運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

仕事とエネルギーの関係

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を、xで積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int \boxed{m\frac{dv}{dt}} vdt = \int Fdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int Fdx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

力 Fが一定であるとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2 = F\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} = \boxed{F\left(x_2 - x_1\right)}$$

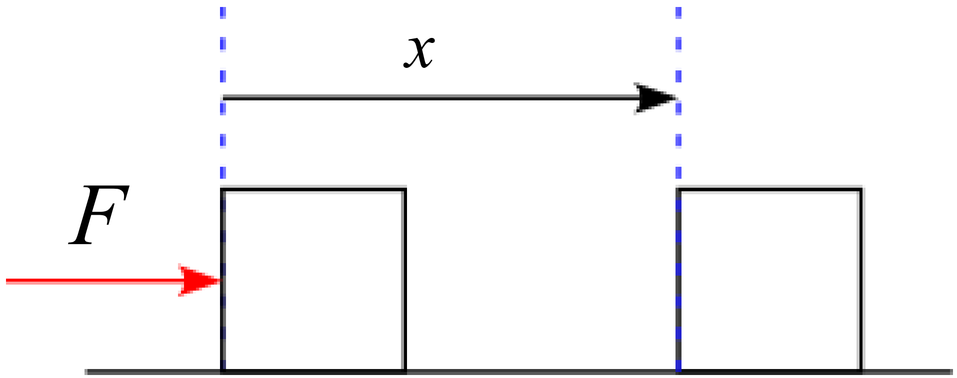
運動エネルギーの変化　　外力の仕事

仕事とエネルギー

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き

物体に力を加えて、物体を移動させる事



運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

定義

力 Fが物体にした仕事W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

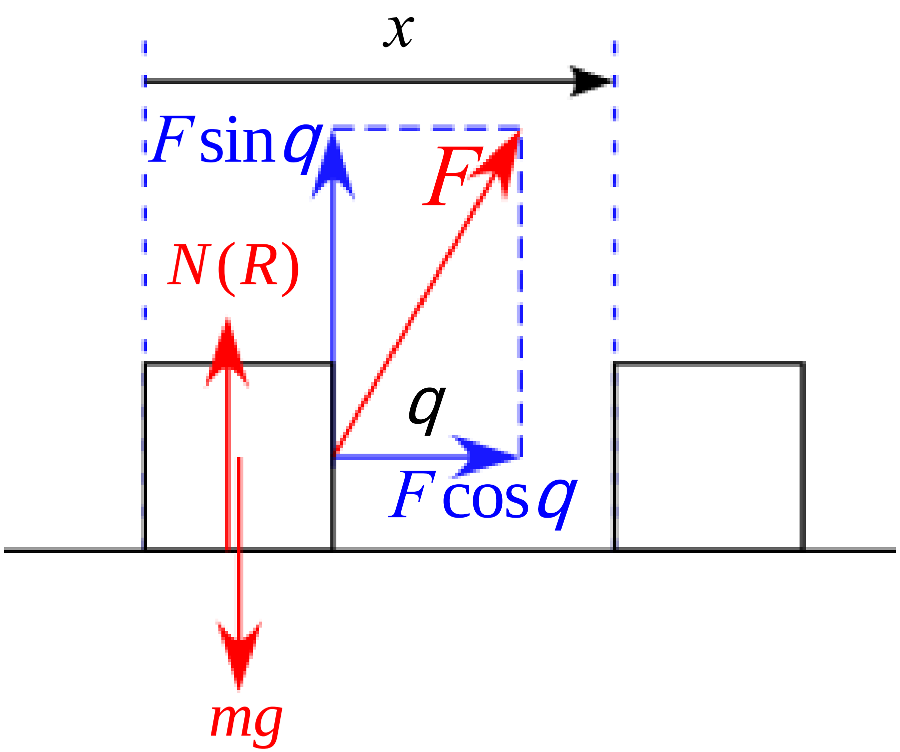
と定義される。

「力 Fが物体に仕事 Wをした」
「物体は力 Fに仕事Wをされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]}[L] = \frac{[L^2M]}{[T^2]}$$

斜め上に引っ張る

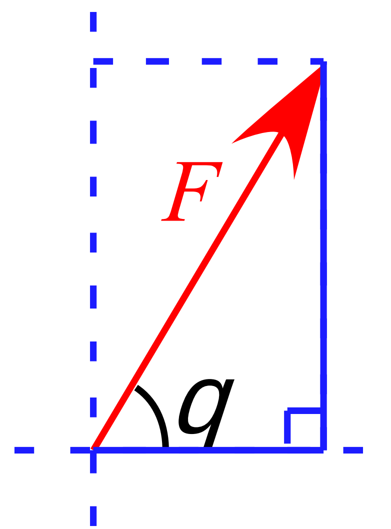


物体に作用する力

場の力：重力 mg
接触力：張力 F
垂直抗力 $N(R)$

仕事をしていない

垂直抗力：N
場の力：重力 mg
Fの y 成分：$F\sin q$



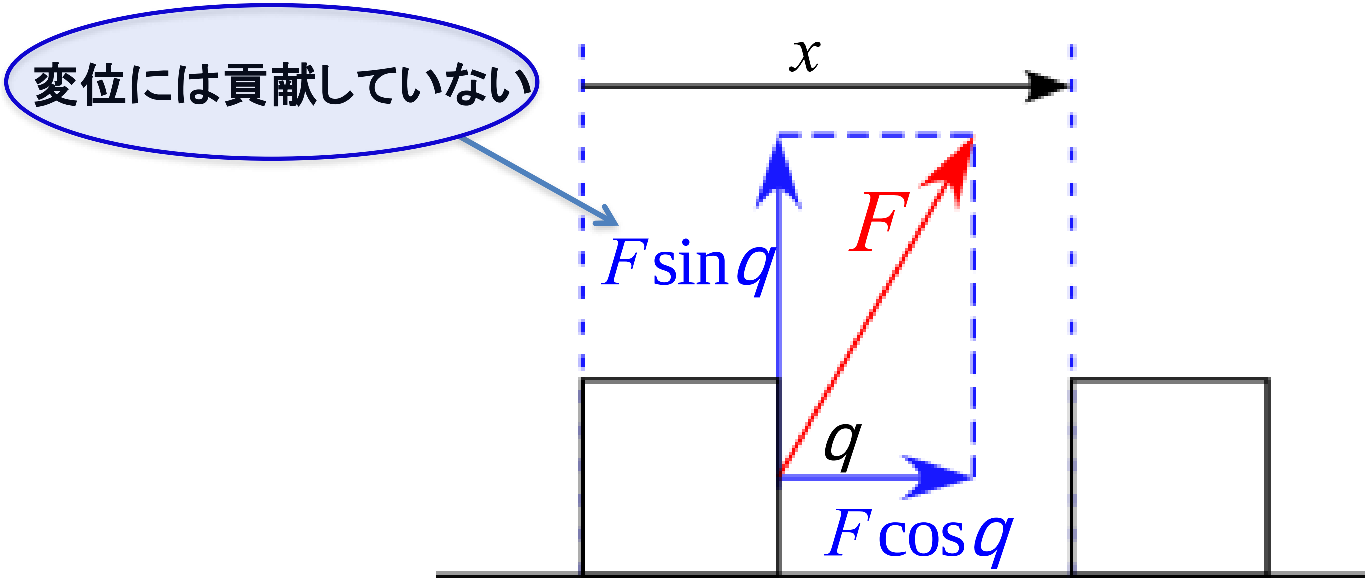
運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta$$

移動方向の力だけが仕事をする

$$W = F\cos\theta \cdot x$$

斜め上に引っ張る場合



力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

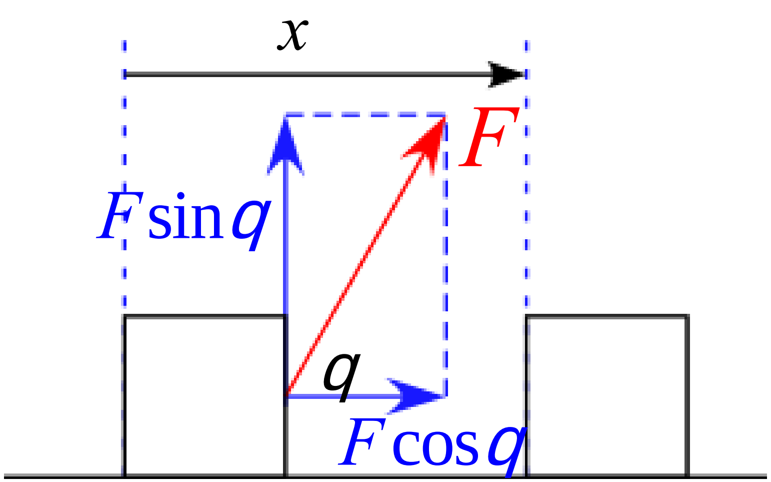
$$W = F\cos\theta \cdot x = Fx\cos\theta$$

仕事

- 力の向きと移動方向が同じ場合 : $W = Fx$
- 力の向きと移動方向が q の角をなす場合 : $W = Fx\cos q$

作用した力×距離

斜め上に引っ張る場合



運動方程式 (x軸方向)

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta$$

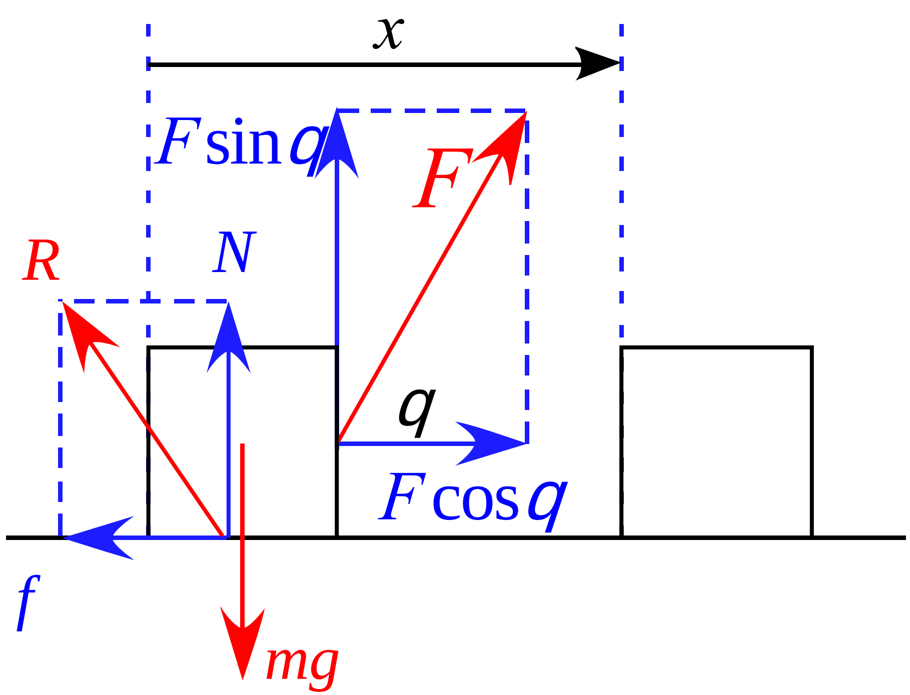
$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} F\cos dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \left[F\cos\theta x\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\cos\theta\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事～摩擦力

斜め上に引っ張る＋摩擦力を考慮する場合



物体に作用する力

場の力：重力 mg
接触力：張力 F
抗力 R

仕事をしていない

垂直抗力：N
場の力：重力 mg
F の y 成分：$F\sin q$

移動方向の力だけが仕事をする

摩擦力 f は右向きに移動すること
に対して邪魔をしている

負の仕事

正の仕事：$W_1 = F\cos\theta \cdot x$
負の仕事：$W_2 = -f \cdot x$

仕事〜摩擦力

斜め上に引っ張る + 摩擦力を考慮する場合

運動方程式 (x軸方向)

$$m\frac{dv}{dt} = F\cos\theta - f$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2}\left(F\cos - f\right)dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \left[F\cos\theta x - fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

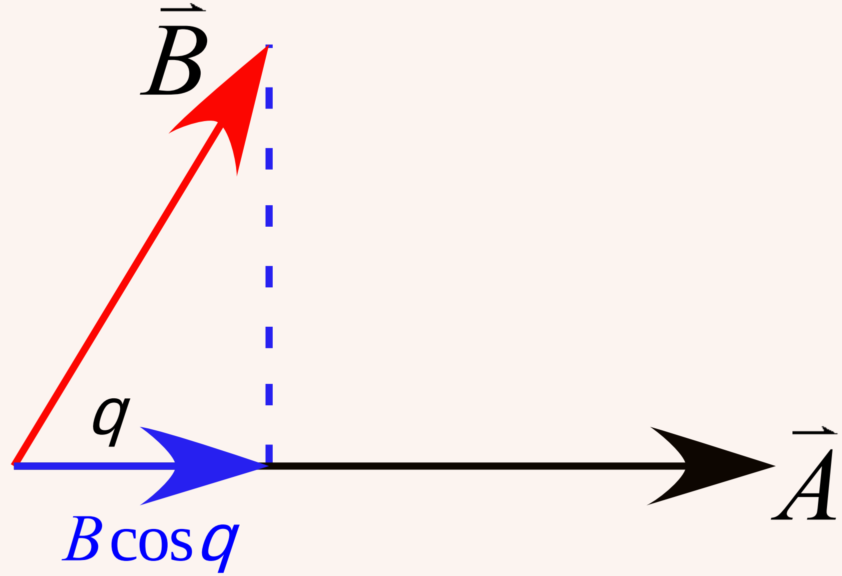
$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = F\cos\theta\left(x_2 - x_1\right) - f\left(x_2 - x_1\right)$$

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

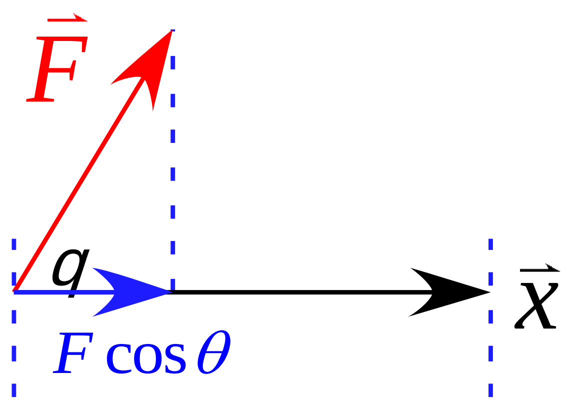
$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$



これを仕事に応用すると

$$\vec{F}\cdot\vec{x} = Fx\cos\theta$$



つまり、

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$

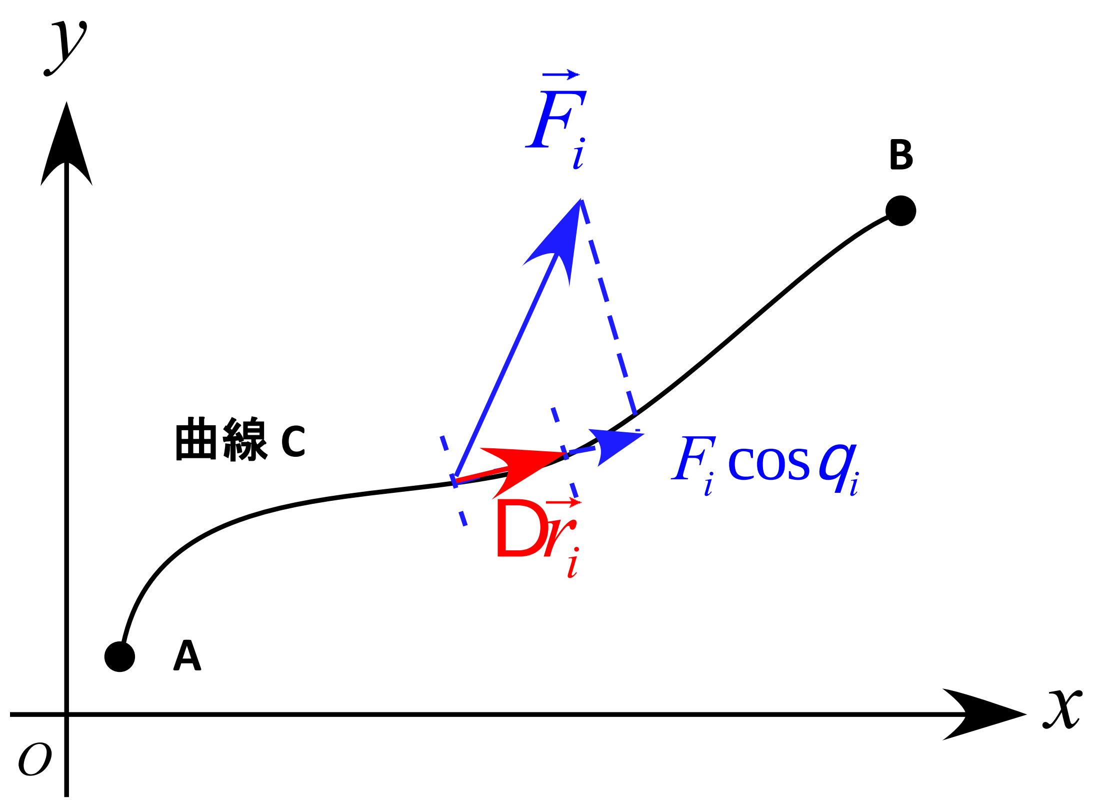
仕事～線積分

微小距離 $\Delta\vec{r}_i$ だけ移動したとすると

$$\Delta W_i = F \cdot \Delta r_i \cos\theta_i$$

$$= \vec{F} \cdot \Delta\vec{r}_i$$

となる。



(参考)

$\Delta\vec{r}_i$ を限りなく小さくすると

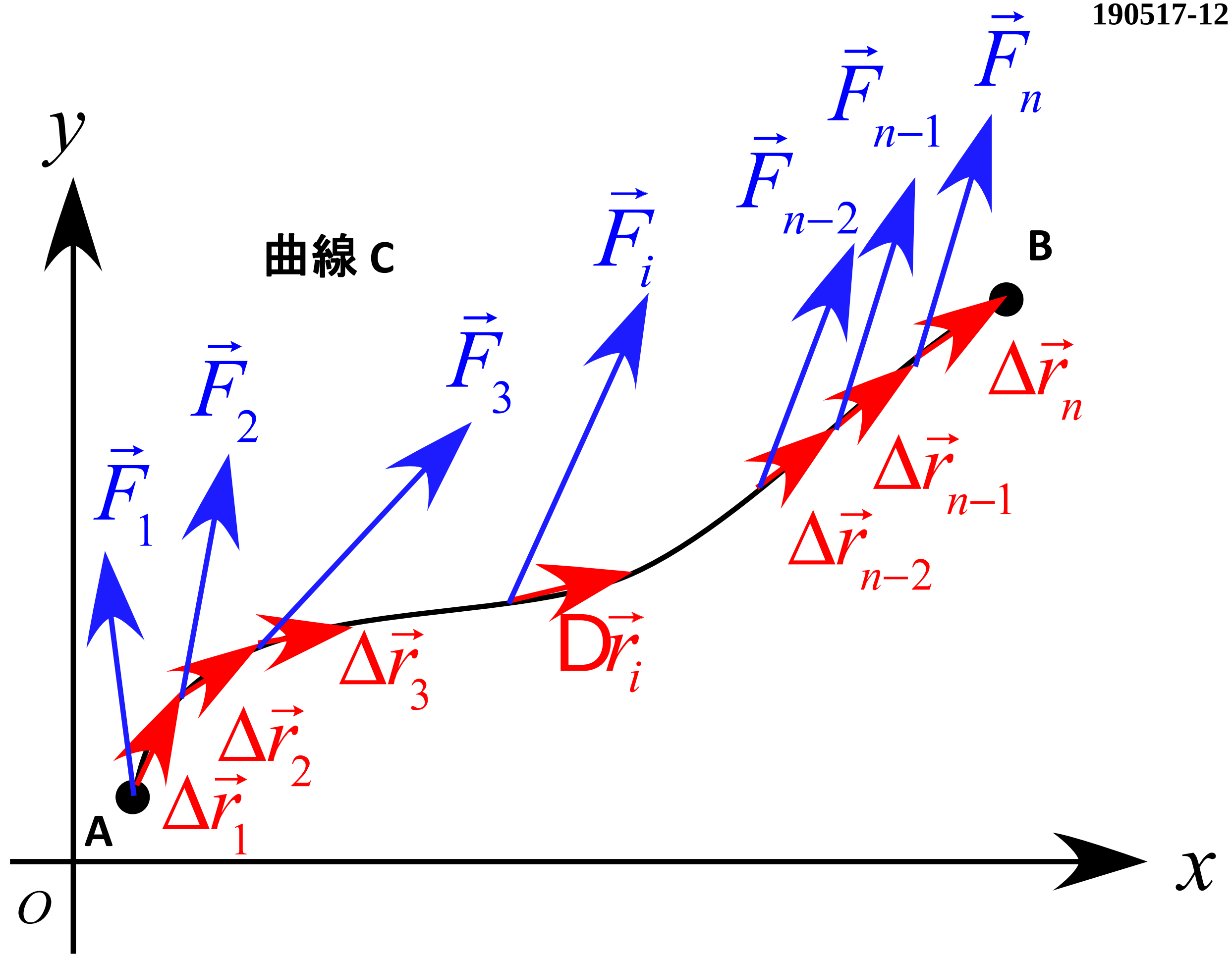
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

これを区間で積分すると

$$\boxed{W = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

となる。

線積分



「仕事」は「力の距離積分」で計算することができる

仕事率

定義

仕事率:単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t}$$

国際単位:ワット [W =J / S]

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L]\frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{x}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{x}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

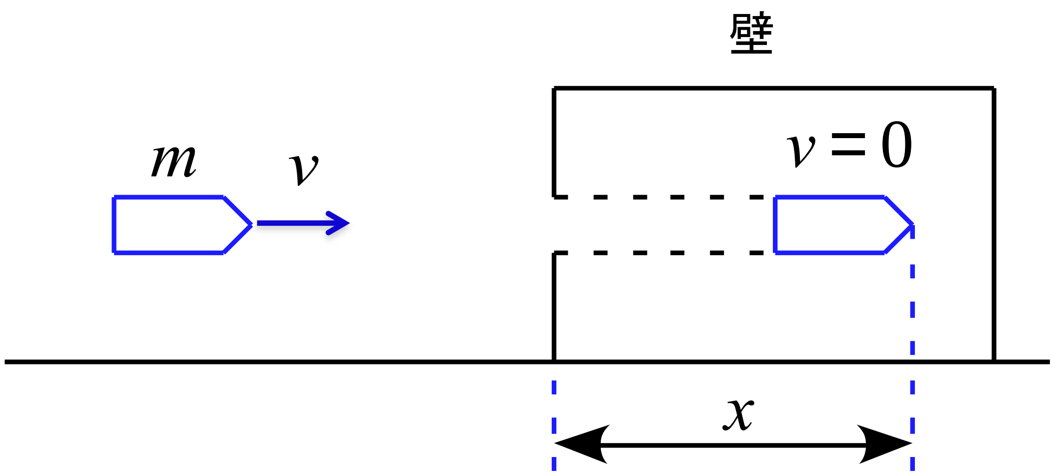
エネルギー

ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという

仕事をする能力＝エネルギー

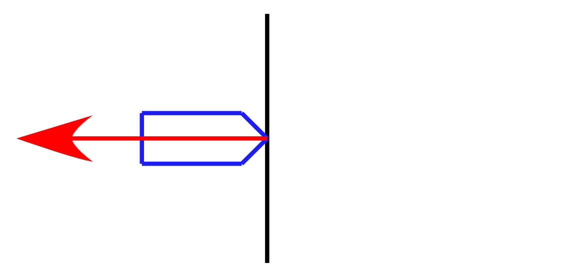
例

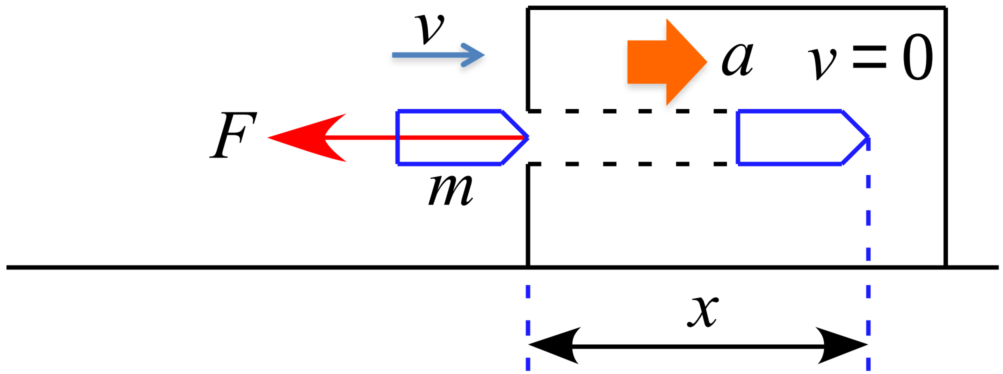
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





水平方向の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int(-F)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int(-F)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int(-F)\,dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_0^x -F\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} = \left[-Fx\right]_0^x$$

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx + F\cdot 0$$

エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m\cdot v^2 = -Fx$$

最後の運動能力　最初の運動能力　弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [\,\mathrm{J = kg\ m^2 / s^2}\,]$$

次元

$$[M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

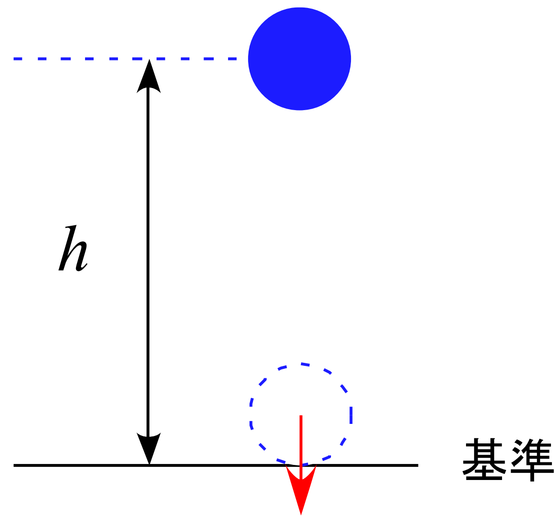
質量と速度の2乗に比例

エネルギー〜位置エネルギー

重力による位置エネルギー

基準から力 F で $x = 0$ から $x = h$ まで持ち上げたとする

運動方程式は



$$ma = F - mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int (F - mg)\,dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}v\,dt = \int (F - mg)\,dx$$

$$\boxed{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt} = \boxed{\int (F - mg)\,dx}$$

運動エネルギーの変化

外力の仕事

エネルギー～位置エネルギー

準静的に持ち上げたとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \int_0^h (F - mg)\,dx$$

$$0 = \int_0^h F\,dx + \int_0^h (-mg)\,dx$$

$$\int_0^h mg\,dx = \int_0^h F\,dx$$

$$[mgx]_0^h = \int_0^h F\,dx$$

$$\boxed{mgh} = \boxed{\int_0^h F\,dx}$$

重力による
位置エネルギー

持ち上げた
仕事

エネルギー～位置エネルギー

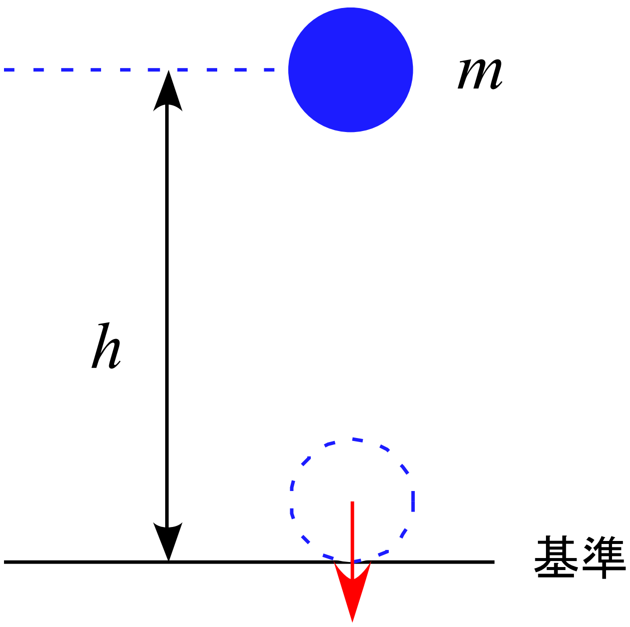
重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた

下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

$$U = mgh \quad [\mathrm{J = kg\ m^2 / s^2}]$$

基準からの高さに比例

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

エネルギー～自由落下

自由落下

運動方程式は

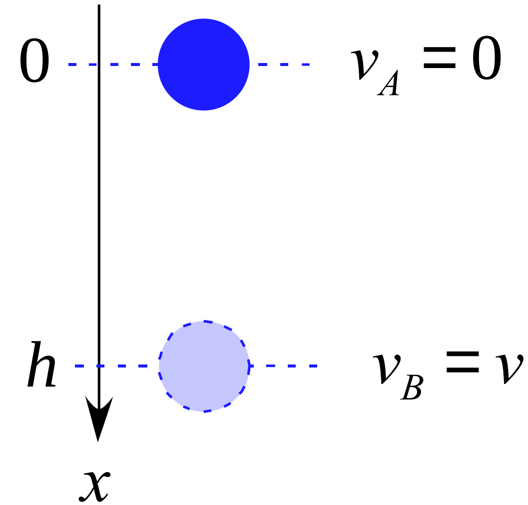
$$ma = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int mgdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int mgdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int mgdx$$



エネルギー～自由落下

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_A}^{v_B} = [mgx]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mgh - mg\cdot 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2} = \boxed{mgh}$$

運動エネルギーの変化　　外力の仕事

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgh = 0$$

運動エネルギー　　位置エネルギー

エネルギー保存則

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$mgh - \frac{1}{2}mv^2 = 0$$

(重力場の運動)

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

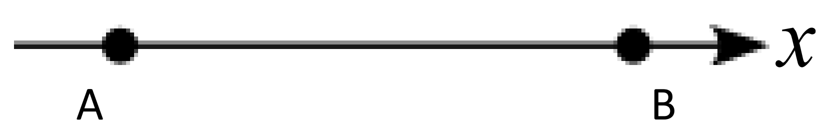
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = 0 \qquad x(t_2) = x$$



$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \int_0^x Fdx$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2} = \boxed{\int_0^x Fdx}$$

エネルギーの変化量

$x=0$ から x まで
物体に働く力 F がした仕事

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$ をかける ⇒ 単位時間あたりの変位をかけた

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する ⇒ 最初から最後まで時間に対して和を取る

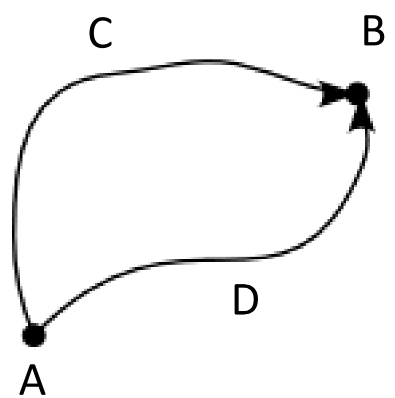
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

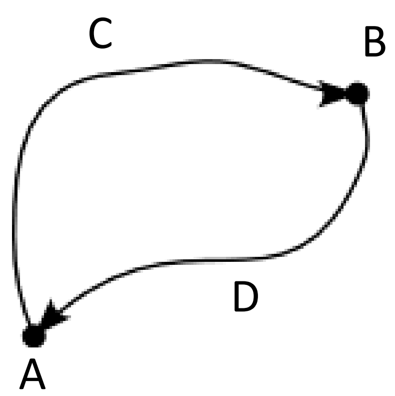
最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路





点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える

ここでの運動が保存力による運動とすると

点A – C – 点Bの経路を通り、
そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A – D – 点Bの経路を通り、同じ道を通って
点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

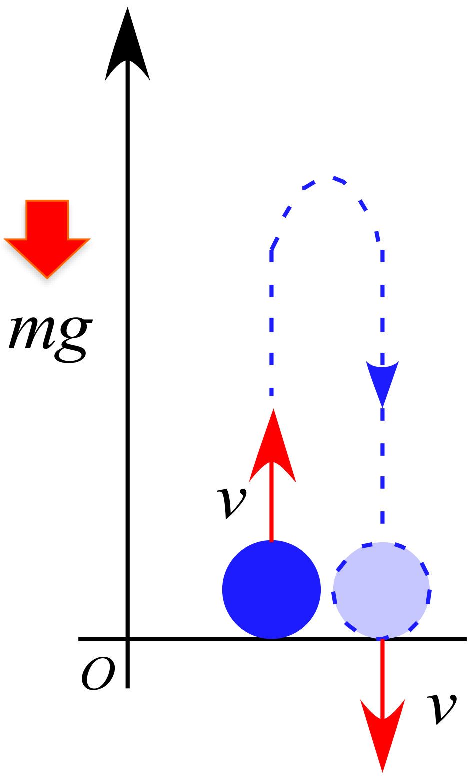
よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える



鉛直投げ上げ運動

この運動における仕事は

$$W = \int_0^0 F dx = \int_0^0 (-mg) dx = 0$$

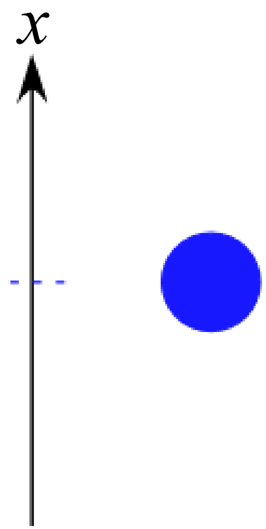
元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる

↓

保存力

エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-mgx\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + mgx$ は時間に対して

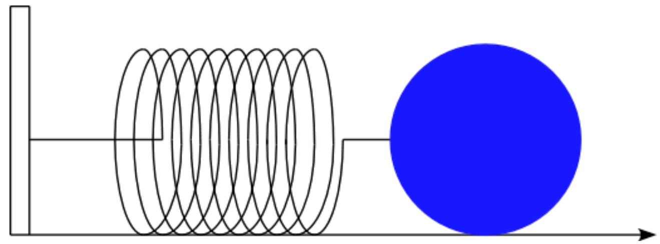
変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = \text{一定}$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が
一定であるからエネルギー保存則が
成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

バネの単振動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 一定$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

仕事とエネルギー～例題

例題

摩擦がある斜面を質量 m の物体がすべり降りる運動の運動を考える。以下の問に答えよ。
但し、動摩擦力は $f = \mu_k N$ として用いてよいとする。

(1) この運動の運動方程式を記述せよ。

(2) この運動の加速度 a を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

(3) この運動で物体が距離 L を移動したとするとき、動摩擦力がした仕事 $W_{摩}$ を求めよ。