運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

回転運動と角運動量

質点の運動方程式

$$m\vec{a}=\vec{F}$$

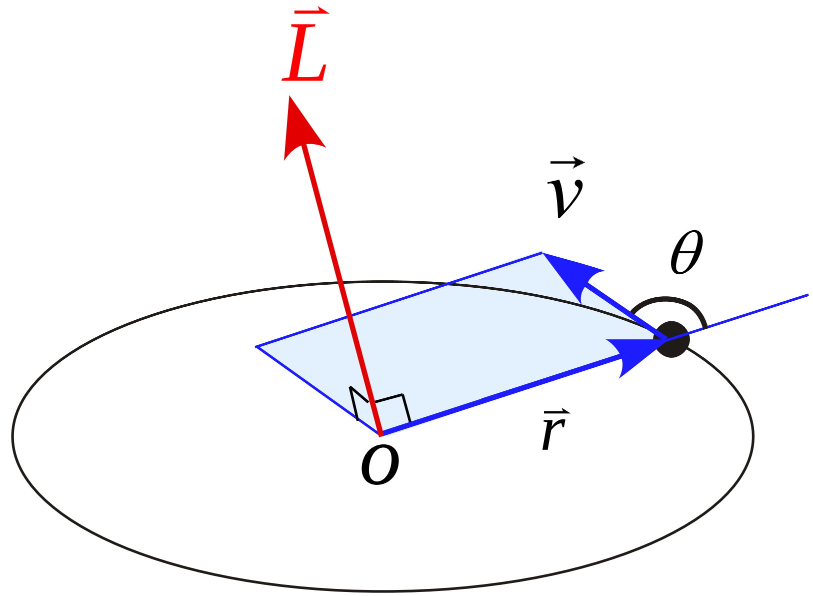
両辺に左から位置ベクトル $\vec{r}$ をかけると(外積)

$$\vec{r}\times m\vec{a}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{r}\times m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\vec{r}\times\vec{p}}_{\text{角運動量}}\right)=\underbrace{\vec{r}\times\vec{F}}_{\text{モーメント}}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}}$$

回転運動と角運動量

途中の式変形について　(何故、$\vec{r}$ が微分の中に入るのか？)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\,//\,m\vec{v}$ より

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\vec{0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

角運動量とモーメント

角運動量とモーメントの関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

質点が点 O まわりを回転する勢いを表している

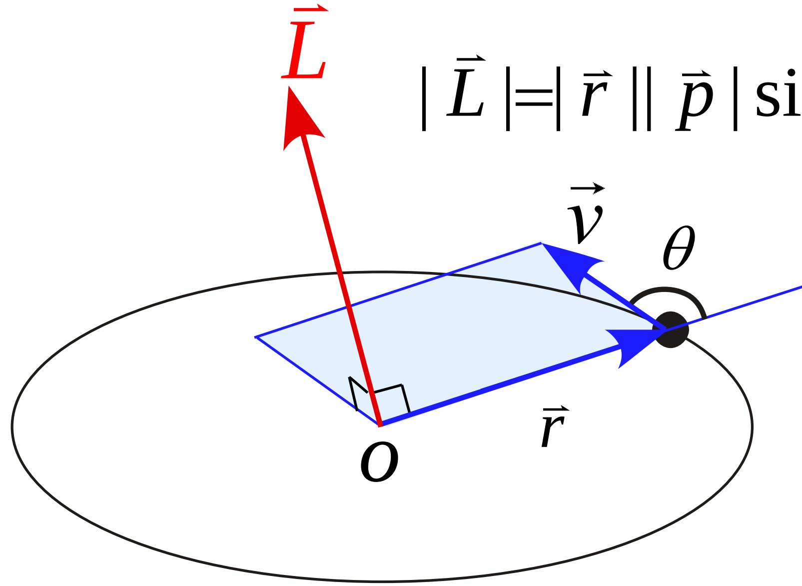
$$[L][M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T]}$$

$$N = \vec{r} \times \vec{F}$$

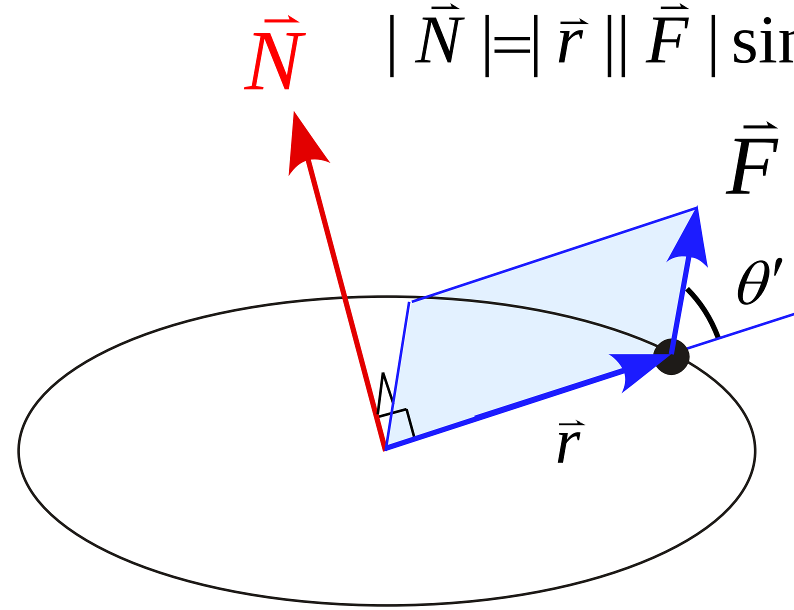
点 O まわりの力のモーメント

$$[L][M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\theta$$



$$|\vec{N}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta'$$



角運動量保存則

角運動量とモーメントの関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

ある質点の点 O まわりの
角運動量の変化は
この質点に働く点 Oまわりの
力のモーメントに等しい

もし、モーメント $\vec{N} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

外力によるモーメントの総和 $\vec{N}$ が $\vec{0}$ のときは、内力が働いていたとしても、系の角運動量 $\vec{L}$ は変化しない

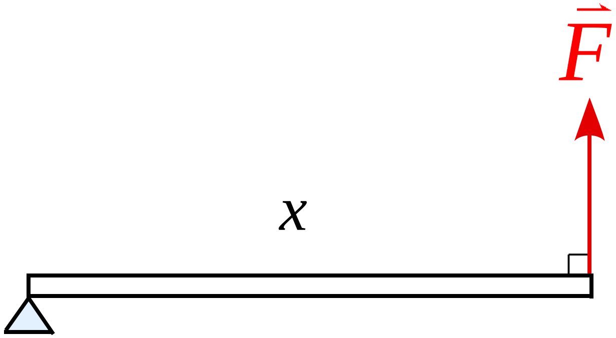
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

力のモーメント～例題

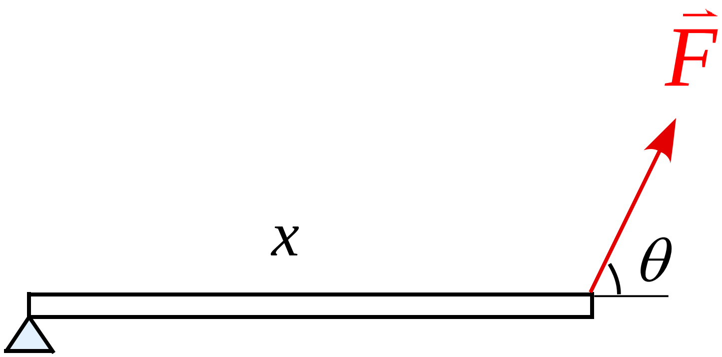
例題

以下の図の力のモーメント N を表せ。但し、棒の質量は無視できるとする。

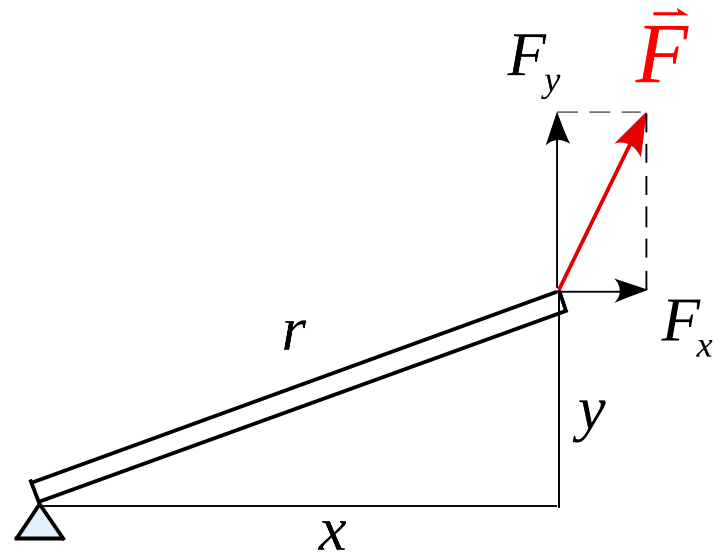
1.



2.



3.



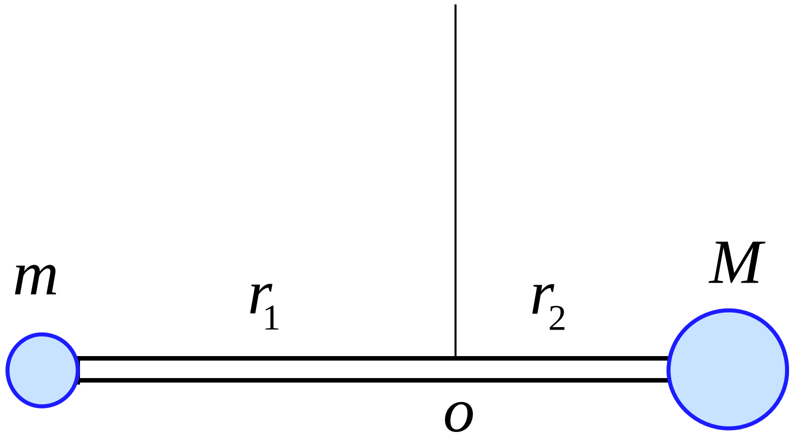
力のモーメント～例題

例題

軽い棒の両端に質量 m の物体と質量 M の物体が図のように取り付けられていて点 o で糸につるされている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒に作用する力を書き込め。
2. 棒の運動方程式を記述せよ。
3. 棒の回転の運動方程式を記述せよ。
4. 棒が回転しない条件 $\dfrac{r_1}{r_2}$ を求めよ。



力のモーメント～例題

例題

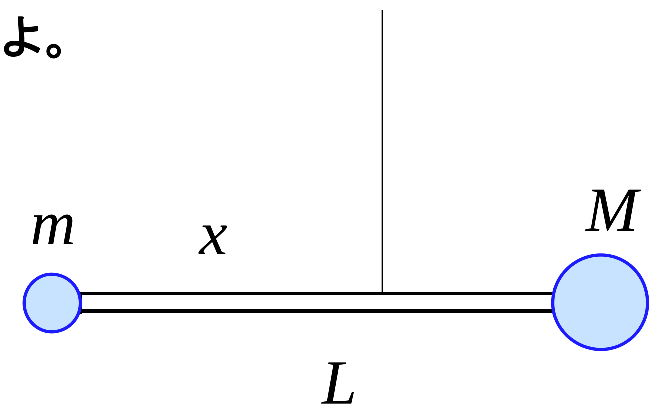
図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点が取り付けられ、糸でつるさている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。



2. 棒の質量が m の場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている

力 $\vec{F}$ の作用線が常にある任意の点 O を通る

中心力

$$\vec{F}(r) = \underbrace{F(r)}_{\text{力の大きさ}}\ \underbrace{\boxed{\frac{\vec{r}}{r}}}_{\text{力の向き}}$$

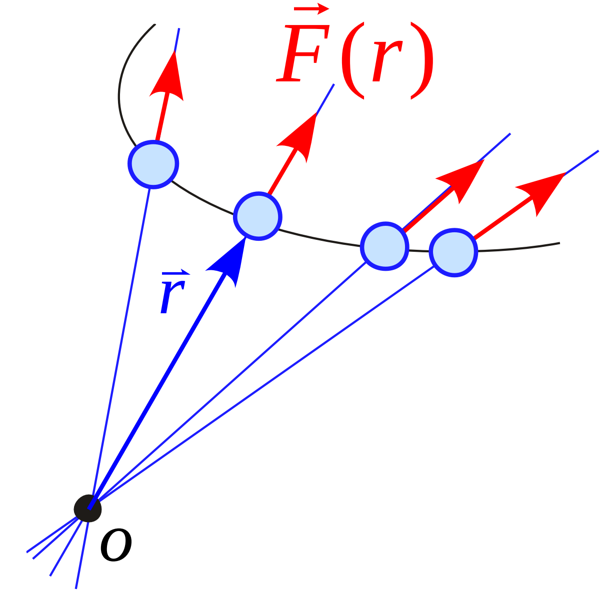
力の大きさ

力の向き

単位ベクトル

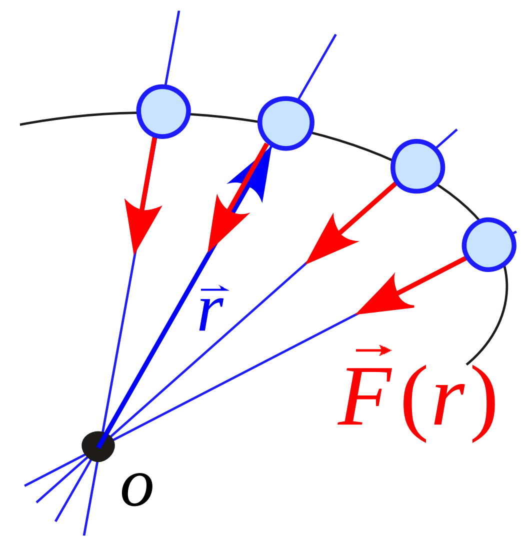
$F(r) > 0$

(斥力)



$F(r) < 0$

(引力)



中心力～角運動量保存

角運動量の変化を計算すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)$$

$$= m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= 0 + \vec{r} \times \boxed{F(r)\frac{\vec{r}}{r}}$$

中心力

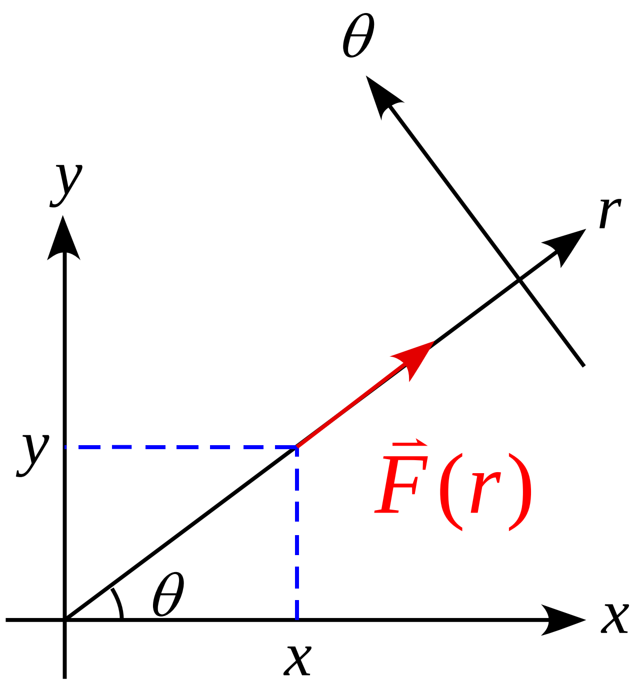
$$= 0$$

従って、中心力が働く運動では角運動量が保存する

中心力～運動方程式

運動方程式から考えるとする

極座標表示を使用する



中心力は

r 方向 $F_r = F(r)$

θ 方向 $F_\theta = 0$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、a_r, a_θ は

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$$

$$a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表されるので、

中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F(r)$$

動径方向の運動方程式

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

と表される

中心力～運動方程式

ここで、θ方向の式が何を示しているか検討してみよう

変位は

$$x(t) = r\cos\theta$$

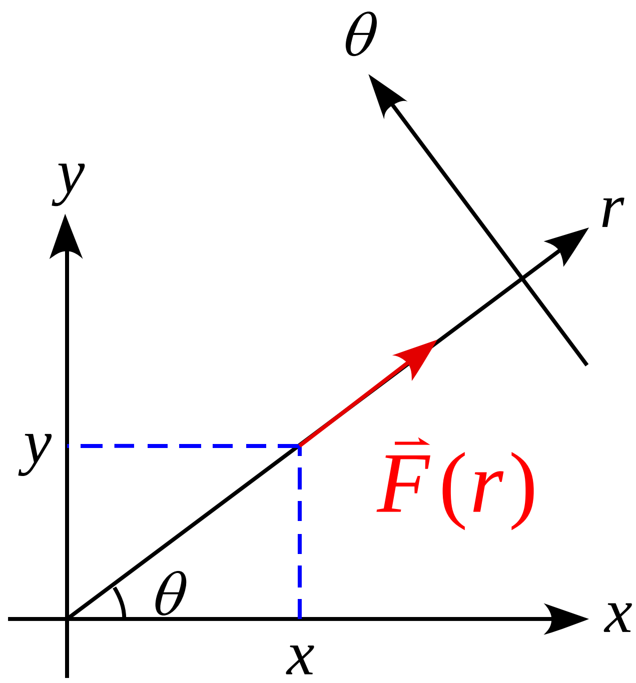
$$y(t) = r\sin\theta$$

である。
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 L は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

中心力～運動方程式

ここで、角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - r_x \cdot 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix}$$

と表される

$$\boxed{\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}}$$

中心力～運動方程式

従って、z 成分だけ考えればよく

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

$$= r\cos\theta\cdot m\left[\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] - r\sin\theta\cdot m\left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= rm\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - rm\frac{dr}{dt}\sin\theta\cos\theta + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}$$

と表される

中心力～運動方程式

従って、θ方向の式において

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{dL}{dt}=0$$

となる

即ち、

$$ma_\theta=0$$

は角運動量保存則を表している

角運動量～例題

例題

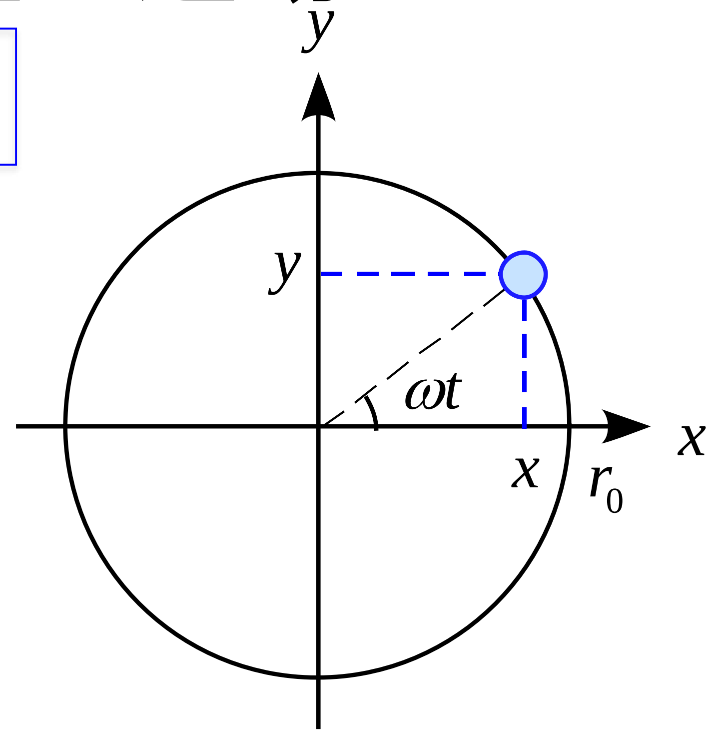
質量 m の質点が xy 平面で半径 r_0 の円運動をしている。
$t=0$ で $(x,y)=(r_0,0)$ にあり、反時計まわりに角速度 ω で回転するとする。

1. 運動量 $\vec{p}=(p_x,p_y)$ を求めよ。

2. この運動における質点の角運動量 $\vec{L}$ を求めよ。

円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動



ある時刻　t での位置は

$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt}\left[r_0 \cos \omega t\right] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left[r_0 \sin \omega t\right] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。

円運動～等速円運動

従って、

$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(-r_0\omega\sin\omega t\right)^2+\left(r_0\omega\cos\omega t\right)^2}$$

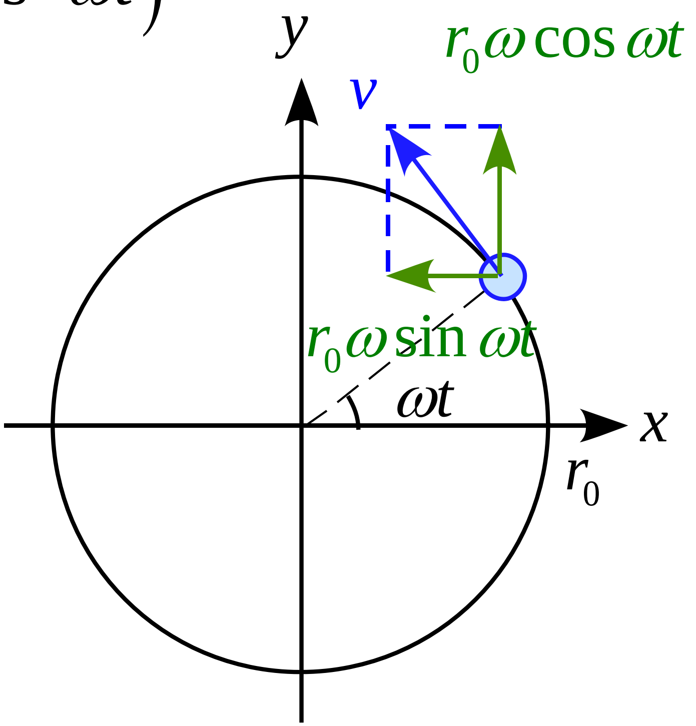
$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\sin^2\omega t+{r_0}^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)}$$

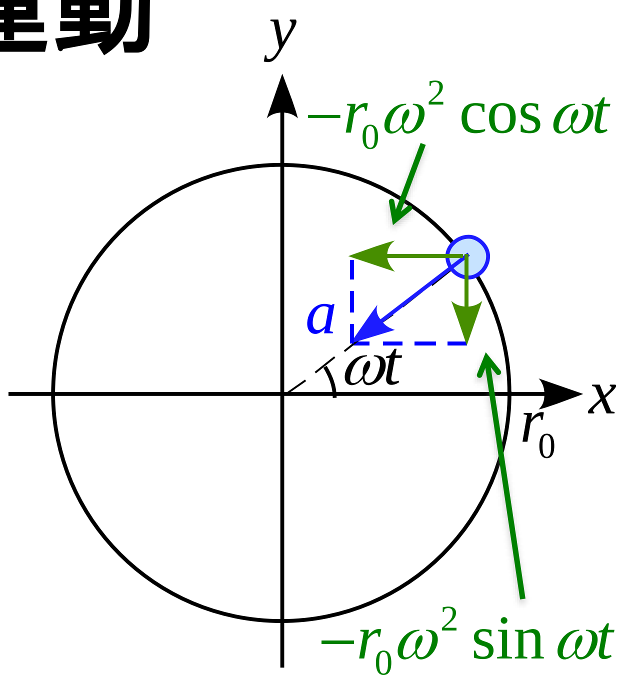
$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2}$$

$$=r_0\omega$$

となる。



円運動～等速円運動



加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}\left[-r_0\omega\sin\omega t\right] = -r_0\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}\left[r_0\omega\cos\omega t\right] = -r_0\omega^2\sin\omega t$$

と表される。

$$a = \sqrt{{a_x}^2 + {a_y}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega^2\cos\omega t\right)^2 + \left(-r_0\omega^2\sin\omega t\right)^2}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4\cos^2\omega t + {r_0}^2\omega^4\sin^2\omega t}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)}$$

$$= \sqrt{{r_0}^2\omega^4} = r_0\omega^2$$

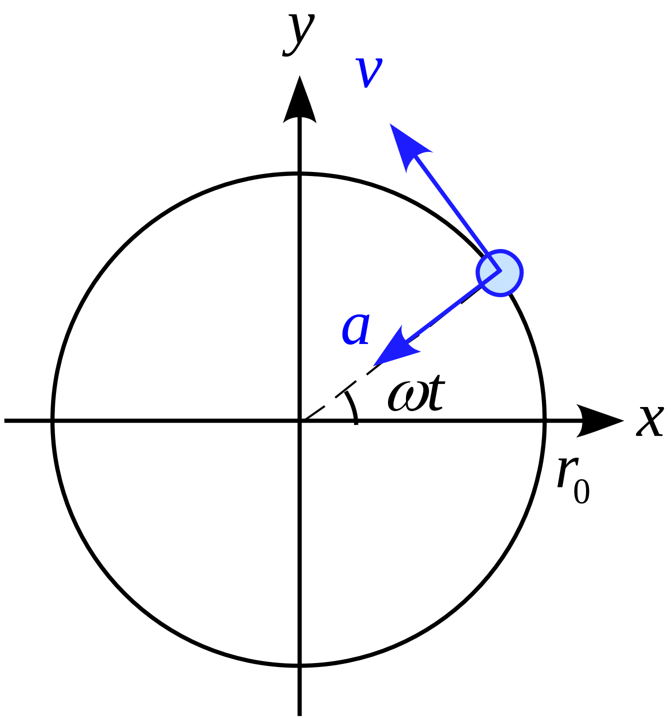
となる。

円運動～等速円運動

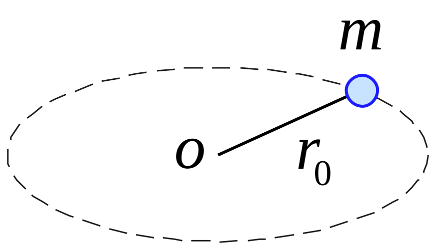
等速円運動　$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ **(一定)**

$$v = r_0 \omega$$

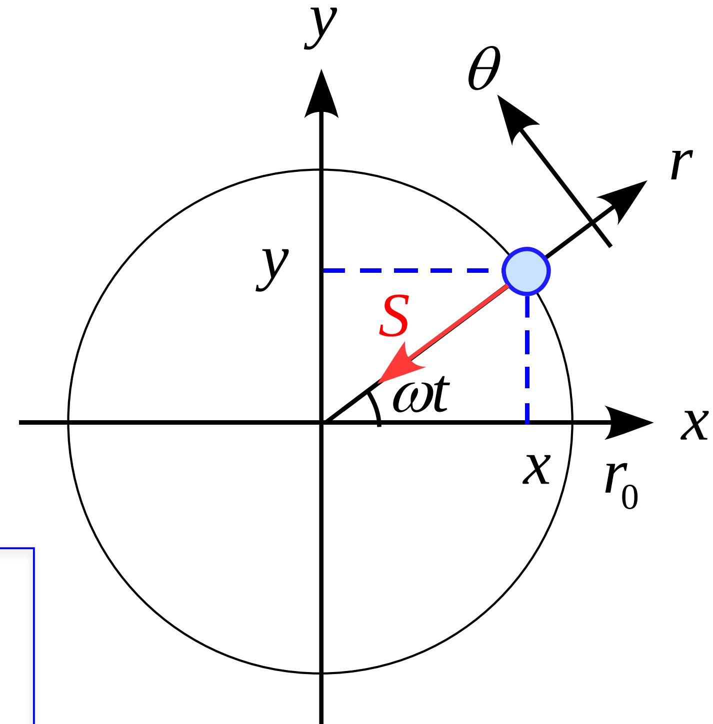
$$a = r_0 \omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



円運動～運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$

a_r, a_θ に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right] = -S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right] = 0$$

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定) なので $\dfrac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = S$$

$$mr_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

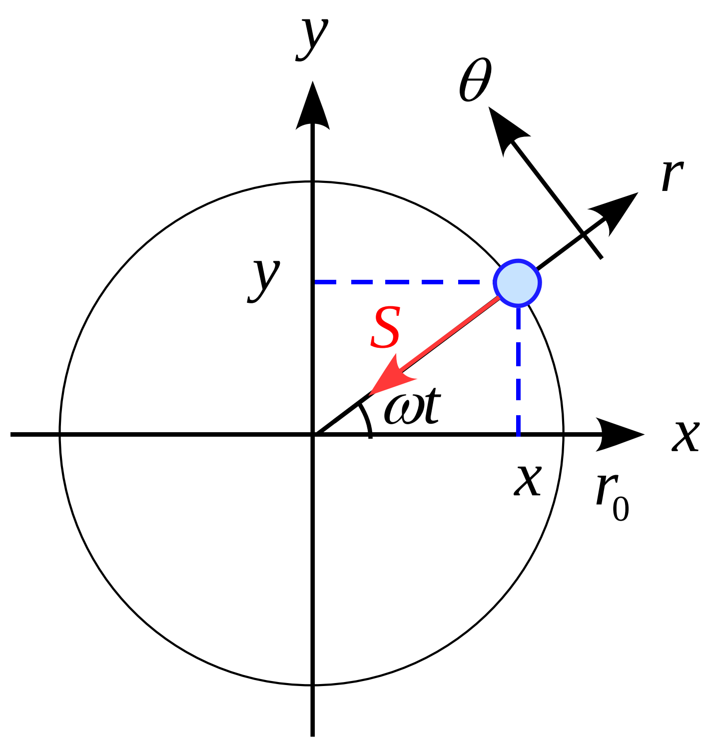
角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

とすると、

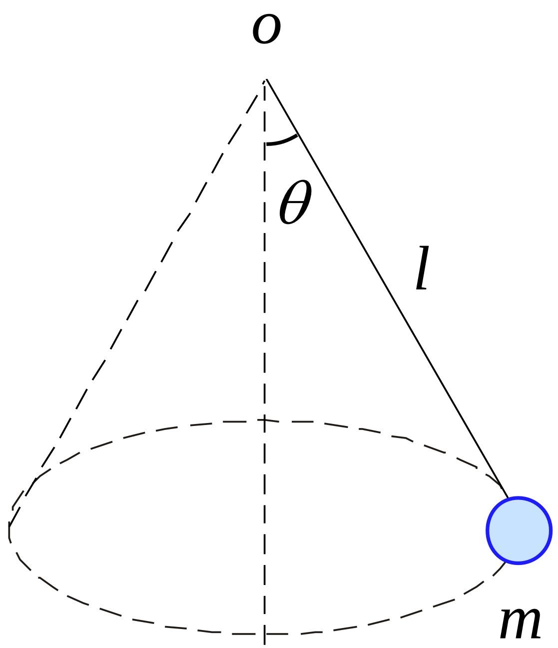
$$\boxed{mr_0\omega^2} = S$$

$$ma = S$$

中心方向に加速度があると考えられる



円運動～例題



例題

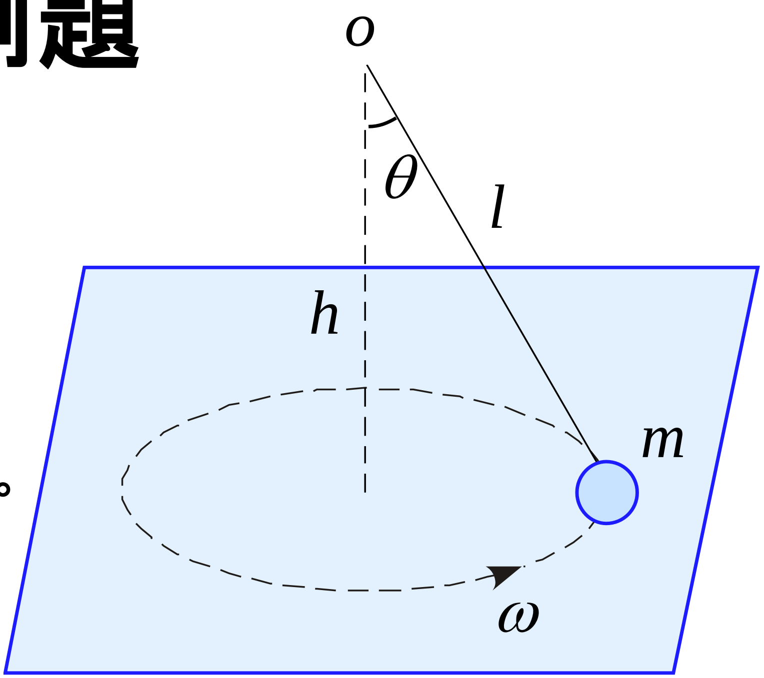
図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問いに答えよ。

1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。
2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表すことができる。
糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面上で角速度 ω の円運動している。
糸は水平面から高さ h の地点に設置されている。
水平面は滑らかで摩擦は無視できるとする。
以下の問いに答えよ。

1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3. 糸の張力 S 、水平面からの垂直抗力 N を求めよ。

4. 角速度 ω が ω_0 を超えると水平面から離れる。ω_0 を求めよ。

円運動～例題

例題

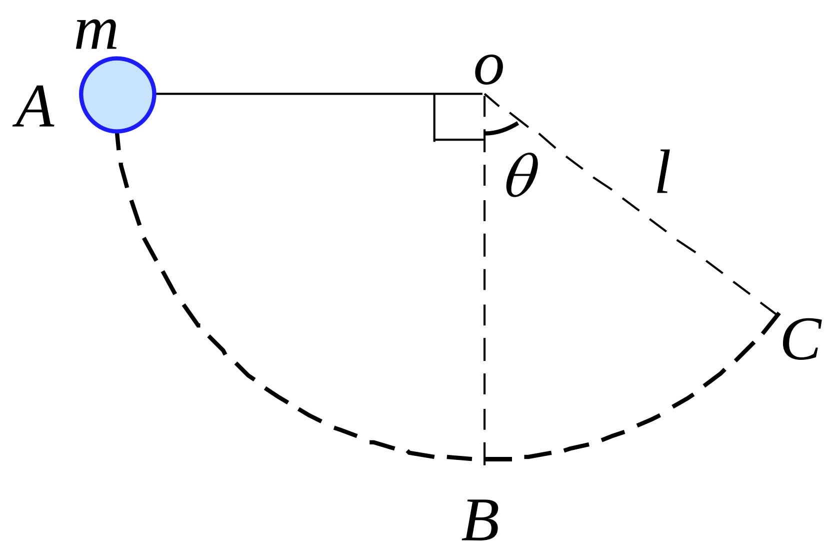
図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

以下の問いに答えよ。

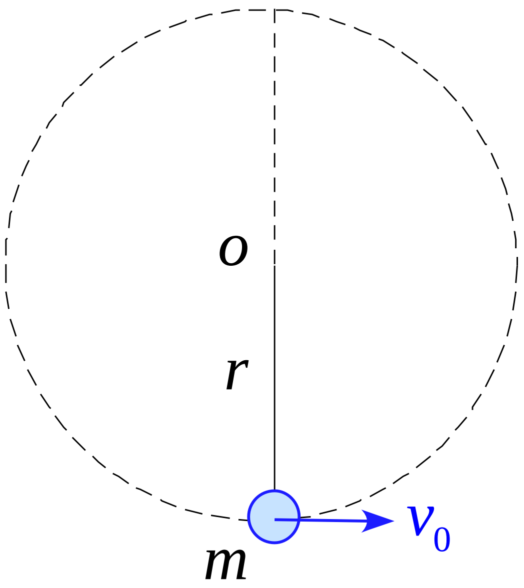


1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 最下点 B での糸の張力 T_B を求めよ。

3. 点 C での糸の張力 T_C を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは r 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

最下点で初速 v_0 を与えたとき

以下の問いに答えよ。

1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 物体が1回転するために必要な初速 v_0 の条件を求めよ。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

x で積分

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

左側から $\vec{r}$ で外積

t で積分

モーメントと角運動量の関係

力積と運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\vec{r} \times \vec{p}}\right) = \boxed{\vec{r} \times \vec{F}}$$

角運動量

モーメント

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- 問題文で指定されている場合はそれを利用する
- 指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- 一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
- 直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力

の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける

$$m\frac{dv}{dt}=F \quad \Rightarrow \quad v= \bigcirc \quad \Rightarrow \quad x= \bigcirc$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$$

t で積分　　t で積分

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

解くことが困難

どの物理量の関係が必要か検討する

t で積分

x で積分

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2^{\ 2}-\frac{1}{2}mv_1^{\ 2}=\int_{x_1}^{x_2}F\,dx$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B-\vec{p}_A=\int\vec{F}dt$$

力学の講義を終えて

取り扱った内容

- 加速度 / 速度 / 変位
- 万有引力の法則
- ニュートンの運動の法則
- 仕事とエネルギー
- エネルギー保存則
- 運動量と力積
- 運動量保存則
- 力のモーメント
- 角運動量
- 角運動量保存則
- 円運動

取り扱っていない内容

- 単振動 / 単振り子
- ケプラーの法則
- 剛体の運動
- 慣性モーメント