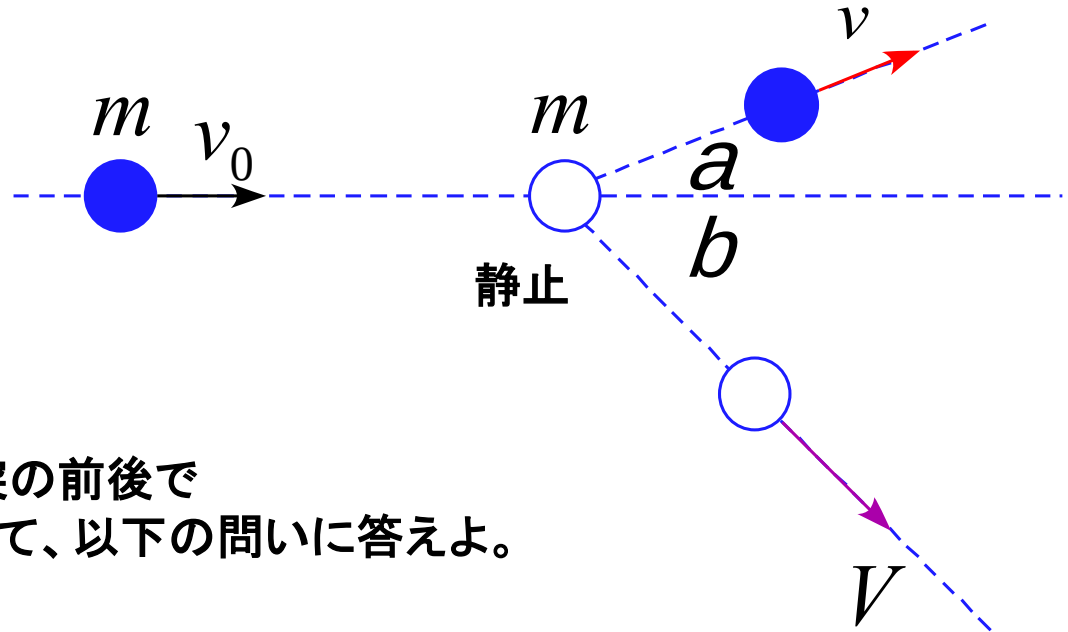


前後でのエネルギーロスはない

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

斜衝突～例題

斜衝突において、質量が同じであるとする。



衝突は弾性衝突であり、衝突の前後でエネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

1. 図の角 $\alpha + \beta$ を求めよ。
2. 速度比 $\frac{v}{V}$ を β を使って表せ。

反発係数

1次元の衝突

運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

であるが、速度の情報が不十分である
そこで

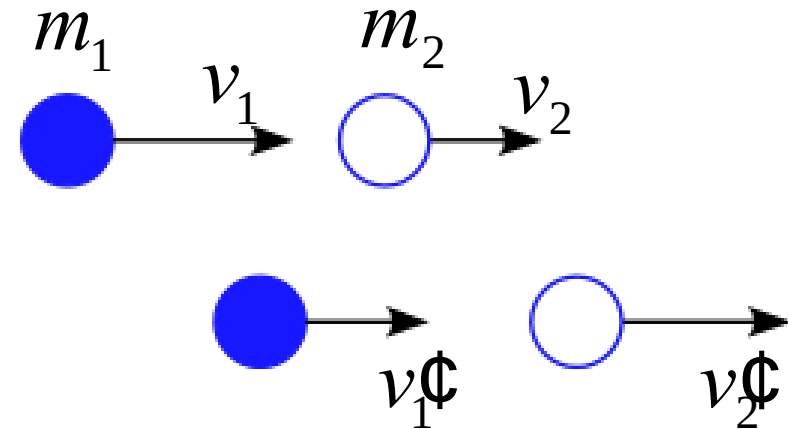
同じ2物体の衝突では、
衝突前後の相対速度の大きさの比は一定
(経験的法則)

を用いてその比率を定義すると

反発係数 (跳ね返り係数) e

$$e = - \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

衝突後の相対速度
衝突前の相対速度



反発係数

2体の相対運動のエネルギーの変化を考えると

$$\begin{aligned}
 DK &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v'_1 - v'_2)^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_1 - v_2)^2 (e^2 - 1)
 \end{aligned}$$

完全弾性衝突: $e = 1$ 理想的によく弾む場合

非弾性衝突: $0 \leq e < 1$

完全非弾性衝突: $e = 0$ 2物体が一体になる場合

エネルギー保存則が成立

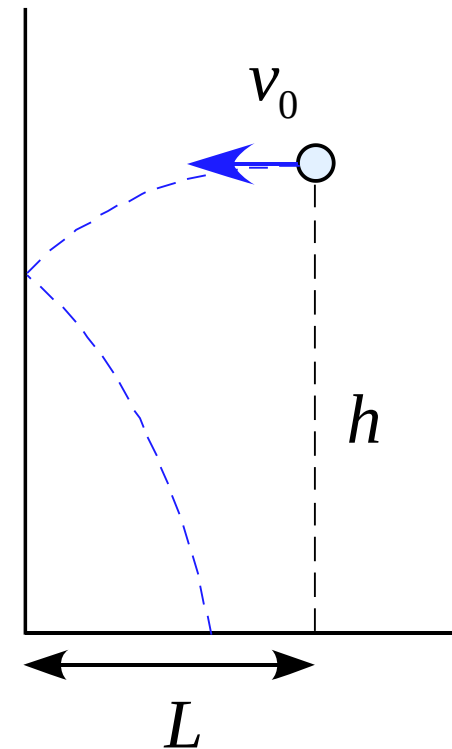
運動量～例題

例題

質量 m の物体を高さ h の地点から壁に向かって水平方向に初速度 v_0 で投げたところ、壁に当たって跳ね返り、地面に落下した。

壁からの距離は L であり、壁と物体との間の反発係数は e である。
重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

1. 物体が壁に当たる直前までの運動方程式を記述せよ。
2. 物体が壁に当たる時刻 t_1 を求めよ。
3. 物体が壁に衝突した瞬間の運動方程式を記述せよ。
(水平方向のみでよい)
4. 物体が壁から受けた力積 I を求めよ。
5. 物体が壁に当たった後の運動方程式を記述せよ。
6. 落下点に到達する時刻 t_2 を求めよ。
7. 壁から落下点までの距離 l を求めよ。



運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたり m_0 の物質を噴出しながら運動する物体がある

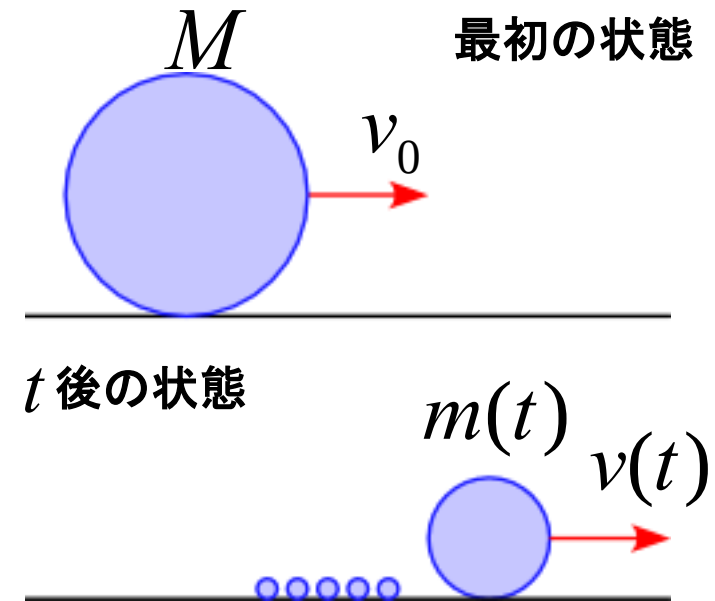
物体の初期質量を M 、初速度を v_0 とする

噴出物質の速度は常に 0 になるように噴出されるものとする

1. 時間 t 後の質量 $m(t)$ を記述せよ

2. 時間 t 後の速度 $v(t)$ を求めよ

3. 時間 t 後の移動距離 $x(t)$ を求めよ



運動量保存則～例題

例題

床の上に線密度 ρ の鎖が置いてある。

この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。

重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

引き上げた部分の長さが x 、速度が v 、加速度が a となったとき

1. 引き上げた部分の質量 m を記述せよ。
2. この時の運動方程式を記述せよ。
3. 引き上げる力 F の大きさを求めよ。
4. 一定の速度 v で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。

