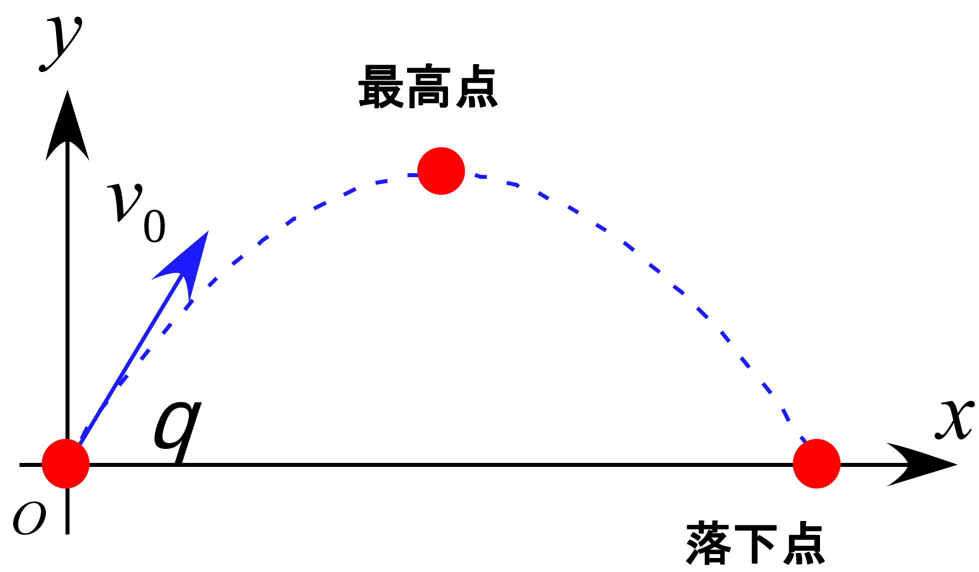
斜方投射運動(放物運動)

斜めに物体を投げ上げたときの運動

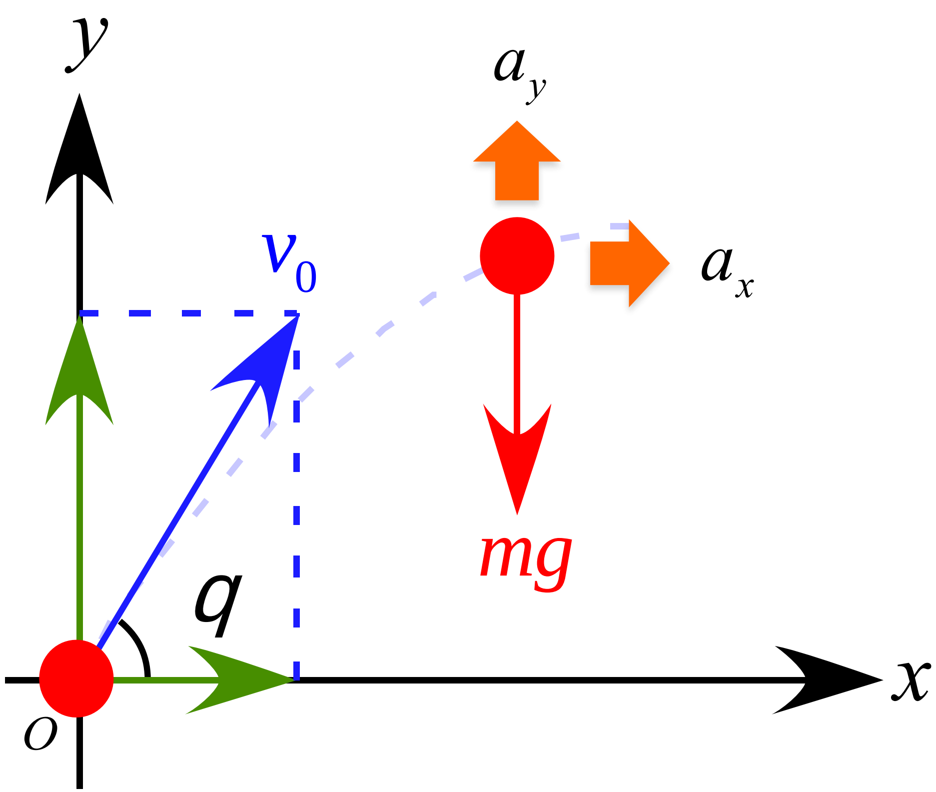
初速度： v_0

水平面との角度： q

任意の時刻における物体の速度、位置について考える



2次元の運動 → 分解 → 1次元の運動



それぞれの軸について
運動方程式を考えると

x 方向

$$ma_x = 0$$

y 方向

$$ma_y = -mg$$

それぞれの加速度は

$$a_x = 0$$

等速直線運動

$$a_y = -g$$

加速度 $-g$

等加速度運動

この2式を t で積分する。

x 方向

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\int \frac{dv_x}{dt} dt = \int 0 dt$$

$$\int dv_x = \int 0 dt$$

$$v_x = C_{x1}$$

初期条件 $t=0$ のとき

$$v_x(0) = v_0 \cos\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_x(0) = C_{x1} = v_0 \cos q$$

$$C_{x1} = v_0 \cos q$$

従って、速度 v_x は

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

y 方向

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dv_y}{dt} dt = \int (-g) dt$$

$$\int dv_y = \int (-g) dt$$

$$v_y = -gt + C_{y1}$$

初期条件 $t=0$ のとき

$$v_y(0) = v_0 \sin\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_y(0) = -g \cdot 0 + C_{y1} = v_0 \sin\theta$$

$$C_{y1} = v_0 \sin q$$

従って、速度 v_y は

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

それぞれの速度は

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= -gt + v_0 \sin\theta \end{aligned}}$$

ここで、さらに速度の式をそれぞれ

t で積分する

x 方向

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int v_0 \cos\theta dt$$

$$\int dx = \int v_0 \cos\theta dt$$

$$x = \left(v_0 \cos q\right) t + C_{x2}$$

初期条件 $t = 0$ のとき原点なので

$$x(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$x(0) = \left(v_0 \cos q\right) \times 0 + C_{x2} = 0$$

$$C_{x2} = 0$$

従って

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

y 方向

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta$$

この式を t で積分すると

$$\int dy = \int \left(-gt + v_0 \sin\theta\right) dt$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t + C_{y2}$$

初期条件 $t = 0$ のとき原点なので

$$y(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$y(0) = -\frac{1}{2} g \cdot 0^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \cdot 0 + C_{y2} = 0$$

$$C_{y2} = 0$$

従って

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t$$

任意の時刻における変位は

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t$$

x 方向

$$a_x(t) = 0$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

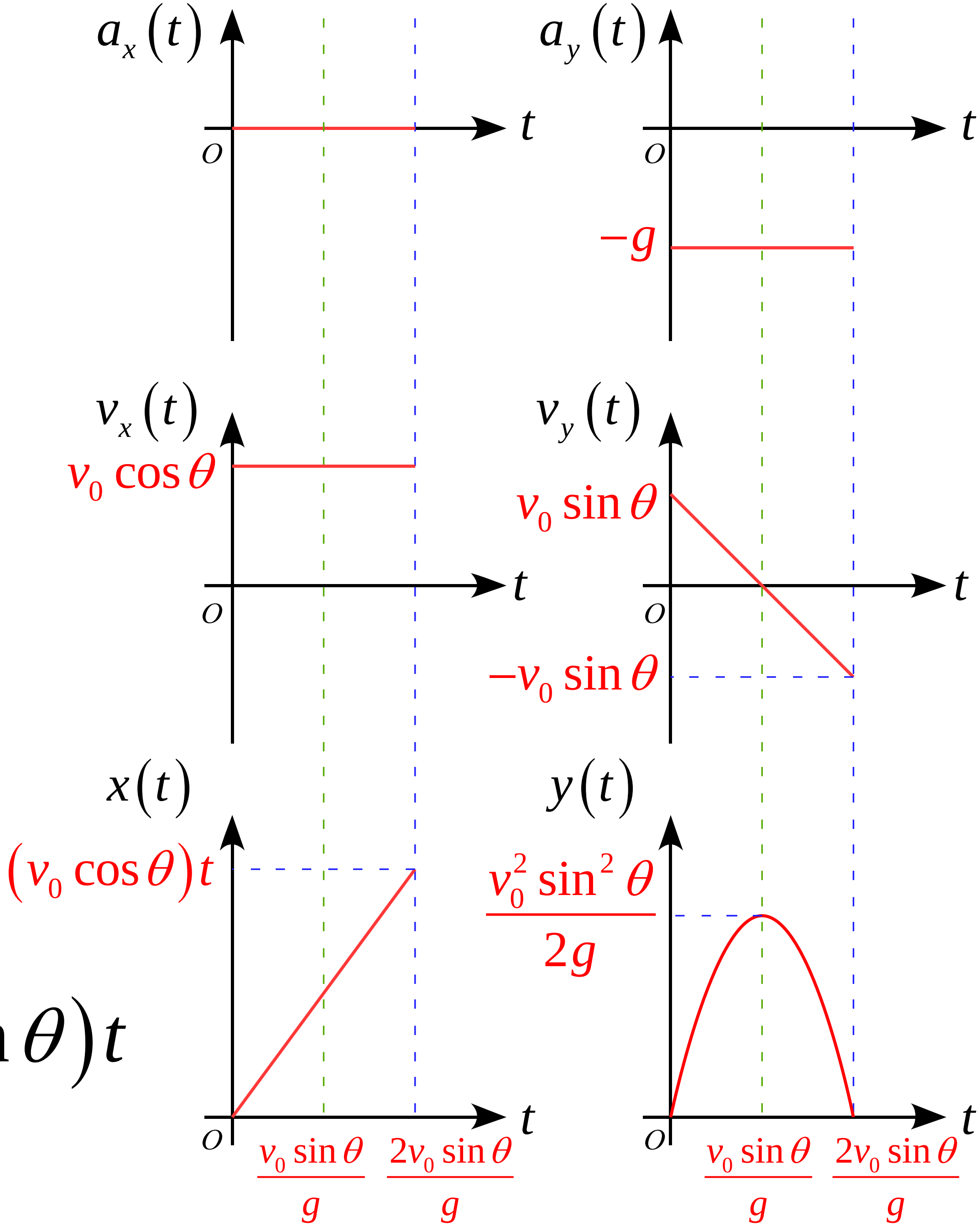
$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t$$

y 方向

$$a_y(t) = -g$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t$$



放物運動の確認

時刻 t を求めると

$$t = \frac{x}{v_0 \cos q}$$

$$\boxed{x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t}$$

これを y に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$\boxed{= -\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \left(\tan\theta\right) x}$$

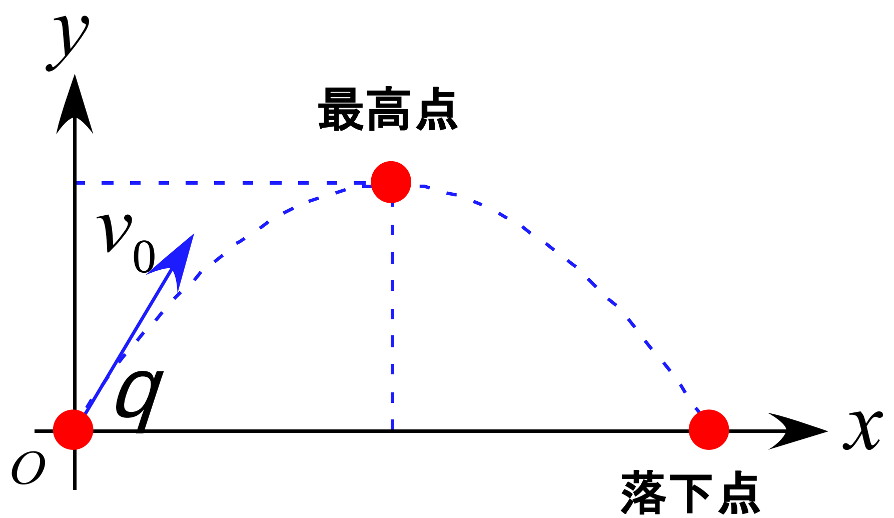
放物線

$$= \left[-\frac{g}{2 v_0^2 \cos^2\theta} x + \tan\theta \right] x$$

$y = 0$ とすると

$$x = 0$$

$$x = \frac{2v_0^2 \sin q \cos q}{g}$$



の2点となり、それぞれ原点と落下点となる。

放物運動の確認

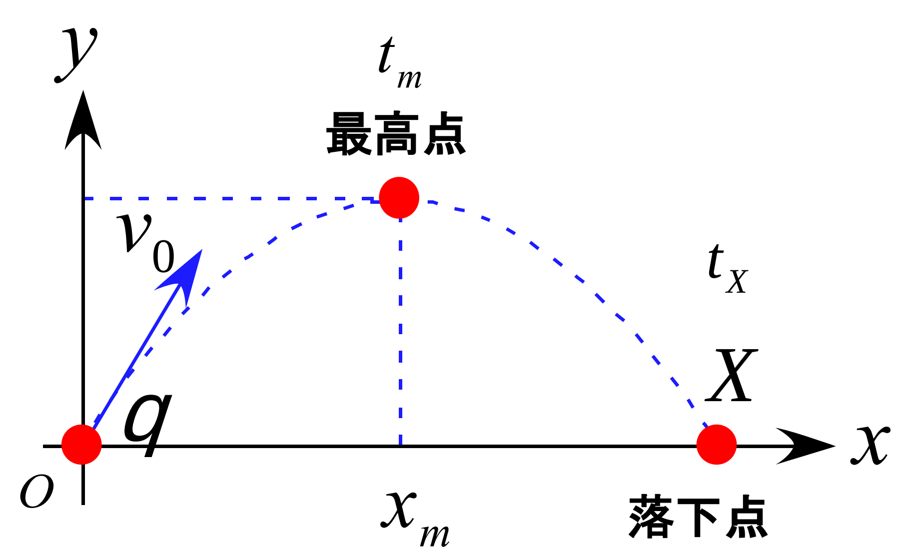
落下点の達した時刻 t_X は

$$t_X = \frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{1}{v_0 \cos\theta}\,\frac{2v^2{}_0 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$= \frac{2v_0 \sin q}{g}$$

対称性より最高点の時刻 t_m は

$$t_m = \frac{t}{2} = \frac{v_0 \sin q}{g}$$



このときの座標は

$$x_m = \frac{X}{2} = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$y(t_m) = -\frac{1}{2} g \cdot t_m{}^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t_m$$

$$= -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g} \right)^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

放物運動～飛距離最大

飛距離最大となる初速度の角度 q_0 を考える

$$\sin 2q = 2\sin q \cos q$$

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin q_0 \cos q_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2q_0}{g}$$

これが最大値になるのは $\sin 2q_0$ が最大値になるときで、その最大値は 1 である。

このとき、

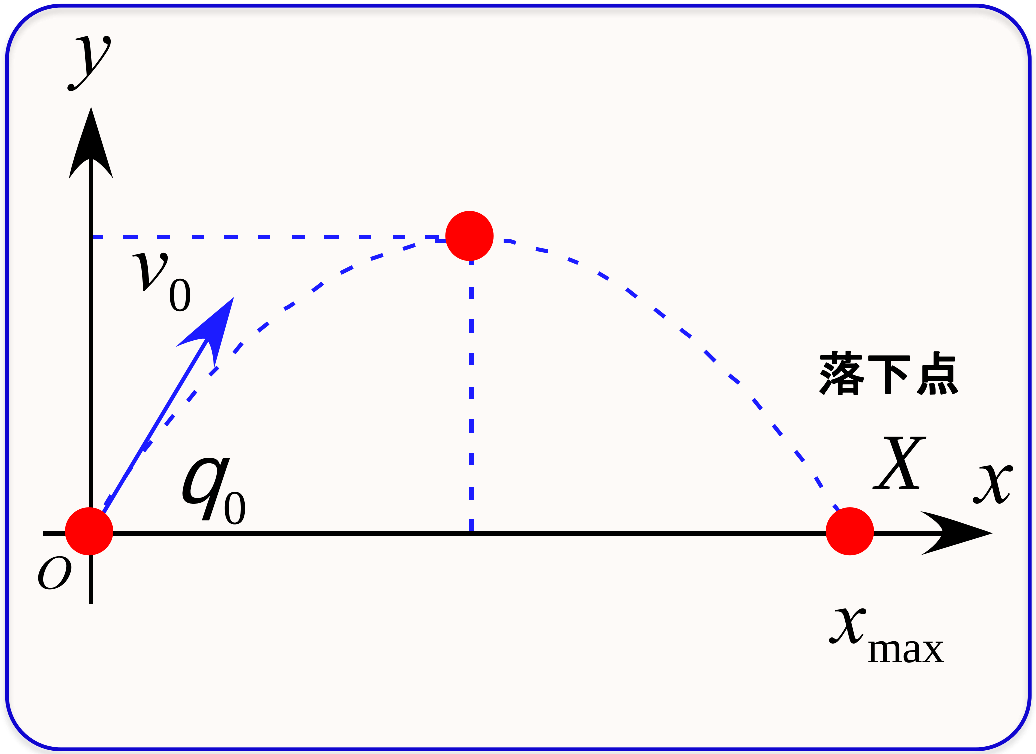
$$2q_0 = 90^\circ$$

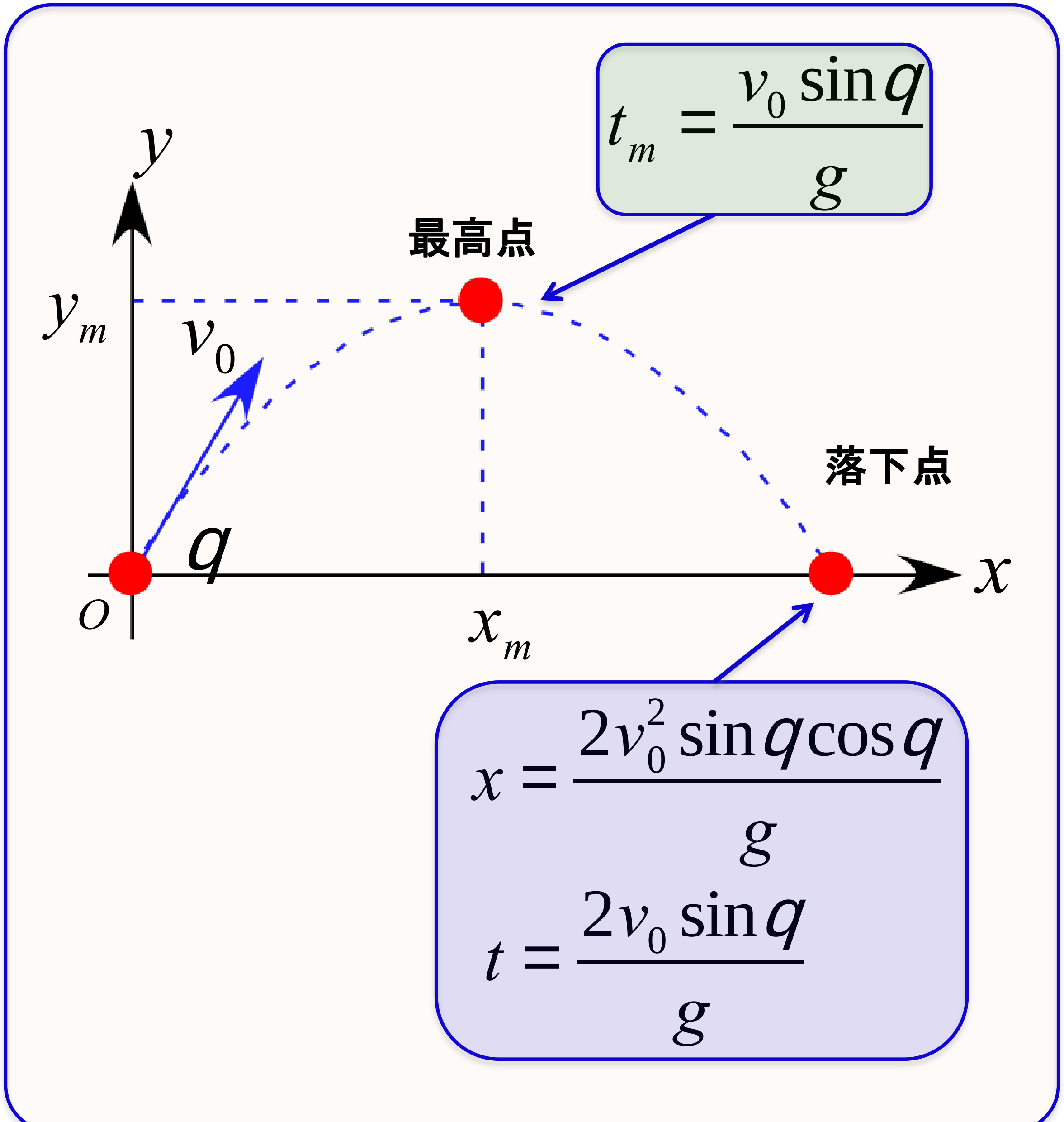
となるので $x_{\max}$ となる放出角度は

$$q_0 = 45^\circ$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

である。




$t_m = \frac{v_0 \sin q}{g}$
最高点
y
y_m
v_0
q
O
x_m
落下点
x
$x = \frac{2v_0^2 \sin q \cos q}{g}$
$t = \frac{2v_0 \sin q}{g}$

放物運動の確認 ～ 平方完成

軌道の式を平方完成することでグラフを考える

$$y(x) = -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(-\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}\right)x\right]$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[x^2 - \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}x\right]$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2\right]$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}\right]$$

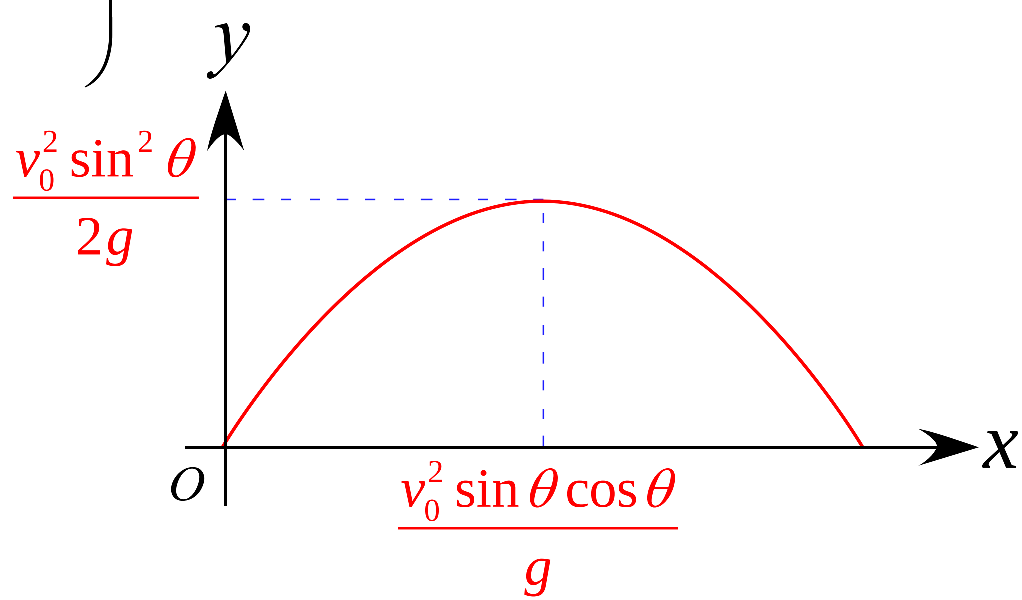
$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x-\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

従って、頂点の座標は

$$(x, y) = \left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\right)$$

となり、前出の計算結果と
一致することが確認できる



力〜様々な力

重力

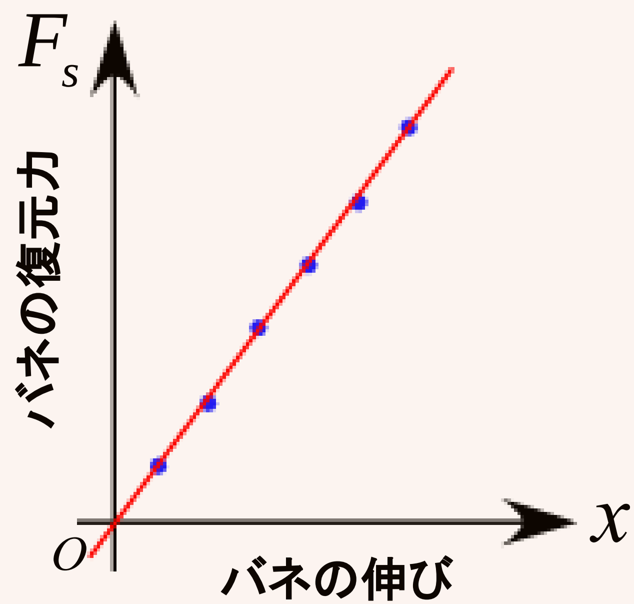
$$F_g = mg \qquad g = 9.8\ [\mathrm{m/s^2}]$$

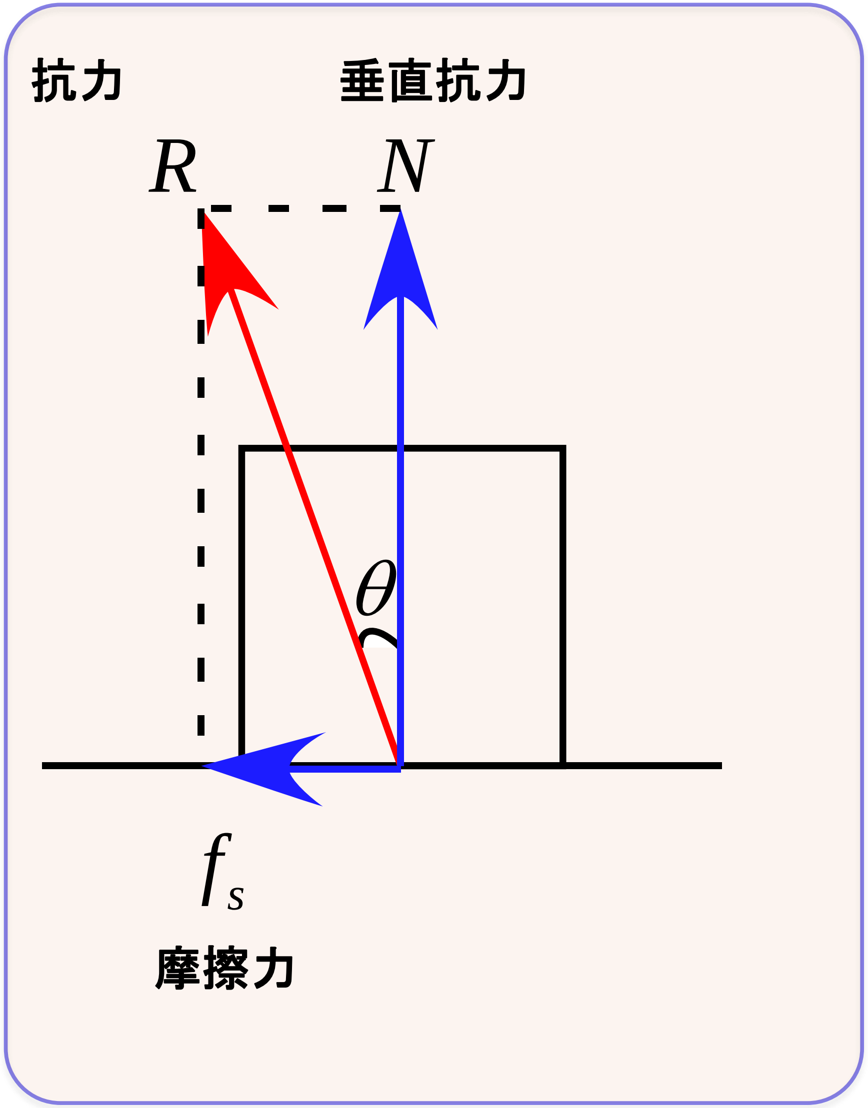
バネの弾性力

フックの法則 (実験式)

$$F_s = kx$$

バネ定数 k

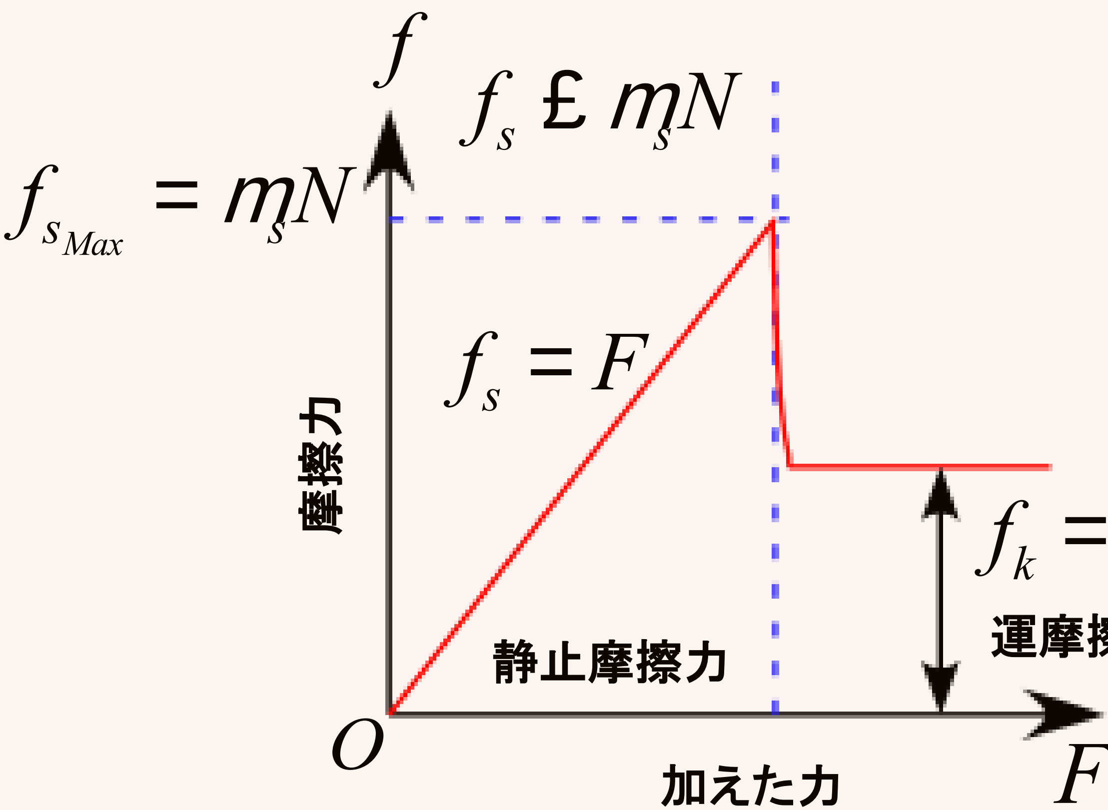


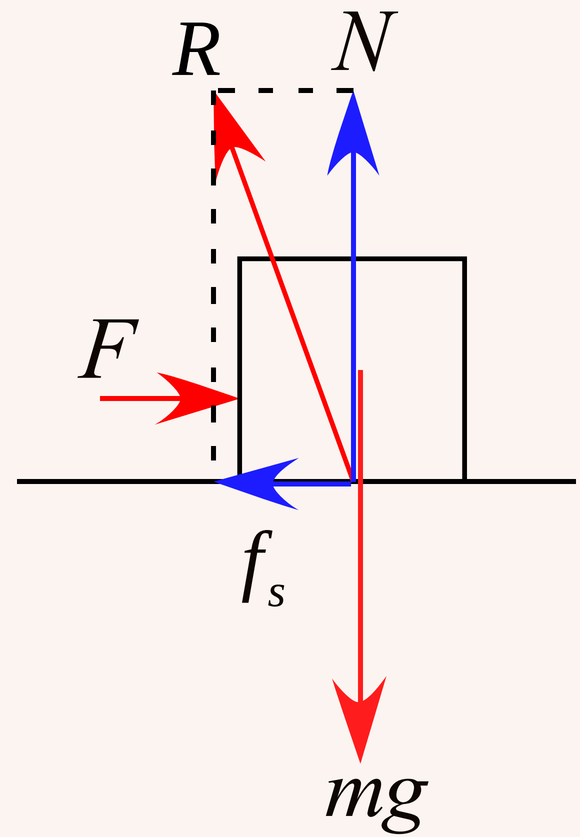


$$\mu = \tan\theta = \frac{f_s}{N}$$

摩擦力 f

接触している2つの面の間の摩擦力





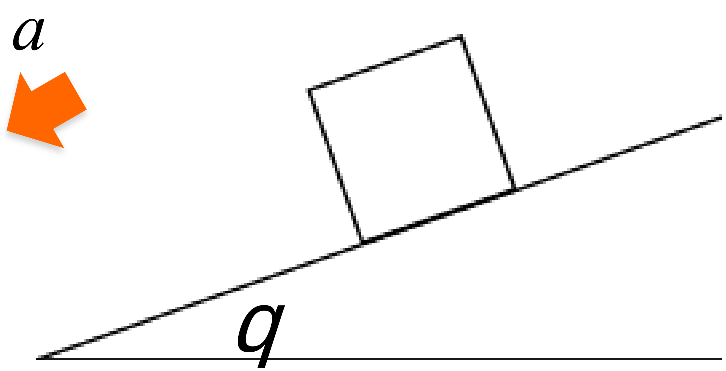
静止摩擦係数: m_s

動摩擦係数: m_k

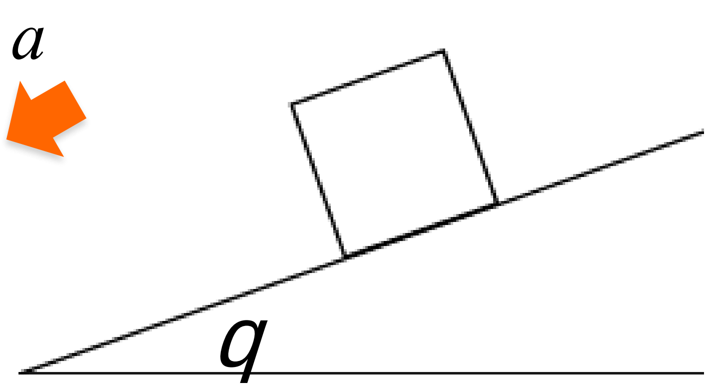
力～運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

1. 質量 m の物体が斜面を滑り降りる (摩擦なし)



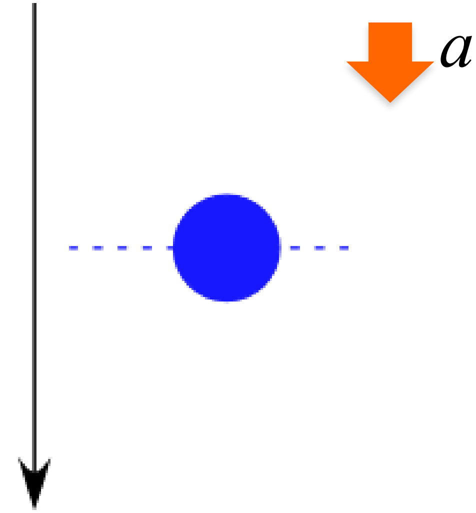
2. 質量 m の物体が斜面を滑り降りる (摩擦力 f あり)



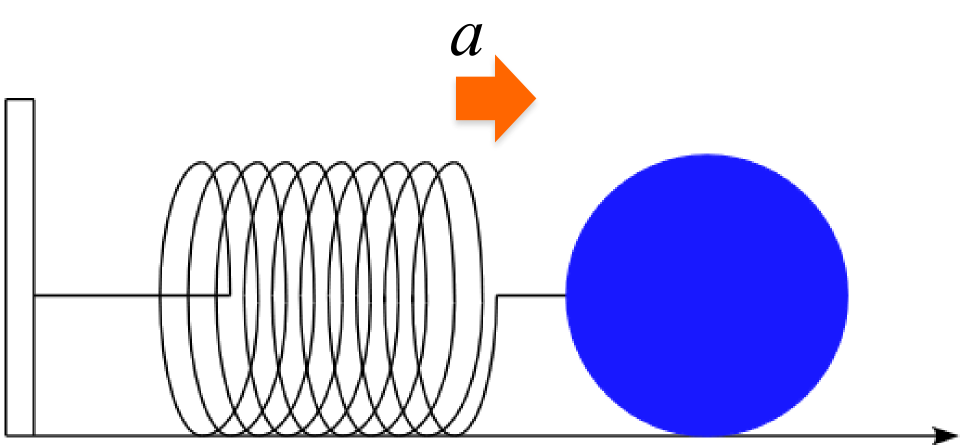
力～運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

3. 質量 m 雨滴が落下する (空気の抵抗力の大きさは kv)



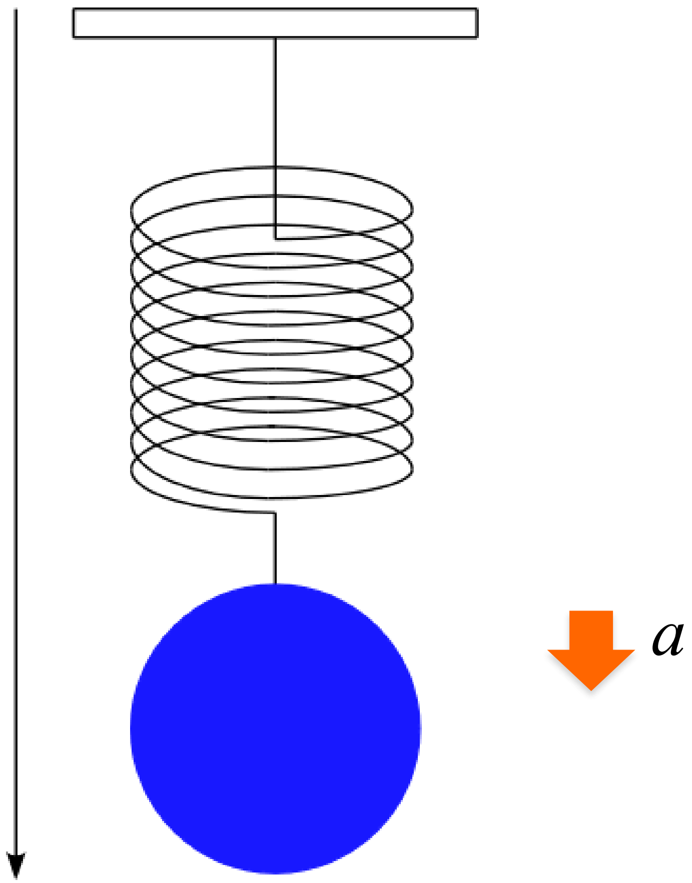
4. バネに質量 m の物体がついている (バネの復元力は f_s とし、床との摩擦なしとする)



力〜運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

5. バネに質量 m の物体がついている (バネの復元力は f_s とする)



力～運動方程式

水平とθの角をなす斜面上に帆のついたそりを置き、そりが斜面に沿ってすべり落ちる運動を考える。

そりの質量をM, 動摩擦係数をμ, 重力加速度をg, とする。

そりには帆が張ってあり、そりの速さに比例した抵抗力がはたらくとする。

比例定数をk, として、以下の問いに答えよ

1. そりの速度が$v(t)$になったときのそりの加速度を$\alpha(t)$として、運動方程式を書け。

2. この運動の$v-t$グラフを書け。

3. そりが等速運動するようになったときの速度を求めよ。

力～運動方程式

質量 m の質点が時間に依存する力 $F=kt^2$ を受けて運動している。
以下の問いに答えよ。
但し、$k>0$, 定数とし、運動は一直線上の運動であるとする。

1. $t=0$ から $t=t$ までの間の速度増加量 Δv を求めよ。

2. $t=0$ から $t=t$ までの間の質点の移動距離 Δx を求めよ。
   (初速度を v_0 として用いてよい。)

慣性力

静止している座標系：座標 1
動いている座標系：座標 2

$\vec{a}$ ：座標 1 から見た座標 2 の加速度

$\vec{\mathsf{a}}$ ：座標 1 から見た物体の加速度

$\vec{b}$ ：座標 2 から見た物体の加速度

座標 1 から見た物体の運動方程式

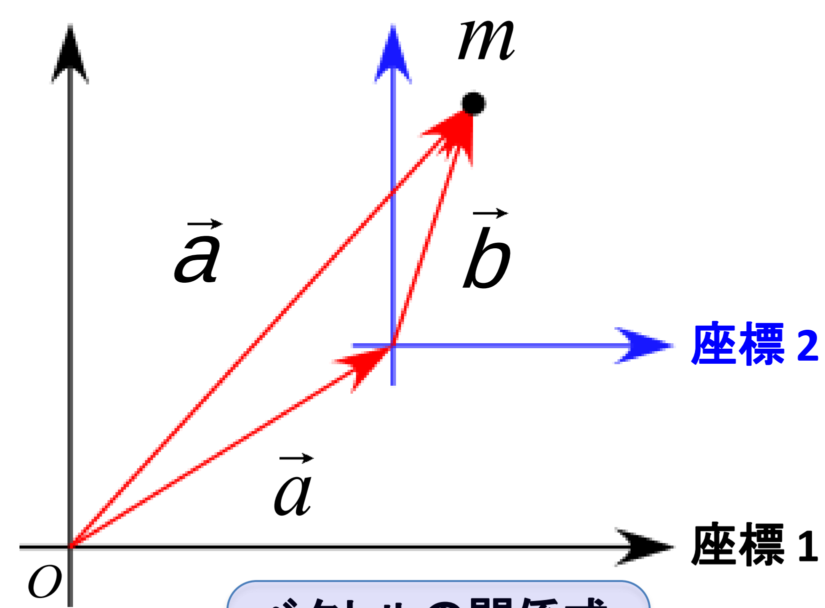
$$m\vec{\mathsf{a}} = \vec{F}$$

$$m\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{F}$$

$$\boxed{m\vec{b}} = \vec{F} - \boxed{m\vec{a}}$$

座標 2 から見た運動方程式

見かけの力 (慣性力)



ベクトルの関係式

$$\vec{\mathsf{a}} = \vec{a} + \vec{b}$$

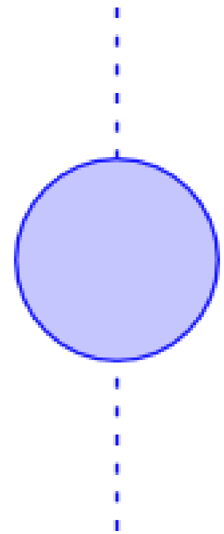
慣性力～エレベータ

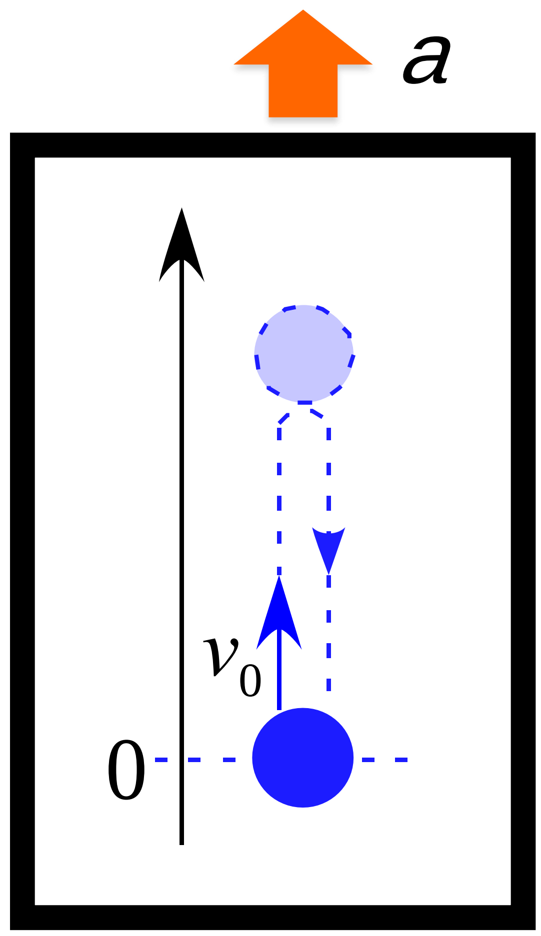
例題

一定の加速度 a で上昇するエレベータがある。

このエレベータ内で質点を原点から初速度 v_0 で鉛直方向に投げ上げたところ、t_0 秒後に再び原点に戻ってきた。以下の問に答えよ。

(但し、重力加速度は g として用いること)





1. 質点に作用する力を記入せよ。

2. この運動の運動方程式を書け。

3. エレベータの加速度を求めよ。

慣性力～エレベータ

例題

一定の加速度 a で上昇するエレベータがある。

このエレベータ内で質量 m の物体が床から高さ h の場所に糸でつるされている。

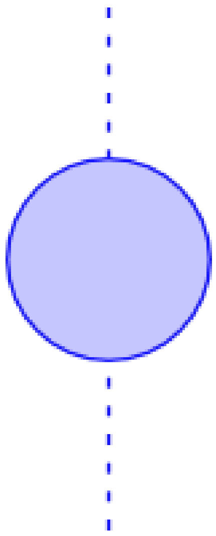
以下の問に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること)

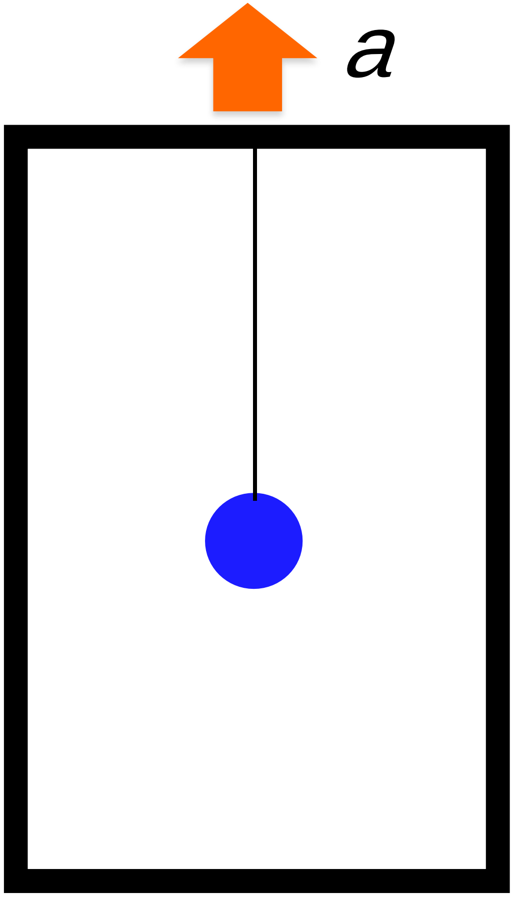
1. 物体に作用する力を記入せよ。

2. 糸の張力 T を求めよ。

この糸を切ったとする。

3. 物体が床に達するまでの時間を求めよ。





慣性力～エレベータ

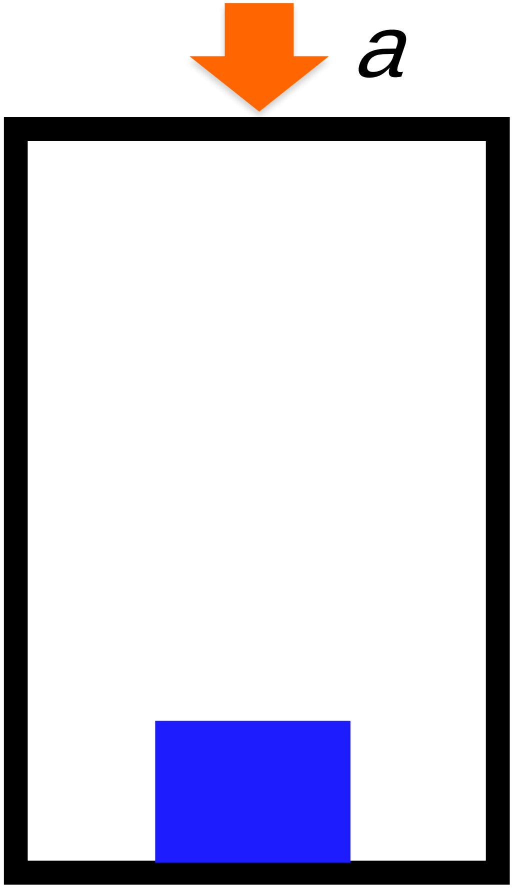
例題

一定の加速度 a で下降するエレベータがある。

このエレベータ内に質量 m の物体が床に置かれている。

以下の問に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること)

1. 物体に作用する力を記入せよ。



2. 物体が床から受ける垂直抗力 N を求めよ。

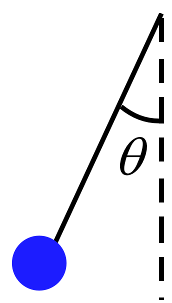
3. 物体が無重量になるための条件を求めよ。

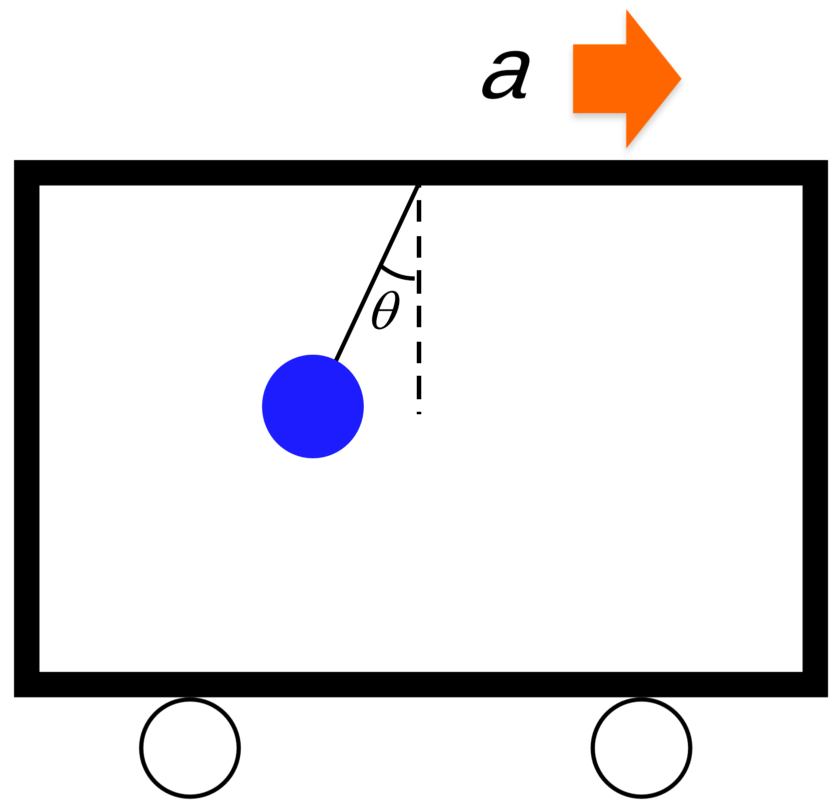
慣性力〜列車

例題

電車が一定の加速度 a で水平右向きに進んでいる。
この電車内に質量 m の物体を天井からつるしたところ
鉛直線と角度 θ をなして維持している。
以下の問に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること)

1. 物体に作用する力を記入せよ。





2. $\tan\theta$ を表せ。

3. 糸の張力 T を求めよ。