

一般物理学 練習問題

～力学～

略解 01 - 12

01

$$(1) \quad v = \frac{dx}{dt} \quad \left[\frac{L}{T} \right]$$

$$(2) \quad v = \frac{dv}{dt} \quad \left[\frac{L}{T} \right] = \left[\frac{L}{T^2} \right]$$

$$(3) \quad ma = F$$

$$[M] \left[\frac{L}{T^2} \right] = \left[\frac{ML}{T^2} \right]$$

$$(4) \quad \frac{1}{2}mv^2$$

$$[M] \left(\left[\frac{L}{T} \right] \right)^2 = \left[\frac{ML^2}{T^2} \right]$$

$$\left[\frac{ML}{T^2} \right] [L] = \left[\frac{ML^2}{T^2} \right]$$

$$(5) \quad mv$$

$$[M] \left[\frac{L}{T} \right] = \left[\frac{ML}{T} \right]$$

$$\left[\frac{ML}{T^2} \right] [T] = \left[\frac{ML}{T} \right]$$

$$(6) \quad \bar{v}$$

$$\bar{r} \times \frac{d}{dt}(m\bar{v})$$

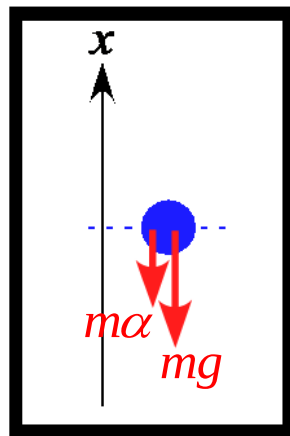
$$\bar{r} \times m\bar{v}$$

$$\bar{r} \times \bar{F}$$

$$[L][M] \left[\frac{L}{T} \right] = \left[\frac{ML^2}{T} \right]$$

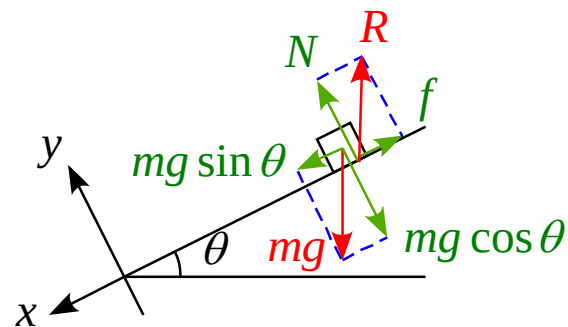
$$[L] \left[\frac{ML}{T^2} \right] = \left[\frac{ML^2}{T^2} \right]$$

02 (1) 作图



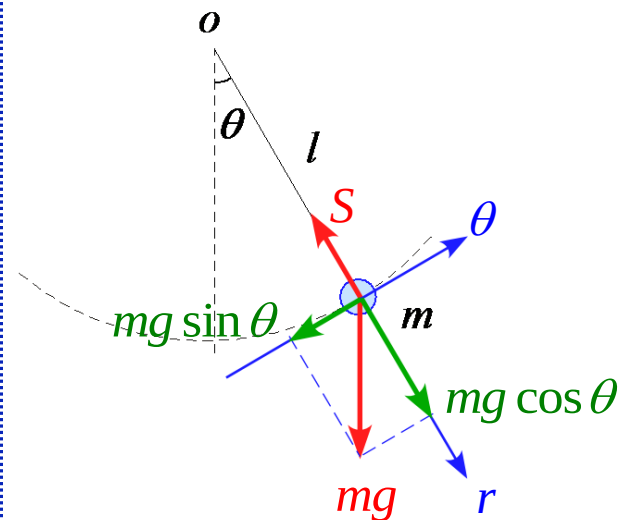
$$ma = -m\alpha - mg$$

(2) 作图



$$ma = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta$$

(3) 作图



$$ma_r = mg \cos \theta - S$$

$$ma_\theta = -mg \sin \theta$$

03

$$(1) \quad \vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF \sin \theta \end{pmatrix}$$

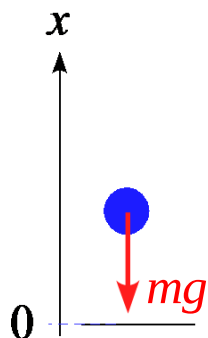
$$|\vec{N}| = xF \sin \theta$$

(2)

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{N}| = xF_y - yF_x$$

04 (1) 作図

(2) 運動方程式 $ma = -mg$

$$(3) \quad v(t) = -gt + v_0$$

$$(4) \quad x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

$$(5) \quad t_1 = \frac{2v_0}{g}$$

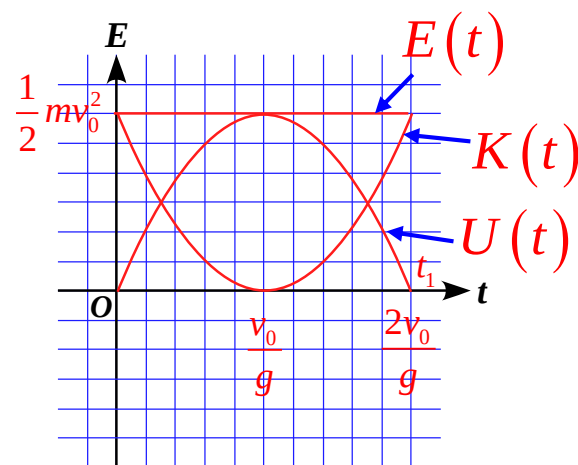
(6)

$$K(t) = \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0t$$

$$(7) \quad U(t) = -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$$

$$(8) \quad E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv_0^2$$

(9)



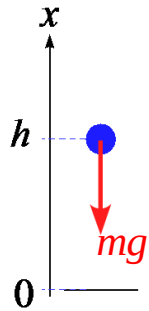
$$(10) \quad v(t_1) = -v$$

$$(11) \quad ma = F$$

$$(12) \quad I = 2mv_0$$

05

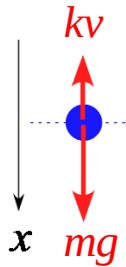
(1) 作図

(2) 運動方程式 $ma = -mg$

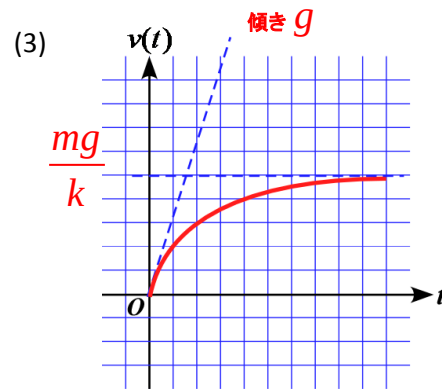
(3) 略

06

(1) 作図

(2) 運動方程式 $ma = mg - kv$

06



$$(4) \quad v(\infty) = \frac{mg}{k}$$

07

(1)

$$ma = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta$$

(2) 一部略

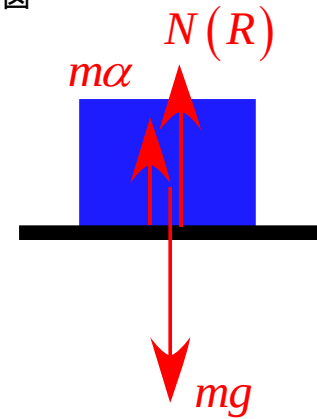
$$a = g \sin \theta - \mu_k g \cos \theta$$

(3)

$$W_{\text{摩}} = -\mu_k mg \cos \theta L$$

08

(1) 作図



$$(2) \quad N = m(g - a)$$

$$(3) \quad g = a$$

$$(1) \quad \vec{N}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)Mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_{\text{棒}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{pmatrix} \frac{dL_x}{dt} \\ \frac{dL_y}{dt} \\ \frac{dL_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L-x)Mg + \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}$$

(3)

$$x = \frac{m+2M}{2(M+2m)}L$$

(1) 略

(2) 略

$$(3) \quad |\vec{a}| = \frac{v_0^2}{r_0^2}$$

$$(1) \quad \begin{aligned} ma_r &= mg \cos \theta - T \\ ma_\theta &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

$$(2) \quad T_B = 3mg$$

$$(3) \quad T_C = 3mg \cos \theta_C$$

$$(1) \quad \begin{aligned} ma_r &= mg \cos \theta - T \\ ma_\theta &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

$$(2) \quad v_0 \geq \sqrt{5gr}$$

(5)

時刻 t_1 で再び戻ってくるので

$$\begin{aligned} x(t_1) &= \left(-\frac{1}{2}gt_1 + v_0\right)t_1 = 0 \\ -\frac{1}{2}gt_1 + v_0 &= 0 \\ t_1 &= \frac{2v_0}{g} \end{aligned}$$

(6,7,8)

運動方程式の両辺を x で積分すると

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -mg \\ \int m \frac{dv}{dt} dx &= \int (-mg) dx \\ \int m \frac{dv}{dt} v dt &= \int (-mg) dx \\ \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt &= \int (-mg) dx \end{aligned}$$

$t = 0$ で $v = v_0, x = 0$

$t = t$ で $v = v(t), x = x(t)$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_0}^{-gt+v_0} = [-mgx]_0^{\frac{1}{2}gt^2+v_0t}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m(-gt + v_0)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ = -mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0t\right) - (-mg \cdot 0) \end{aligned}$$

$\frac{1}{2}m(-gt + v_0)^2$

$+ mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0t\right)$

$= \frac{1}{2}mv_0^2$

運動エネルギー

位置エネルギー

従って、 $K(t), U(t), E(t)$ は

(6) $K(t) = \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0t$

(7) $U(t) = -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$

(8) $E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2}mv_0^2$

となり、 $E(t)$ は定数であり、時間に依存しない。

(10)

再び戻ってくる時刻 t_1 の速度は

$$\begin{aligned} v(t_1) &= -gt_1 + v_0 = -g\left(\frac{2v_0}{g}\right) + v_0 \\ &= -v_0 \end{aligned}$$

(11)

運動方程式は

$$ma = F - mg$$

と表される

$mg \ll F$ なので

$$ma = F$$

(12)

運動方程式を変形すると

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

両辺を t で積分すると

$$\int \frac{d}{dt}(mv) dt = \int F dt$$

衝突後の速度を v' とすると

運動量と力積の関係は

$$[mv]_{v_1}^{v'_1} = \int F dt$$

$$mv'_1 - mv_1 = \int F dt$$

$$mv_0 - m(-v_0) = \int F dt$$

$$I = 2mv_0$$

(3)

運動方程式を x で積分すると

$$ma = -mg$$

$$m \frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (-mg) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (-mg) dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int (-mg) dx$$

$$t=0 \text{ で } v=0, x=h$$

$$t=t \text{ で } v=v(t), x=x(t)$$

$$\left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_0^{v(t)} = [-mgx]_h^{x(t)}$$

$$\frac{1}{2} mv(t)^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = -mgx(t) - (-mgh)$$

$$\frac{1}{2} mv(t)^2 + mgx(t) = mgh$$

従って、

$$E(t) = \frac{1}{2} mv(t)^2 + mgx(t) = mgh$$

となり、 $E(t)$ は一定値 mgh で時間に依らず

保存している。

(3, 4)

与式から加速度 $a(t)$ を計算する

$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

$$a(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right) \right]$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t} \right]$$

$$= -\frac{mg}{k} \left(-\frac{k}{m} \right) e^{-\frac{k}{m}t}$$

$$= ge^{-\frac{k}{m}t}$$

グラフを描く時、特別な値を計算し概形を考える

$$v(0) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} \right) = 0$$

$$v(\infty) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot \infty} \right) \\ = \frac{mg}{k} (1 - 0) = \frac{mg}{k}$$

$$a(0) = ge^{-\frac{k}{m} \cdot 0} = g$$

$$a(\infty) = ge^{-\frac{k}{m} \cdot \infty} = 0$$

(2)

$$ma = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta$$

$$a = g \sin \theta - \mu_k g \cos \theta$$

 g, θ, μ_k はいずれも定数である。従って、 a も

定数であり、この運動は等加速度運動と言える。

(3)

運動方程式を x で積分すると

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) dx$$

$$t=0 \text{ で } v=v_0, x=0$$

$$t=t' \text{ で } v=v_1, x=L$$

$$\left[\frac{1}{2} mv^2 \right]_{v_0}^{v_1} = [mg \sin \theta x - \mu_k mg \cos \theta x]_0^L$$

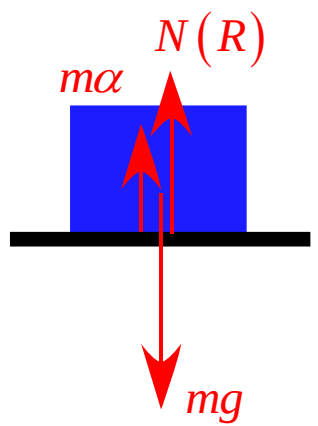
$$\frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgL \sin \theta - \mu_k mgL \cos \theta$$

摩擦力がした仕事

従って

$$W_{\text{摩}} = -\mu_k mgL \cos \theta$$

(1)



(2)

$$ma = N + m\alpha - mg$$

床に置かれている状態なので $a = 0$

$$0 = N + m\alpha - mg$$

$$N = mg - m\alpha$$

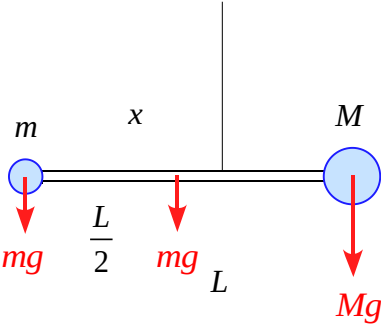
$$N = m(g - \alpha)$$

(3)

無重量となるのは $N = 0$ が条件

$$0 = m(g - \alpha)$$

$$g = \alpha$$



(1)
質量 m, M 及び棒についてそれぞれ 1, 2, 3 とすると

$$\begin{aligned}\vec{r}_1 &= \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{F}_1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_2 &= \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{F}_2 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{r}_3 &= \begin{pmatrix} -\left(x-\frac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{F}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

それぞれの外積を計算すると

$$\begin{aligned}\vec{N}_1 &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix} \\ \vec{N}_2 &= \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)Mg \end{pmatrix} \\ \vec{N}_3 &= \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = \begin{pmatrix} -\left(x-\frac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x-\frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(2)

全モーメントは

$$\begin{aligned}\vec{N} &= \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x-\frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L-x)Mg + \left(x-\frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}\end{aligned}$$

回転の運動方程式は

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{L}}{dt} &= \vec{N} \\ \begin{pmatrix} \frac{dL_x}{dt} \\ \frac{dL_y}{dt} \\ \frac{dL_z}{dt} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L-x)Mg + \left(x-\frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}\end{aligned}$$

(3)

z 成分において

$$\begin{aligned}\frac{dL_z}{dt} &= xmg - (L-x)Mg + \left(x-\frac{L}{2}\right)mg = 0 \\ xmg - LMg + xMg + xmg - \frac{L}{2}mg &= 0\end{aligned}$$

$$x = \frac{m+2M}{2(M+2m)}L$$

(1)

内積を計算し、ゼロになることを示すことで直交を示す

 $\vec{r}, \vec{v}$ それぞれについて自身の内積をとると

$$\begin{aligned}
 \vec{r} \cdot \vec{r} &= |\vec{r}| |\vec{r}| \cos \theta \\
 &= |\vec{r}| |\vec{r}| \cos 0 \\
 &= |\vec{r}|^2 \cdot 1 \\
 &= r_0^2 \quad (\text{等速円運動より})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v} \cdot \vec{v} &= |\vec{v}| |\vec{v}| \cos \theta \\
 &= |\vec{v}| |\vec{v}| \cos 0 \\
 &= |\vec{v}|^2 \cdot 1 \\
 &= v_0^2 \quad (\text{等速円運動より})
 \end{aligned}$$

 $\vec{r} \cdot \vec{r} = r_0^2$ の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{r}) &= \frac{d}{dt}(r_0^2) \\
 \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r_0^2) \\
 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$$

従って、 $\vec{r}$ と $\vec{v}$ は直交している

(2)

 $\vec{v} \cdot \vec{v} = v_0^2$ の両辺を t で微分すると

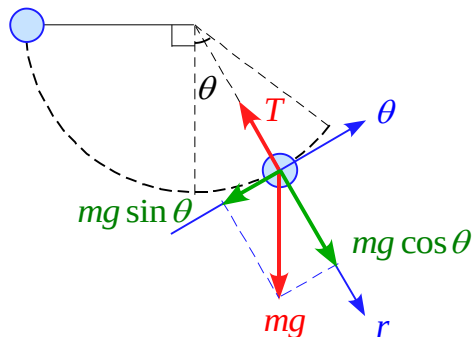
$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) &= \frac{d}{dt}(v_0^2) \\
 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{r} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(v_0^2) \\
 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} &= 0 \\
 \vec{r} \cdot \vec{v} &= 0
 \end{aligned}$$

従って、 $\vec{r}$ と $\vec{a}$ は直交している

(3)

 $\vec{r} \cdot \vec{v} = 0$ の両辺を t で微分すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\vec{r} \cdot \vec{v}) &= 0 \\
 \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} &= 0 \\
 \vec{v} \cdot \vec{v} + \vec{r} \cdot \vec{a} &= 0 \\
 v_0^2 + \vec{r} \cdot \vec{a} &= 0 \\
 \vec{r} \cdot \vec{a} &= -v_0^2 \\
 |\vec{r}| |\vec{a}| \cos \theta &= -v_0^2 \\
 |\vec{r}| |\vec{a}| \cos \pi &= -v_0^2 \quad (\theta = \pi \text{ より}) \\
 |\vec{r}| |\vec{a}| \cdot -1 &= -v_0^2 \\
 |\vec{a}| &= \frac{v_0^2}{|\vec{r}|} = \frac{v_0^2}{r_0^2}
 \end{aligned}$$



(1)

$$\begin{aligned} ma_r &= mg \cos \theta - T \\ ma_\theta &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

(2)

a_r, a_θ をそれぞれに代入すると

$$\begin{aligned} m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] &= mg \cos \theta - T \\ m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] &= -mg \sin \theta \end{aligned}$$

$r = l$ で一定なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T$$

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

ここで、 v_θ から

$$v_\theta = l \frac{d\theta}{dt} \quad \text{より} \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l},$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_\theta}{l} \right) = \frac{1}{l} \frac{dv_\theta}{dt}$$

θ 方向の運動方程式より

$$ml \frac{1}{l} \frac{dv_\theta}{dt} = -mg \sin \theta$$

$$m \frac{dv_\theta}{dt} = -mg \sin \theta$$

$ld\theta$ で積分すると

$$\int m \frac{dv_\theta}{dt} l d\theta = \int (-mg \sin \theta) l d\theta$$

$$\int m \frac{dv_\theta}{dt} l \frac{v_\theta}{l} dt = \int (-mg \sin \theta) l d\theta$$

$$\int mv_\theta \frac{dv_\theta}{dt} dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_\theta^2 \right) dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

$$t = 0 \quad \text{で} \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, v_\theta = 0$$

$$t = t_B \quad \text{で} \quad \theta = 0, v_\theta = v_B$$

$$\left[\frac{1}{2} mv_\theta^2 \right]_0^{v_B} = mgl [\cos \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^0$$

$$\frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = mgl \left[\cos 0 - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} mv_B^2 = mgl (1 - 0)$$

$$\frac{1}{2} mv_B^2 = mgl$$

$$v_B = \sqrt{2gl}$$

r 方向の運動方程式より

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T$$

$$T = mg \cos \theta + ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$= mg \cos \theta + ml \left(\frac{v_\theta}{l} \right)^2$$

$$= mg \cos \theta + m \frac{v_\theta^2}{l}$$

点Bで $\theta = 0, v_\theta = v_B$

$$T_B = mg \cos 0 + m \frac{v_B^2}{l}$$

$$= mg + m \frac{(\sqrt{2gl})^2}{l}$$

$$= mg + m \frac{2gl}{l}$$

$$= 3mg$$

(3)

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right) dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

$$t = 0 \quad \theta = -\frac{\pi}{2}, v_{\theta} = 0$$

$$t = t_C \quad \theta = \theta, v_{\theta} = v_C$$

$$\left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right]_0^{v_C} = mgl [\cos \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = mgl \left[\cos \theta - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} m v_C^2 = mgl \cos \theta$$

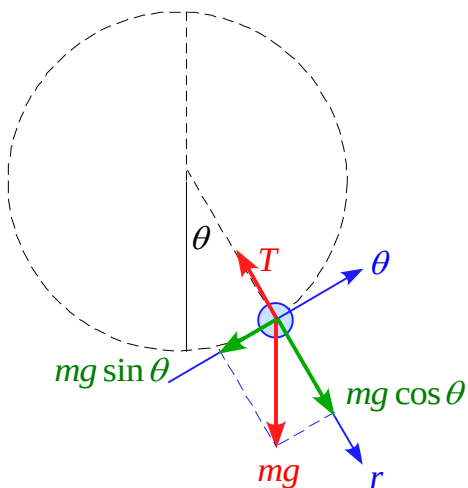
$$v_C = \sqrt{2gl \cos \theta}$$

r 方向の運動方程式より

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v_{\theta}^2}{l}$$

点Cで $\theta = \theta_C, v_{\theta} = v_C$

$$\begin{aligned} T_C &= mg \cos \theta_C + m \frac{v_C^2}{l} \\ &= mg \cos \theta_C + m \frac{\left(\sqrt{2gl \cos \theta_C} \right)^2}{l} \\ &= mg \cos \theta_C + m \frac{2gl \cos \theta_C}{l} \\ &= 3mg \cos \theta_C \end{aligned}$$



(1)

$$ma_r = mg \cos \theta - T$$

$$ma_\theta = -mg \sin \theta$$

(2)

 a_r, a_θ をそれぞれに代入すると

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = mg \cos \theta - T$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = -mg \sin \theta$$

$$r = l \text{ で一定なので } \frac{dr}{dt} = 0$$

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T$$

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

ここで、 v_θ から

$$v_\theta = l \frac{d\theta}{dt} \text{ より } \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l},$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{v_\theta}{l} \right) = \frac{1}{l} \frac{dv_\theta}{dt}$$

 θ 方向の運動方程式より

$$mr \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dt} = -mg \sin \theta$$

$$m \frac{dv_\theta}{dt} = -mg \sin \theta$$

 $rd\theta$ で積分

$$\int m \frac{dv_\theta}{dt} rd\theta = \int (-mg \sin \theta) rd\theta$$

$$\int m \frac{dv_\theta}{dt} r \frac{v_\theta}{r} dt = \int (-mg \sin \theta) rd\theta$$

$$\int mv_\theta \frac{dv_\theta}{dt} dt = \int (-mgr \sin \theta) d\theta$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_\theta^2 \right) dt = \int (-mgr \sin \theta) d\theta$$

$$t = 0 \text{ で } \theta = 0, v_\theta = v_0$$

$$t = t' \text{ で } \theta = \theta, v_\theta = v_\theta$$

$$\left[\frac{1}{2} mv_\theta^2 \right]_{v_0}^{v_\theta} = mgr [\cos \theta]_0^\theta$$

$$\frac{1}{2} mv_\theta^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = mgr (\cos \theta - \cos 0)$$

$$\frac{1}{2} mv_\theta^2 = mgr (\cos \theta - 1) + \frac{1}{2} mv_0^2$$

$$v_\theta^2 = 2gr (\cos \theta - 1) + v_0^2$$

 r 方向の運動方程式より

$$-mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T$$

$$T = mg \cos \theta + mr \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r} \text{ を代入すると}$$

$$\begin{aligned} T &= mg \cos \theta + mr \left(\frac{v_\theta}{r} \right)^2 \\ &= mg \cos \theta + m \frac{v_\theta^2}{r} \end{aligned}$$

最高点で一回点するには $T \geq 0$ が必要であるこの時、 $\theta = \pi$ で

$$\begin{aligned} T_{\max} &= mg \cos \pi + m \frac{v_\theta^2}{l} \\ &= mg \cos \pi + m \frac{2gr (\cos \pi - 1) + v_0^2}{r} \\ &= mg (-1) + m \frac{2gr [(-1) - 1] + v_0^2}{r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{\max} &= -mg - 4mg + \frac{mv_0^2}{r} \\ &= -5mg + \frac{mv_0^2}{r} \end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned} T_{\max} &= -5mg + \frac{mv_0^2}{r} \geq 0 \\ \frac{mv_0^2}{r} &\geq 5mg \\ v_0 &\geq \sqrt{5gr} \end{aligned}$$