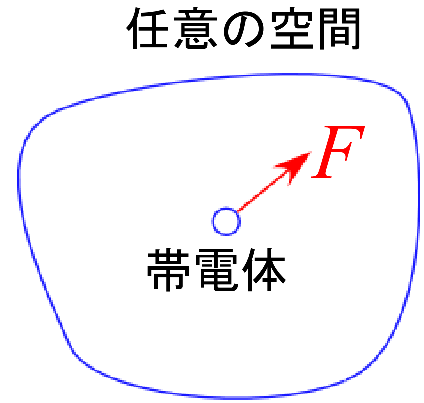
電場(電界)

ある任意の空間に、帯電体を持ってくる
この帯電体にクーロン力(静電気力)が働く状態であれば、
「この空間に電場(電界)が存在する」



電場の有無は電荷を持ってくれば判別できる

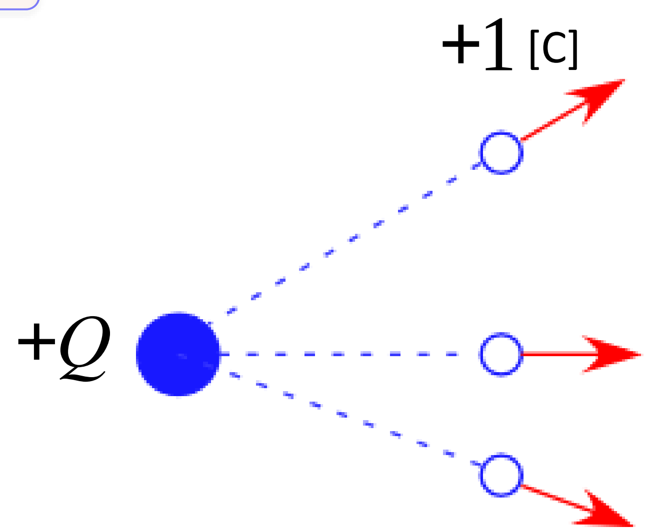
電場があるかどうか試しに、
試験電荷 $+1$ [C] を置いてみる

単位正電荷

ある空間に $+Q$ [C] 電荷があるとする

すると、$+Q$ [C] の電荷による斥力が働く

つまり、この試験電荷にクーロン力が
働いているのでこの空間には「電場」が
存在していることになる



考え方を変えると

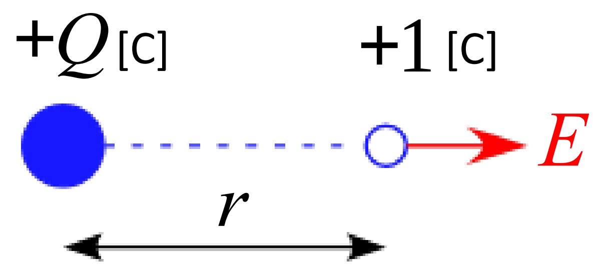
$+Q$ [C] の電荷の存在によって空間が変化し力を受ける

電場(電界)

試験電荷1個に着目して

クーロン力を考えると

$$F = k\frac{Qq}{r^2} = k\frac{Q\cdot 1}{r^2} = \boxed{k\frac{Q}{r^2}}$$



この F は $+1$ [C] 当たりのクーロン力と考えられ、

これが電場 E である

任意の $+q$ [C] 電荷を持ってくれば

$$\boxed{F = qE}$$

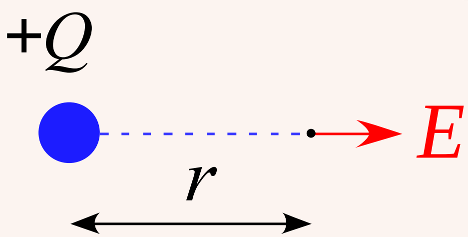
となり、クーロン力と同じになります。

電場(電界)

定義

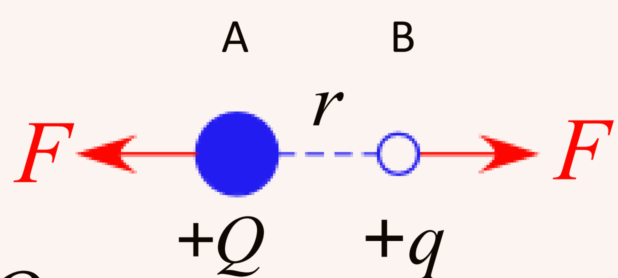
電場は $+1$ [C] に働く力で定義される

点電荷 $+Q$[C] から r [m] だけ離れた電場 E の大きさは



$$E = k\frac{Q}{r^2} \quad [\mathrm{N/C}]$$

クーロンの法則



$$F = k\frac{Qq}{r^2} \quad [\mathrm{N}]$$

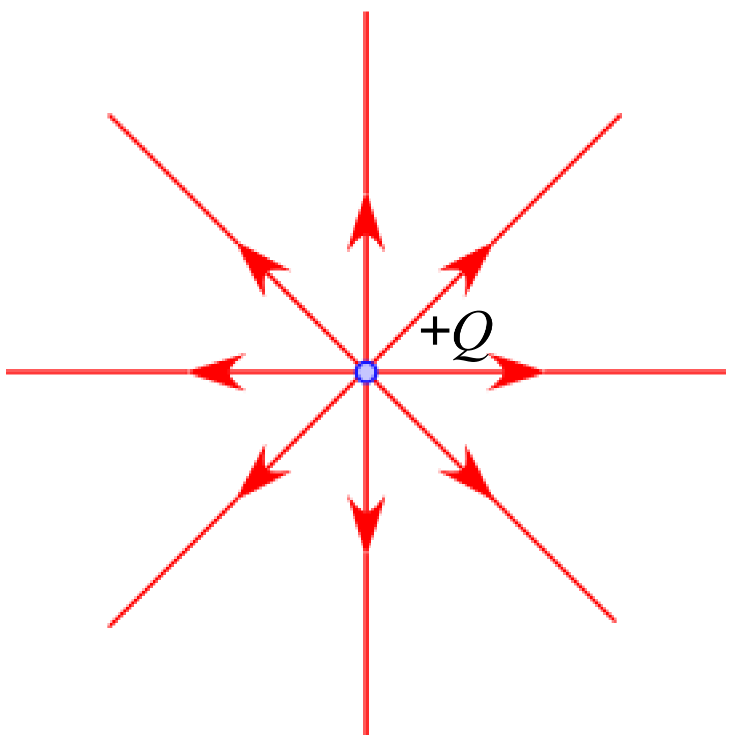
電場～電気力線

電気力線
電場の様子を視覚的に表す方法

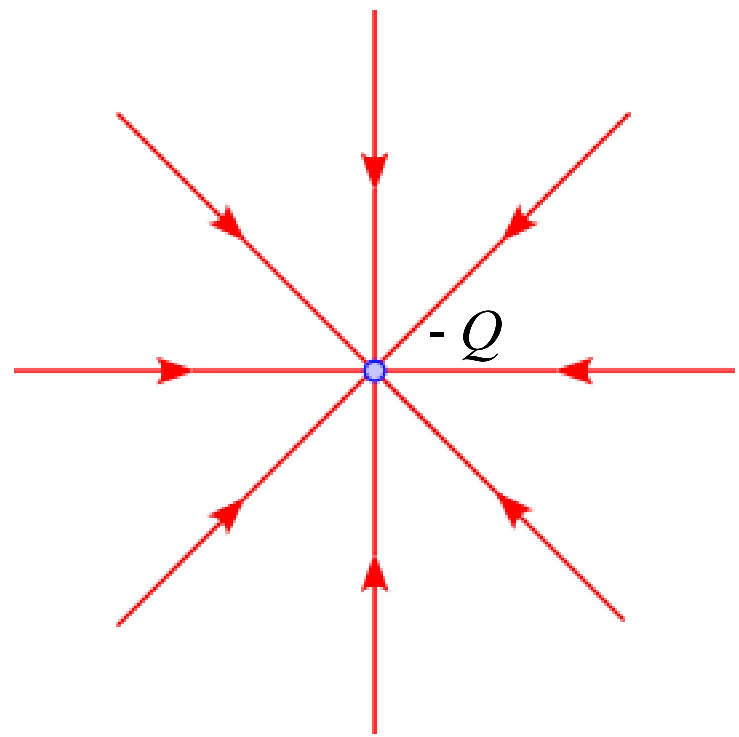
試験電荷が静電気力を受けて移動する道筋

$+Q$ の電荷の存在によって空間が変化する

点電荷 $+Q$[C] が存在

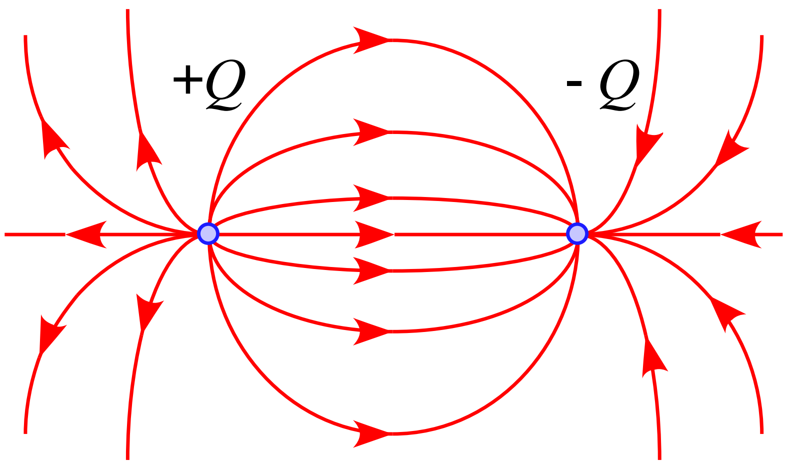


点電荷 - Q[C] が存在

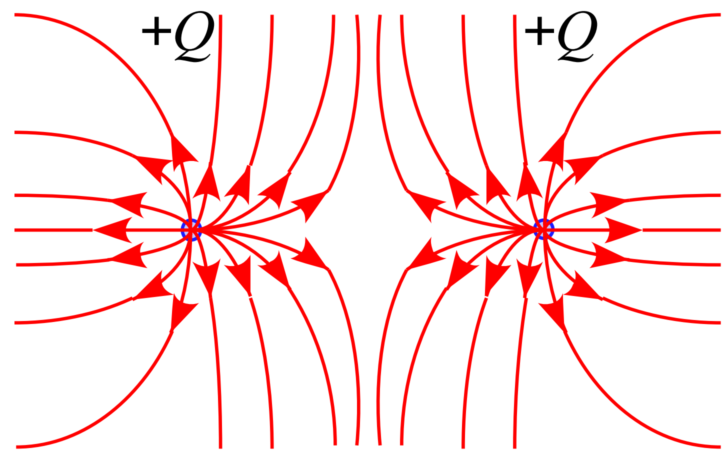


電場～電気力線

点電荷 $+Q$[C] と - Q[C] が存在



点電荷 $+Q$[C] と $+Q$[C] が存在



電気力線の性質

- 電気力線は正電荷から始まり、負電荷で終了する (途中で消えない)
- 電荷が1個しかない場合は、無限遠方まで続いている
- 電気力線の各点の接線は、その点の電場の向きを示している
- 電気力線の密集地では、電場の大きさが大きい
- 電気力線自体は短くなろうとする
- 電気力線は交差しない

電場～静電エネルギー

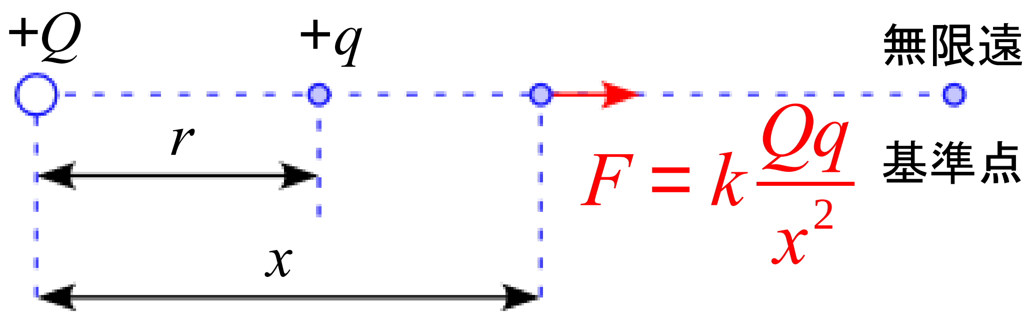
電場中の電荷には静電気力(クーロン力)が働く

静電気力による位置エネルギー → 静電エネルギー

点電荷 Q から距離 r の位置にある点電荷 q がもつ静電エネルギー

$$U = k\frac{Qq}{r} \quad [\mathrm{J}]$$

但し、U の基準は $U = 0$ となる無限遠方 $\left(r = \infty\right)$ である



無限遠からクーロン力に逆らって移動させる

静電エネルギー～電位

電位
試験電荷 $+1$ [C] がもつ静電エネルギー

単位電荷当たりの位置エネルギー

即ち、
静電エネルギー U 、着目している電荷 $+q$ とすると
電位 V は

$$V = \frac{U}{q}$$

$+1$ [C] の電荷を、静電気力に逆らって
基準点から考えている点まで運ぶのに要する仕事

となる

$+1$ [C] の電荷に 1 [J] の仕事をして、基準点からある場所まで移動させたとき、
そのある場所の電位を 1 [V] とする。

静電エネルギー～電位

点電荷の場合

$$V = \frac{U}{q} = k\frac{Qq}{r} \cdot \frac{1}{q} = k\frac{Q}{r}$$

となる

これは、無限遠を基準とした、

Q [C] の電荷から r [m] 離れた点での電位 V [V]を表している

電位～等電位面

等電位面
電位が等しい平面、曲面

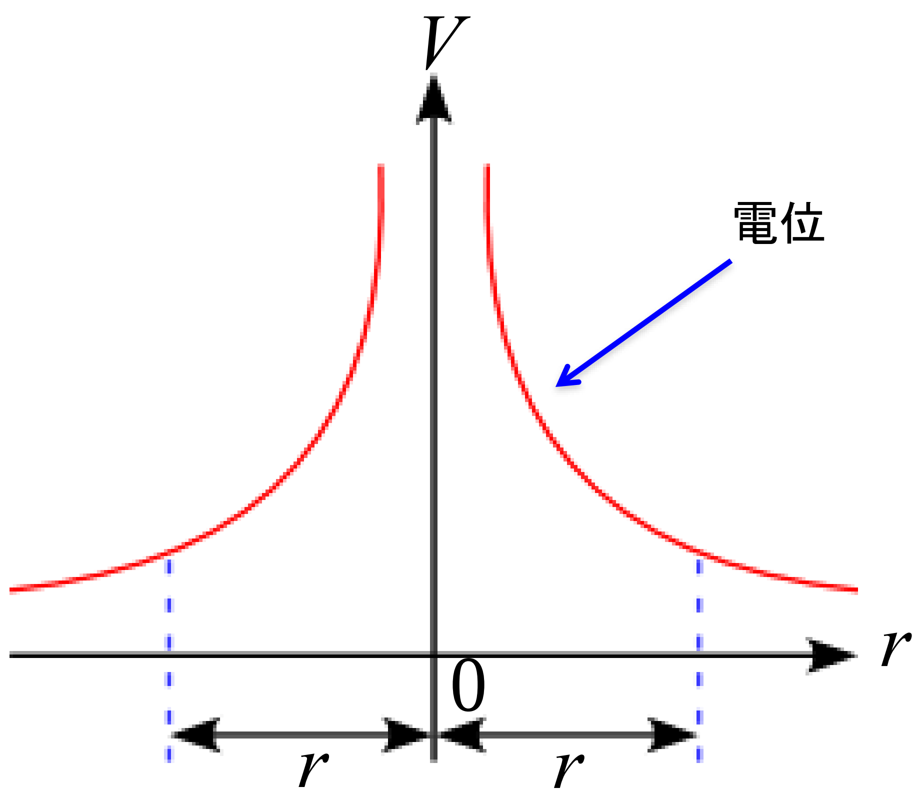
→ 単位電荷当たりの位置エネルギー

点電荷 $+Q$ が1つ存在しているとすると

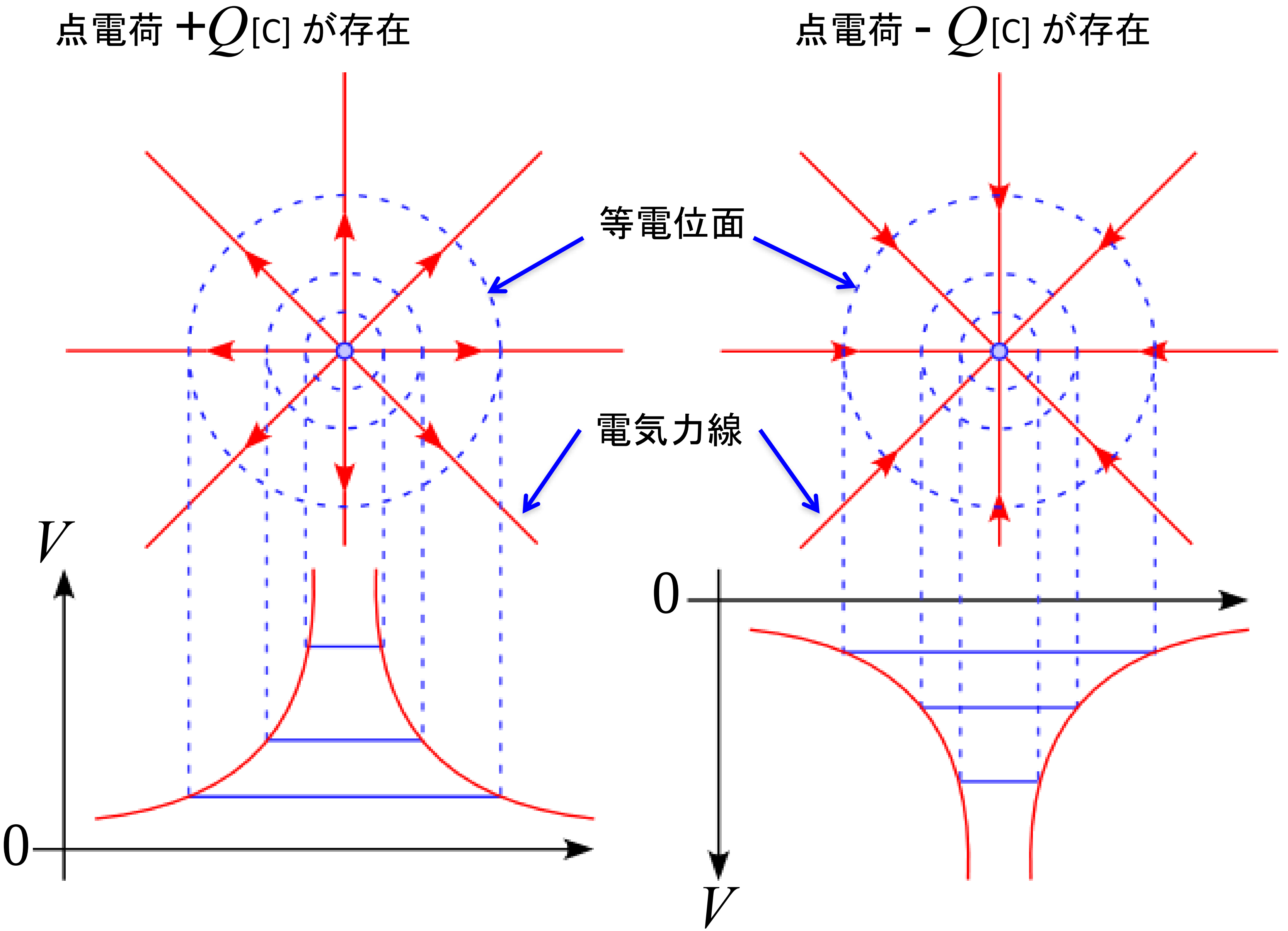
電位 V は

$$V = \frac{U}{q} = k\frac{Q}{r}$$

と表せる



電位～等電位面

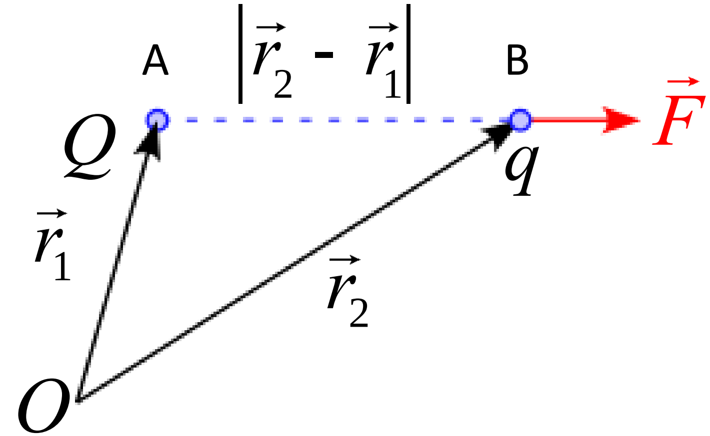


(参考) 190628-11

クーロン力～ベクトル

クーロン力のベクトル表示

図のように2つの点電荷があるとする



AB間の距離は

$$\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|$$

であるから、

クーロン力 $\vec{F}$ の向きを表す単位ベクトル $\vec{i}$ は

$$\vec{i} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

となるので

$$\vec{F} = k\frac{Qq}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

と表せる

(参考)

電場～ベクトル

電場 $\vec{E}$ は

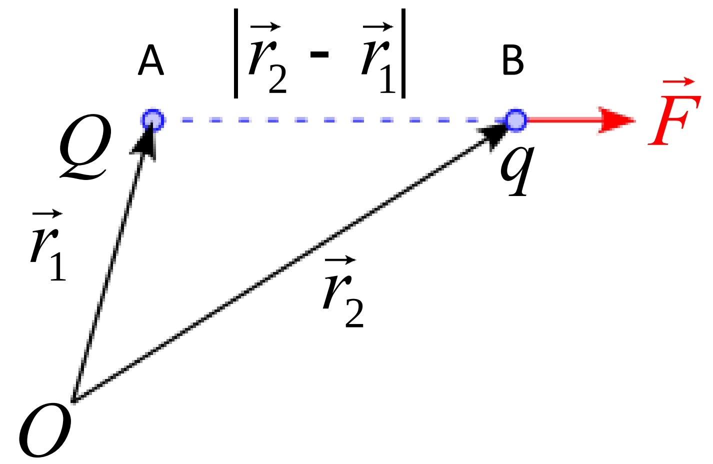
単位電荷に働くクーロン力なので

Aの点電荷Qが、Bの位置につくる電場は

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

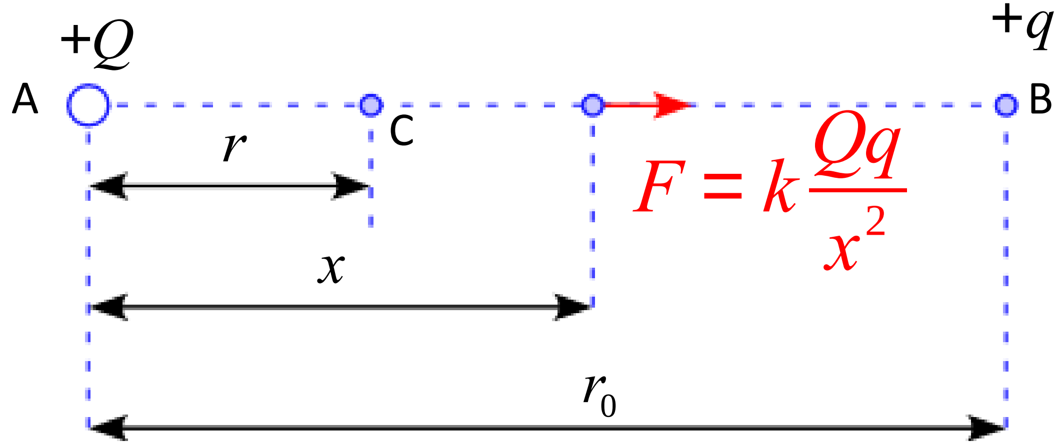
$$= k\frac{Q}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|^2} \cdot \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

と表せる



クーロン力～静電エネルギー

図において、点電荷 q をクーロン力に逆らってBからCまで運ぶのに必要な仕事を考える



Aから距離 x の地点の力は

$$F = k\frac{Qq}{x^2}$$

よって運動方程式は

$$ma = k\frac{Qq}{x^2} - f$$

$$m\frac{dv}{dt} = k\frac{Qq}{x^2} - f$$

両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int\left(k\frac{Qq}{x^2} - f\right)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int\left(k\frac{Qq}{x^2} - f\right)dx$$

クーロン力～静電エネルギー

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int k\frac{Qq}{x^2}dx + \int(-f)dx$$

$t=0$ で $x=r_0, v=0$

$t=t'$ で $x=r, v=0$

準静的過程

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \left[-k\frac{Qq}{x}\right]_{r_0}^{r} - \int_{r_0}^{r} f dx$$

$$0 = -kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) - \int_{r_0}^{r} f dx$$

$$kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) = -\int_{r_0}^{r} f dx$$

クーロン力～静電エネルギー

ここで、基準点Bを無限遠とすると

$$kQq\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{\infty}\right)=-\int_{r_0}^{r} f dx$$

$$k\frac{Qq}{r}=-\int_{r_0}^{r} f dx$$

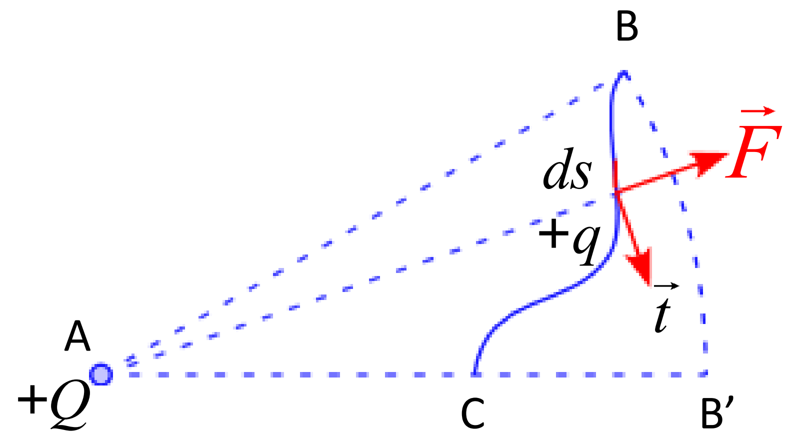
$$\boxed{U=W_{手}=k\frac{Qq}{r}}$$

となる

(参考)

クーロン力～静電エネルギー

A点の点電荷 Q がつくる電場の中を、B点から点電荷 q を任意の経路を経てC点まで運ぶ仕事を考える



短い区間 ds を移動するときに要する仕事は

$$dW = -\vec{F} \cdot ds\vec{t}$$

よって求める仕事は

$$W = -\int_{\mathrm{BC}} \left(\vec{F} \cdot \vec{t}\right) ds$$

$$= -q \int_{\mathrm{BC}} \left(\vec{E} \cdot \vec{t}\right) ds$$

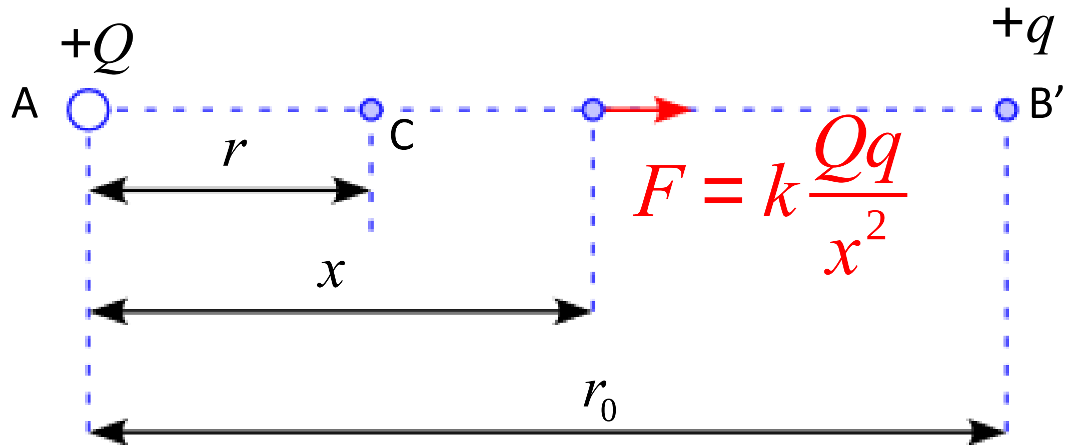
ここで、A点を中心とする半径ABの円を考え、ACの延長線上の点をB′とすると経路BB′は移動方向と力の向きが垂直なので仕事は 0 であるから

$$W = -q \int_{\mathrm{BC}} \left(\vec{E} \cdot \vec{t}\right) ds = -q \int_{\mathrm{B'C}} \left(\vec{E} \cdot \vec{t}\right) ds$$

となる

クーロン力～静電ポテンシャル

これは図の様に簡単に考えられるので
以前の計算と同様に



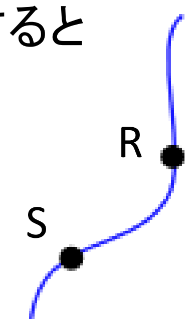
$$W_{手} = kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)$$

となる

電位の定義から電位 (静電ポテンシャル) を f とおくと

$$\phi = \frac{W}{q} = -\int_{BC}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds$$

ある任意の点R、点Sを考え、それぞれの静電ポテンシャルを f_R, f_S とすると
点Sに対する点Rの静電ポテンシャルは



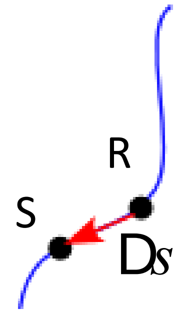
$$\phi_R - \phi_S = -\int_{RS}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds$$

となる

(参考)
クーロン力～静電ポテンシャル

ここで、RS間の距離が微小の場合

$$\phi_R - \phi_S = -\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)\Delta s$$



$$\boxed{\vec{E}\cdot\vec{t}} = -\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\phi_R - \phi_S}{\Delta s}$$

$\overrightarrow{RS}$方向の電場の成分

これを3次元空間に拡張すると

電場のx 成分は $\vec{E}\cdot\vec{i}$ となるので

$$\vec{E}(x,y,z)\cdot\vec{i} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\phi\left(x+\Delta x,y,z\right) - \phi\left(x,y,z\right)}{\Delta x}$$

$$= -\frac{\partial\phi\left(x,y,z\right)}{\partial x}$$

(参考)

クーロン力～静電ポテンシャル

同様に、電場のy,z 成分は $\vec{E}\cdot\vec{j},\vec{E}\cdot\vec{k}$ となるので

$$\vec{E}(x,y,z)\cdot\vec{j}=-\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial y}\quad \vec{E}(x,y,z)\cdot\vec{k}=-\frac{\partial\phi(x,y,z)}{\partial z}$$

よって

$$\vec{E}(x,y,z)=\left(-\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x},-\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y},-\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}\right)$$

従って、

$$E(\vec{r})=\left(-\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial x},-\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial y},-\frac{\partial f(\vec{r})}{\partial z}\right)$$

$$=-\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)f(\vec{r})=\boxed{-\nabla f(\vec{r})}$$

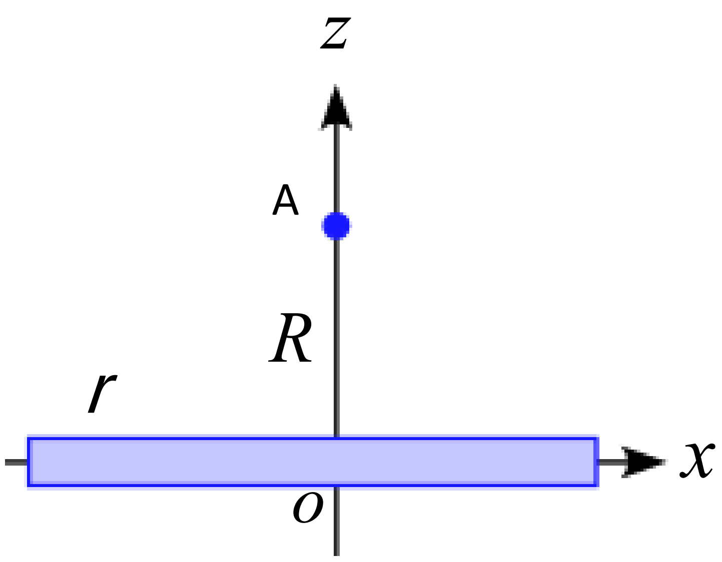
∇f
grad f
f の「勾配」

クーロンの法則～線電荷

単位長さあたりの電気量(線密度)が r である無限に長い直線上の電荷がある。

直線から距離 R にある点Aでの電場の大きさを求めよ。

但し、線の太さは無視できるものとする。



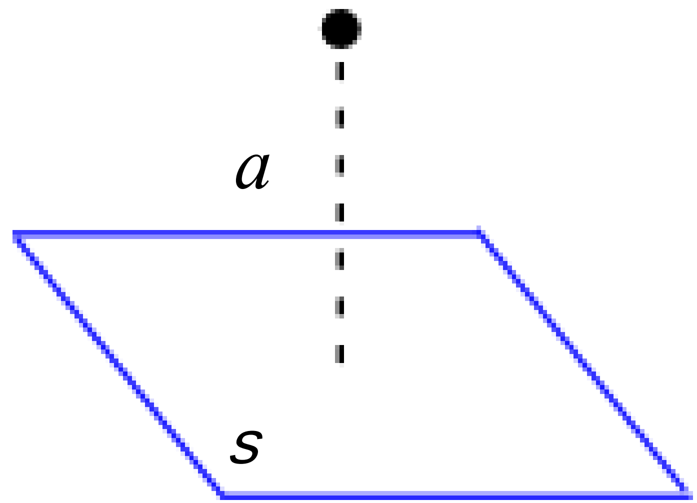
クーロンの法則～面電荷

無限に広い平面がある。

この平面上に面密度 s で一様に電荷が分布しているとする。

この平面から距離 a だけ離れた点での電場の大きさを求めよ。

但し、真空誘電率は e_0 とする。

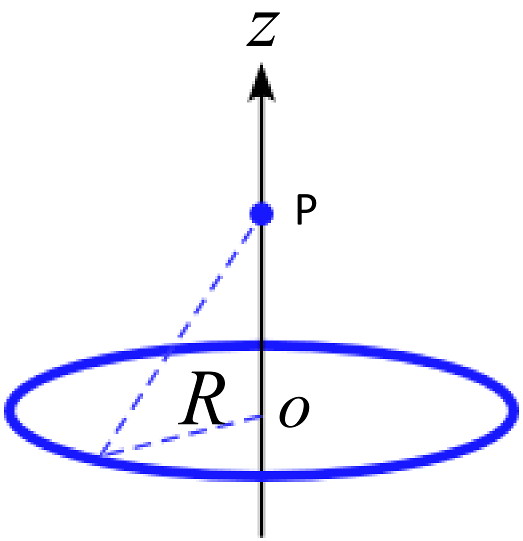


クーロンの法則～リング状電荷

図のような z 軸を中心軸にもつ半径 R のリング状の電荷がある。

単位長さあたりの電荷量(線密度)が r である場合、

z 軸上の点Pでの電場の大きさを求めよ。

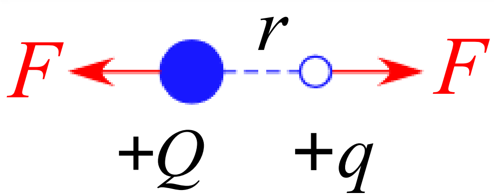


クーロンの法則～周辺のまとめ

クーロン力 (静電気力)

$$F = k\frac{Qq}{r^2}$$

$$\mathrm{N\cdot m^2/C^2}\ \frac{\mathrm{C^2}}{\mathrm{m^2}} = [\mathrm{N}]$$



$$\times\frac{1}{q}$$

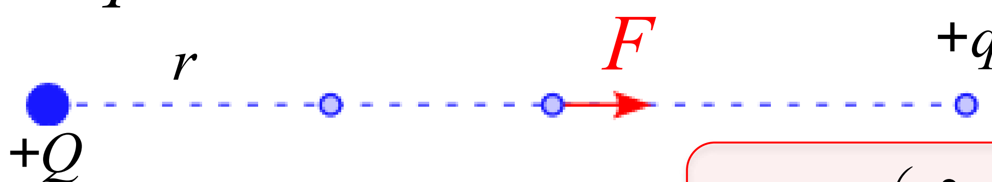
電場

＋1 [C] 当たりのクーロン力

$$E = \frac{F}{q} = k\frac{Qq}{r^2}\frac{1}{q} = k\frac{Q}{r^2}$$

$$\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}} = [\mathrm{N/C}]$$

仕事(力の距離積分)



$$E(\vec{r}) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) f(\vec{r}) = -\nabla f(\vec{r})$$

静電エネルギー

Fに逆らってする仕事

$$U = W = -\int F dx = -\int_{r_0}^{r} k\frac{Qq}{r^2}dx$$

$$= kQq\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right) \quad r_0 \to \infty \quad = k\frac{Qq}{r}$$

無限遠基準

$$\times\frac{1}{q}$$

電位 : V, f

+1 [C] 当たりの静電エネルギー

+1 [C] の電荷に1 [J] の仕事を1 [V]

$$V = \frac{U}{q} = k\frac{Qq}{r}\frac{1}{q} = k\frac{Q}{r}$$