

位置ベクトル

位置

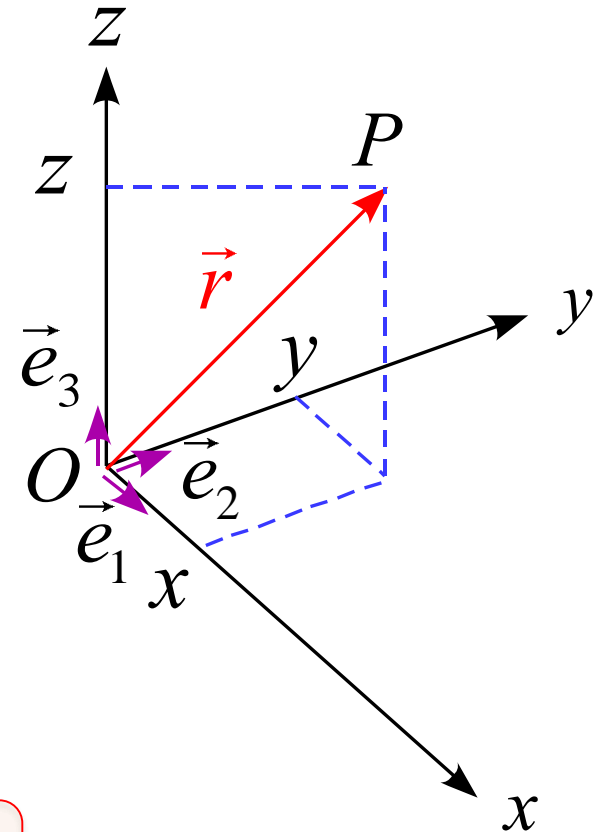
観測者 O に対する (O を始点とする)

物体 P の位置ベクトル

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

この座標系は、観測者 O に対する
相対座標系となる

3次元の運動を考えるときは
このベクトルが時刻 t の関数として追跡する



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$$

位置ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

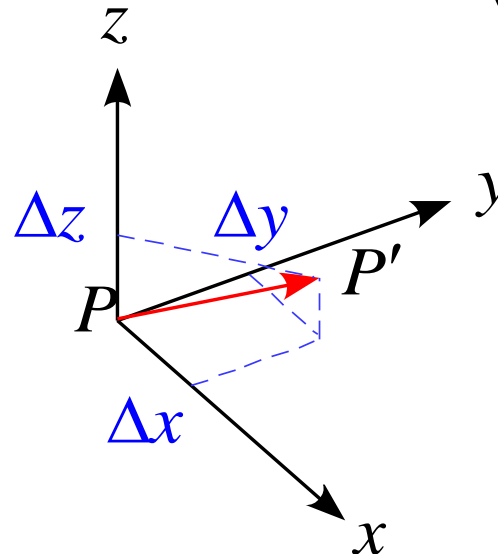
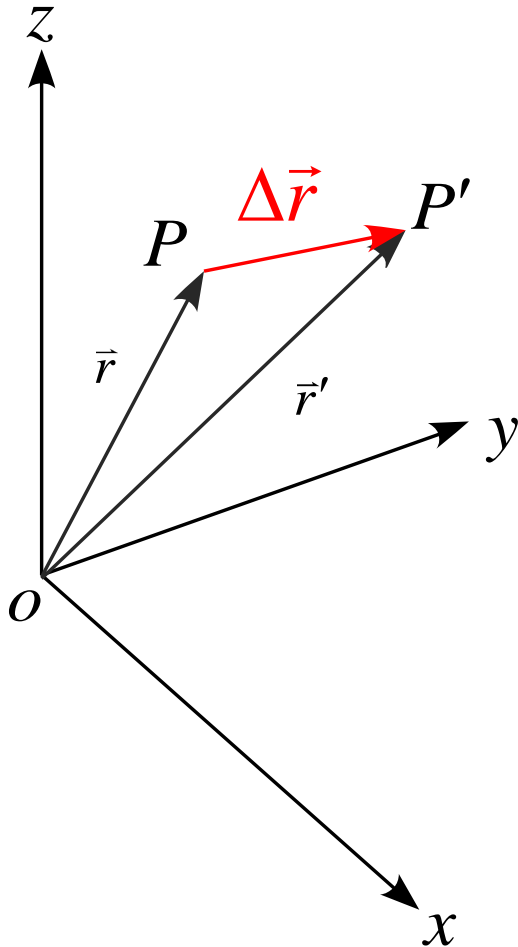
$$\vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

変位ベクトル

物体の移動

$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}' - \vec{r} \\ &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)\end{aligned}$$



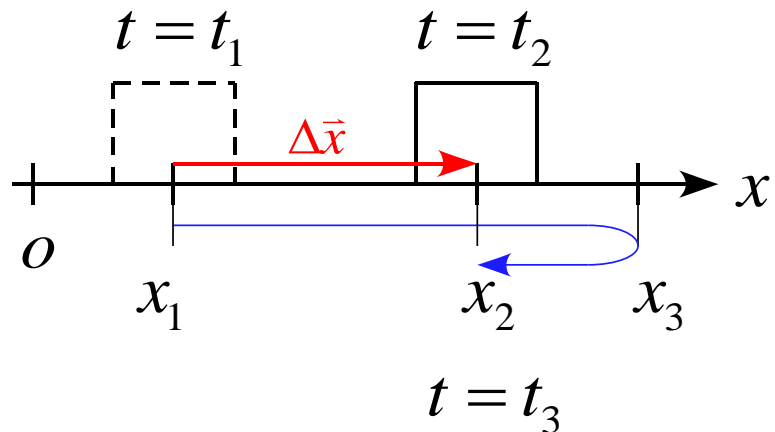
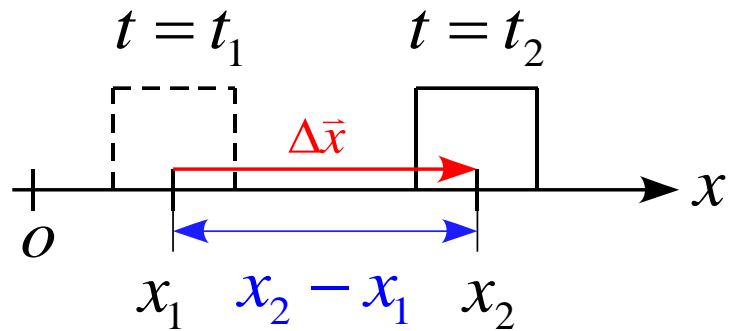
変位 $\Delta\vec{r}$... 移動した距離＋向き

距離 $|\Delta\vec{r}|$... 移動した距離

変位ベクトル

変位 $\Delta \vec{r}$... 移動した距離＋向き

距離 $|\Delta \vec{r}|$... 移動した距離



速度・加速度～速さ

物理では・・・時間変化が重要

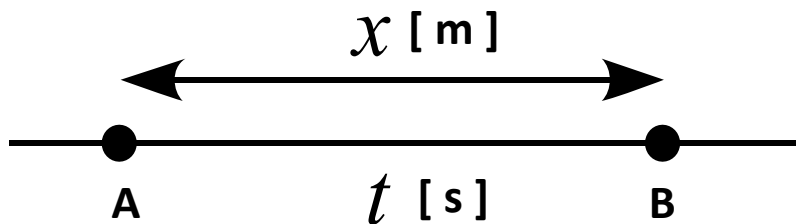
例えば

物が動く・・・

速さ、速度
加速度

が知りたい

平均の速さ: 目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか
「平均するとどの程度の速さです〜っと走り続けたのと同じか」

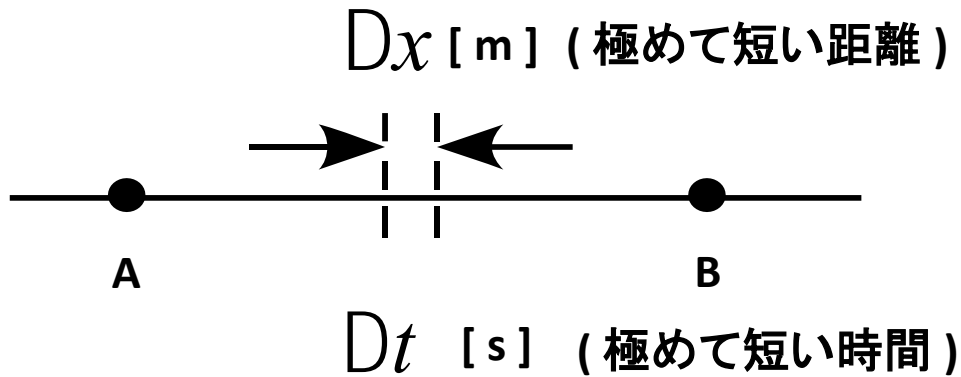


平均の速さ

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \quad [\text{m/s}]$$

速さ

瞬間の速さ : ある時点での「スピード」のこと



瞬間の速さ

$$v = \frac{Dx}{Dt} \quad [m/s]$$

速さ～速度

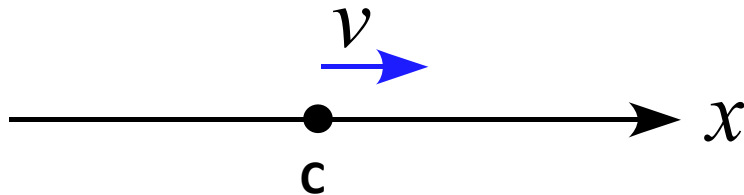
速度＝速さ＋向き ←ベクトル

物理学では
大きさも向きも大事

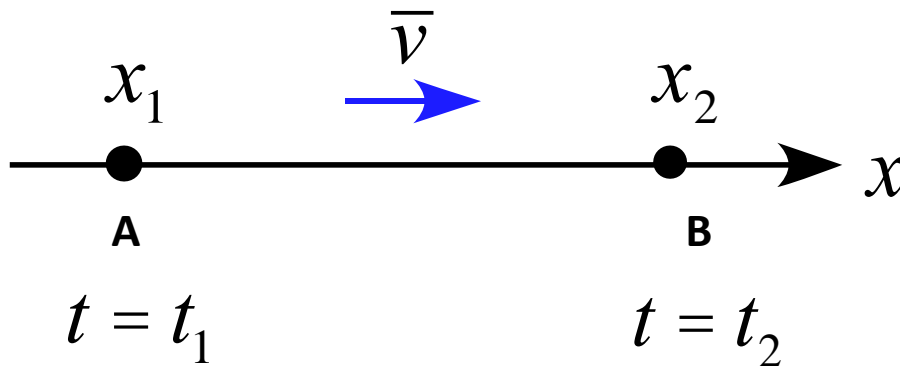
例

5 [m/s]の速さで走っている（どっち向きかわからない）

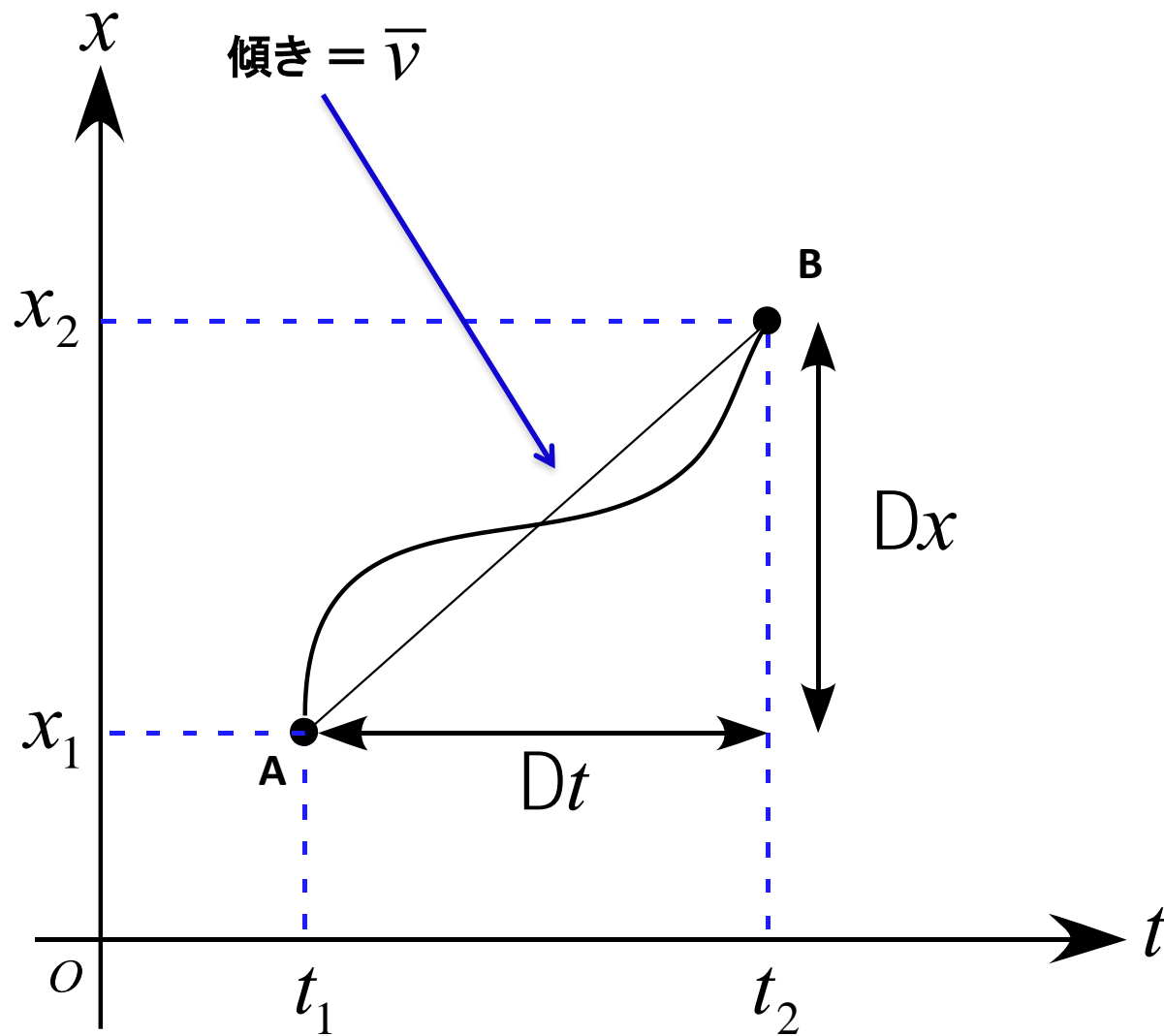
5 [m/s]の速度で走っている（ある特定の向きに走っている＝向きが決まっている）



平均速度：時間 t に対する変位 x の変化



質点の位置 - 時間の関係



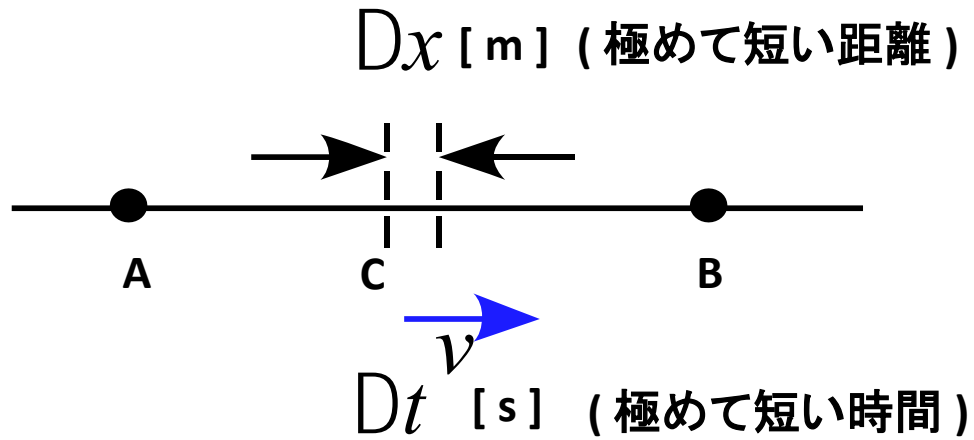
平均速度

平均速度

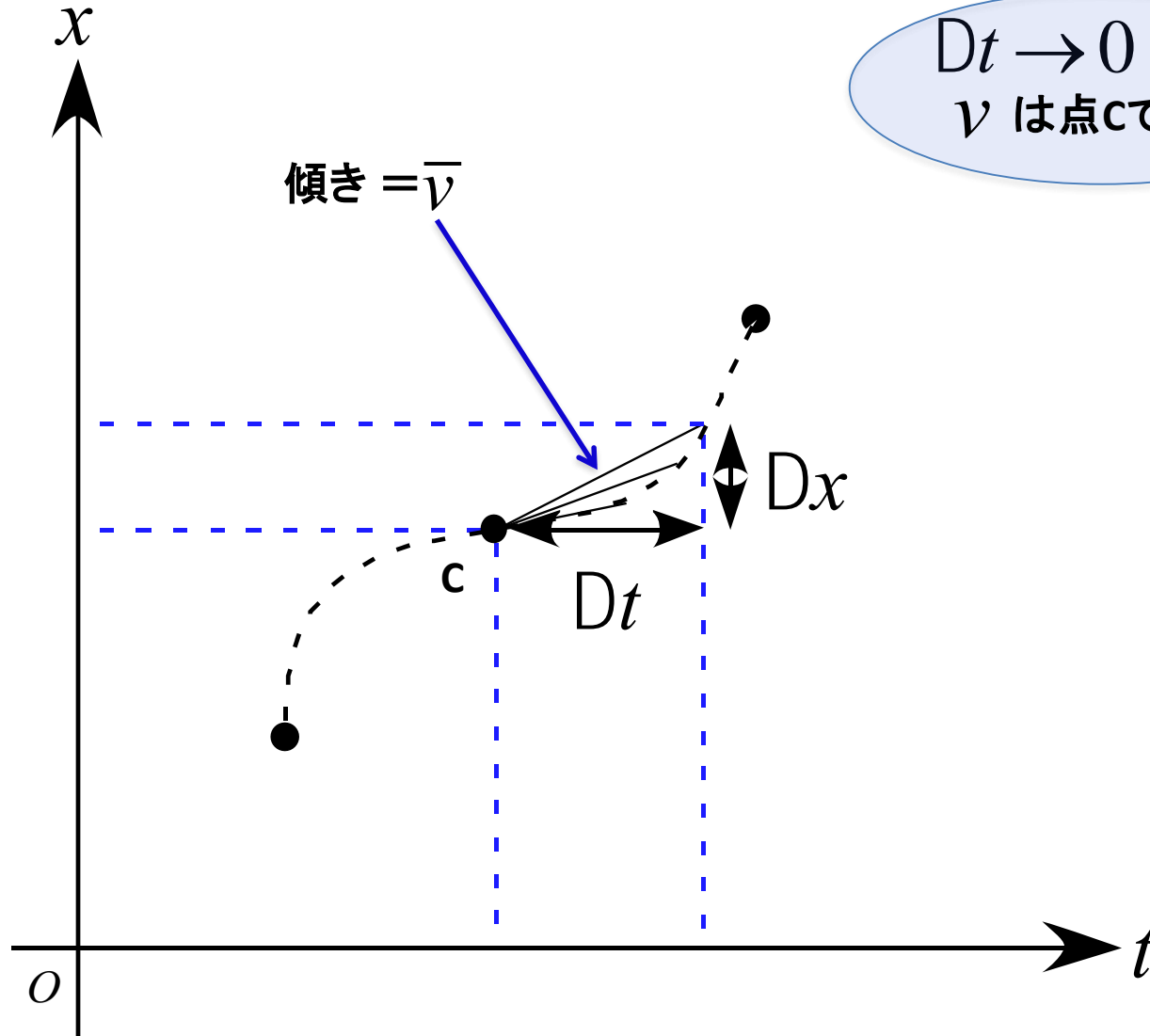
$$\bar{v} = \frac{Dx}{Dt} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

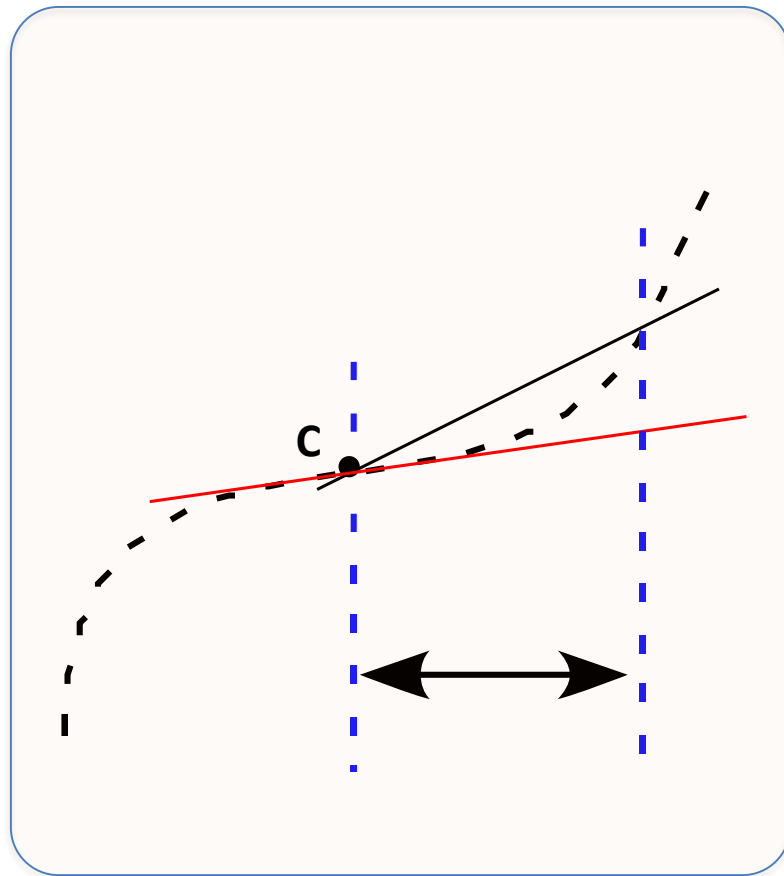
瞬間速度

瞬間速度

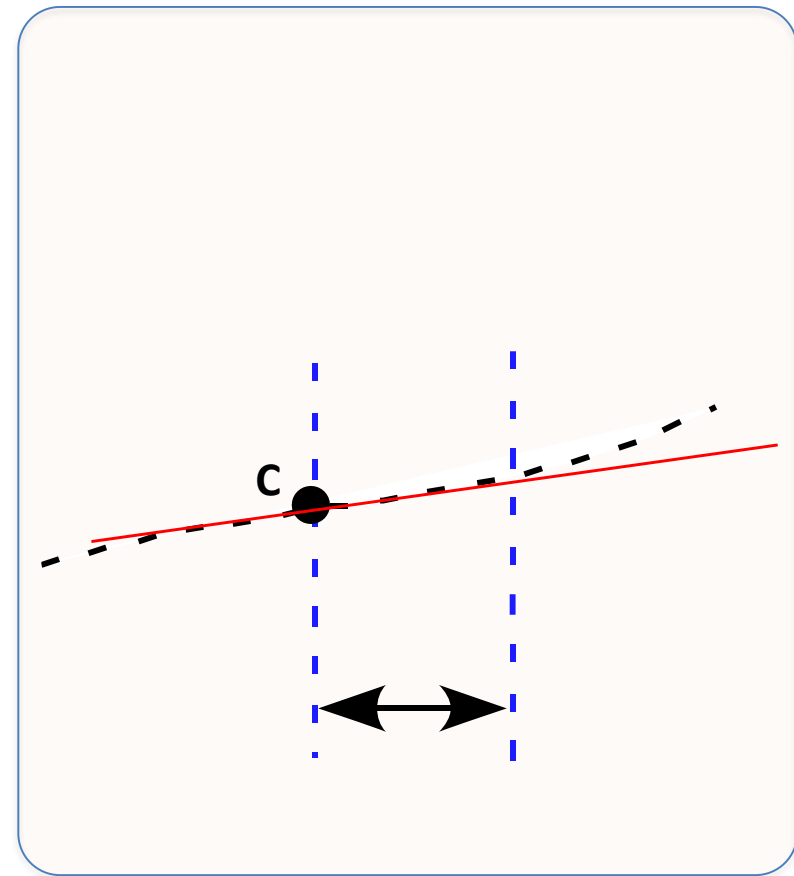


質点の位置 - 時間の関係





拡大



$Dt \rightarrow 0$ で
 ν は点Cでの接線

速度～瞬間速度

瞬間速度

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

変位

速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点が $t_1 = 1 \text{ s}$ のとき $x_1 = 14 \text{ m}$ の位置にあり、
 $t_2 = 3 \text{ s}$ のとき $x_2 = 4 \text{ m}$ の位置にある。

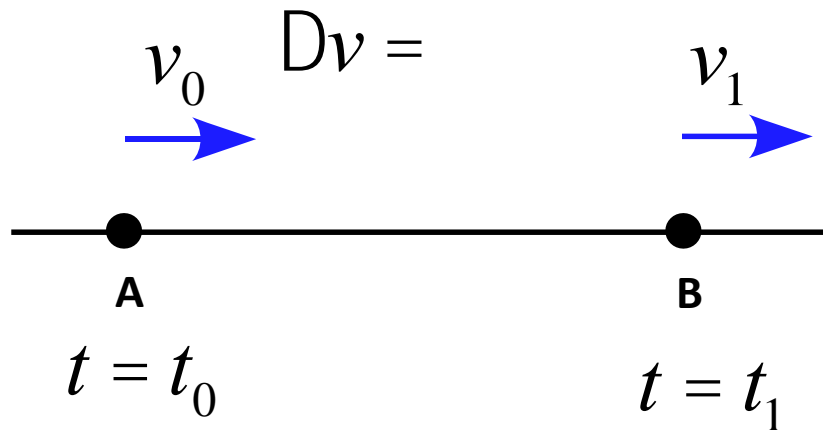
1. この運動における変位を求めよ。
2. この運動における平均速度を求めよ。

加速度

加速度：どれくらいの時間をかけて、どれくらい速度が変化するかの度合い

時間に対する速度変化率

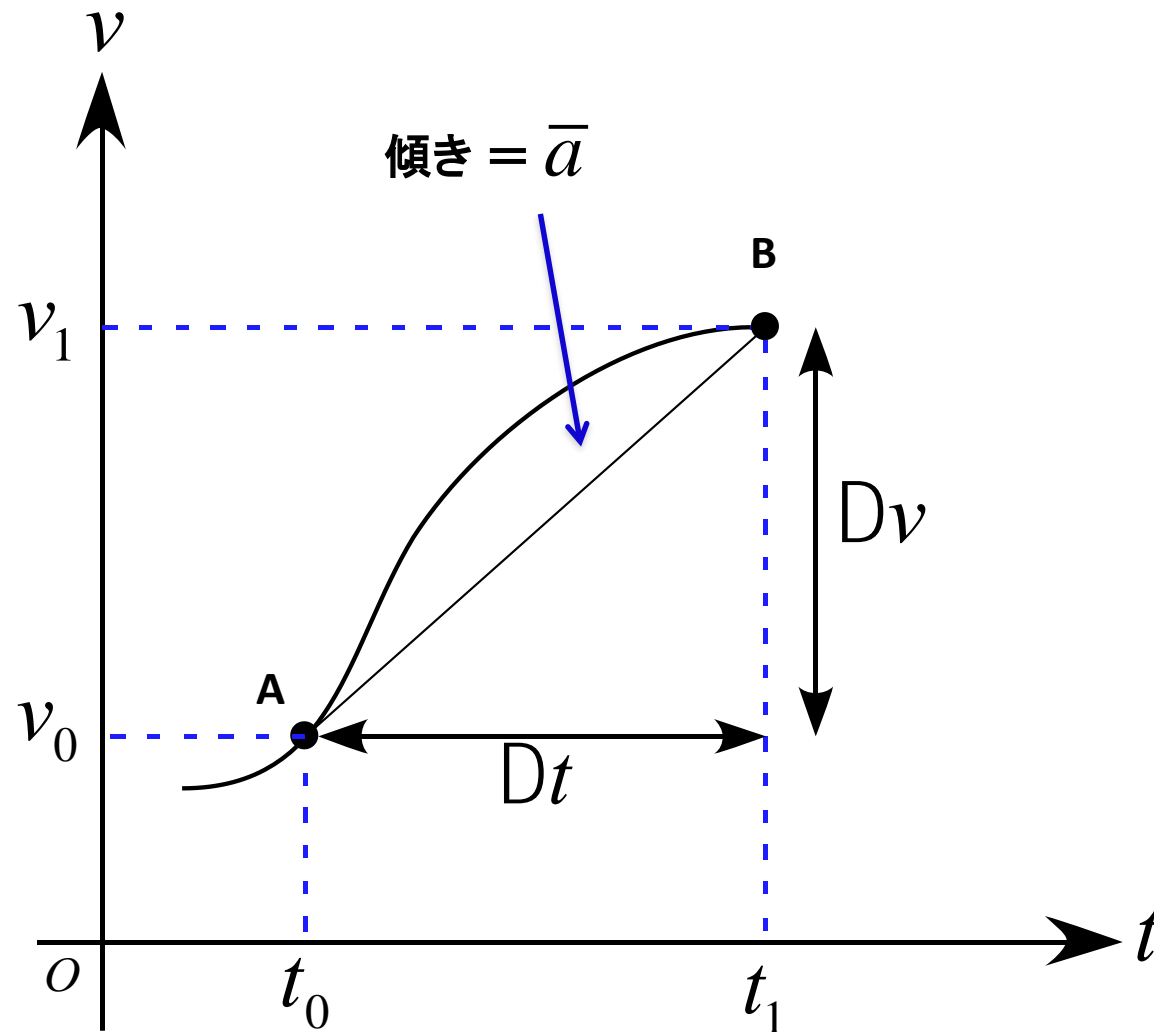
平均加速度



平均加速度

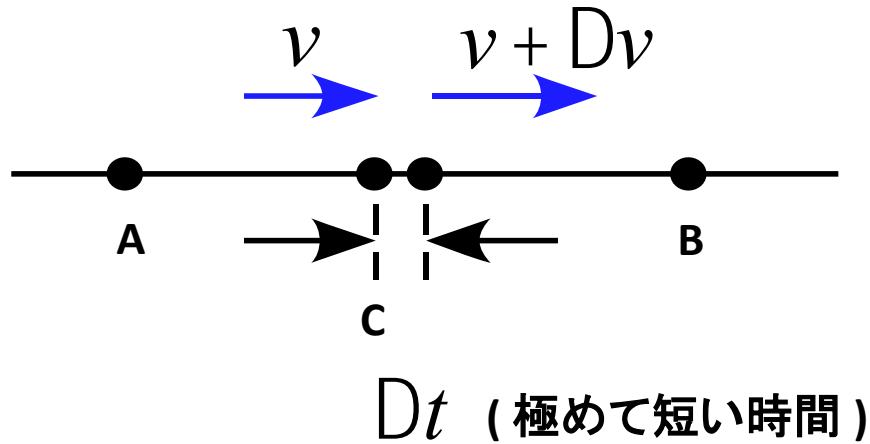
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{Dv}{Dt}$$

質点の速度 - 時間の関係

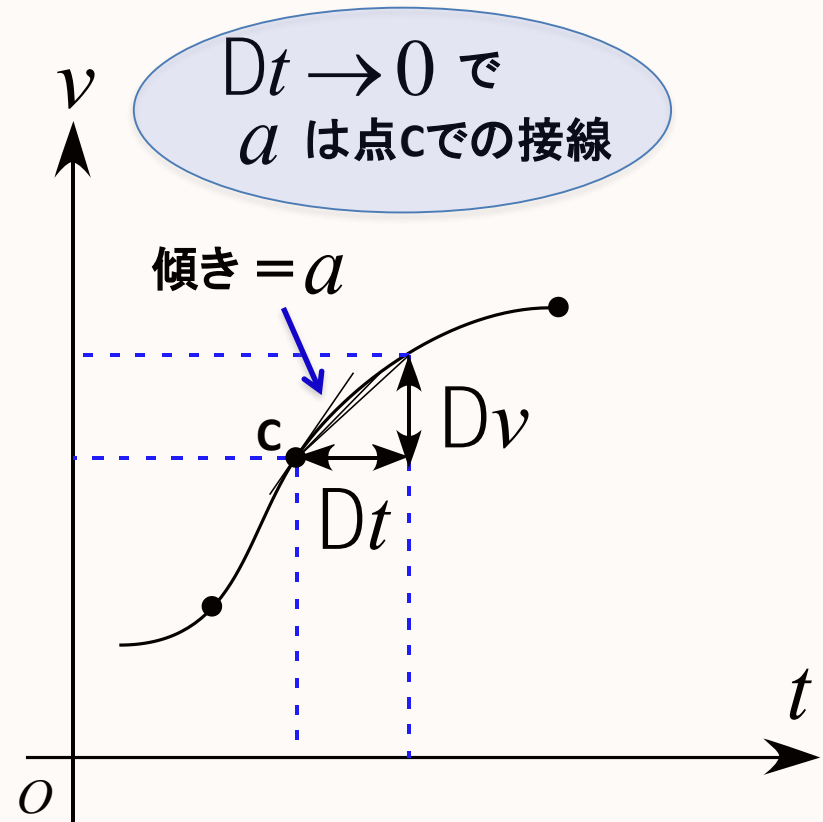


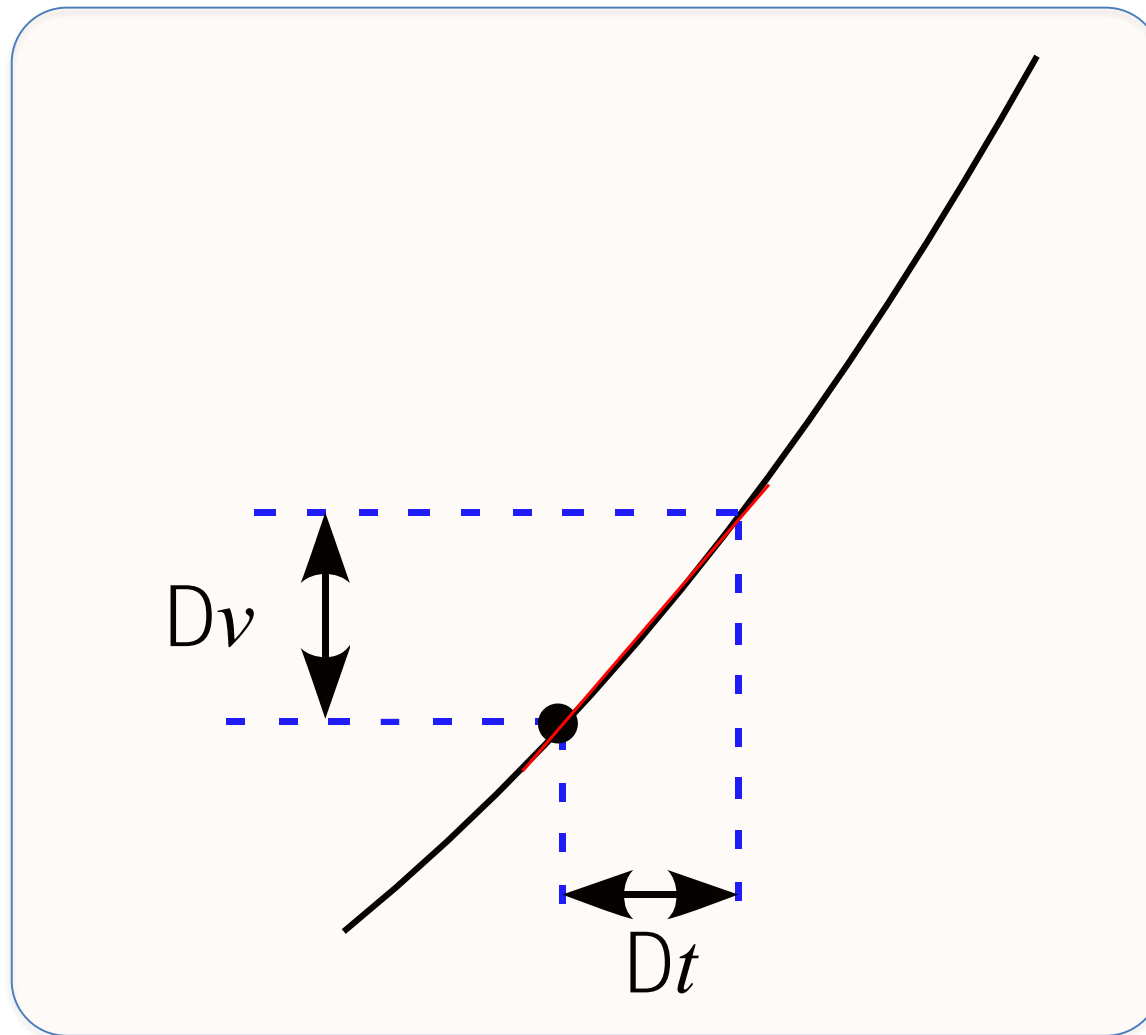
加速度～瞬間加速度

瞬間の加速度（単に「加速度」）



質点の速度－時間の関係





瞬間加速度

瞬間加速度

$$a = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{\boxed{(v + Dv) - v}}{Dt} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dv}{Dt} = \frac{dv}{dt}$$

速度変化

v は t の関数であると考えると

$$a = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dv}{Dt} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{v(t + Dt) - v(t)}{Dt} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2回微分する

加速度

それぞれ何を意味するか考えよう

$$a > 0$$

加速する

$$a < 0$$

減速する(ブレーキをかける)

逆向きに走っているという意味ではない

加速度～例題

例題

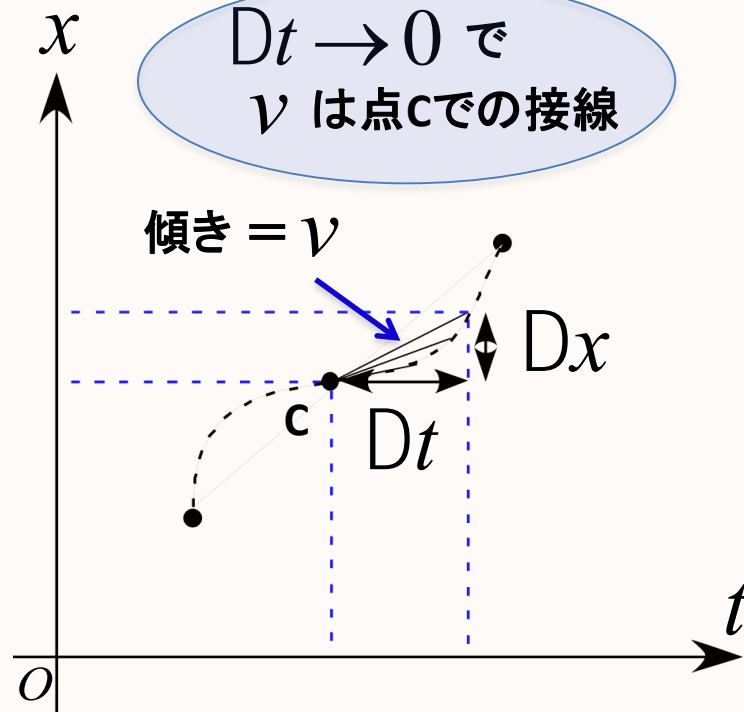
x 軸に沿って運動する質点が $v(t) = 5 + 10t$ m/s に従って運動する。
この質点は $t = 0$ s における位置は 20 m である。

1. 加速度を時間 t の関数として表せ。
2. $t = 0$ における質点の速度を求めよ。
3. 位置を t の関数として表せ。

速度～まとめ

速度

質点の位置 - 時間の関係



変位の時間変化率

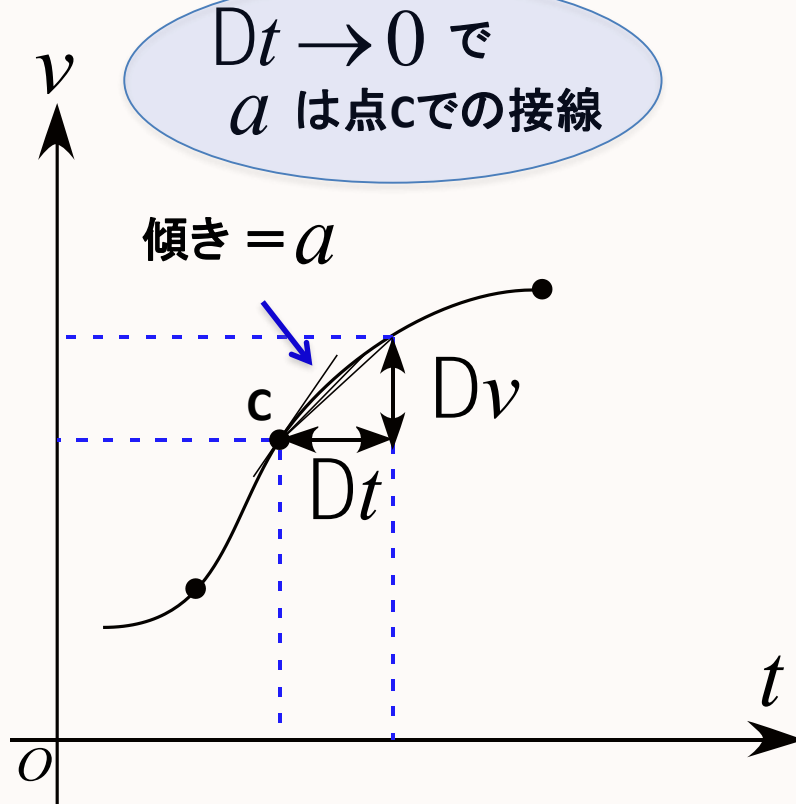
$$v = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dx}{Dt} = \frac{dx}{dt}$$

変位 x を時間 t で微分したもの

加速度～まとめ

加速度

質点の速度－時間の関係



速度の時間変化率

$$a = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{Dv}{Dt} = \frac{dv}{dt}$$

速度 v を時間 t で微分したもの

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dz}{dt} \vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_3$$

と表すことができる

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + Dt) - \vec{r}(t)}{Dt} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

変位ベクトルの時間変化率

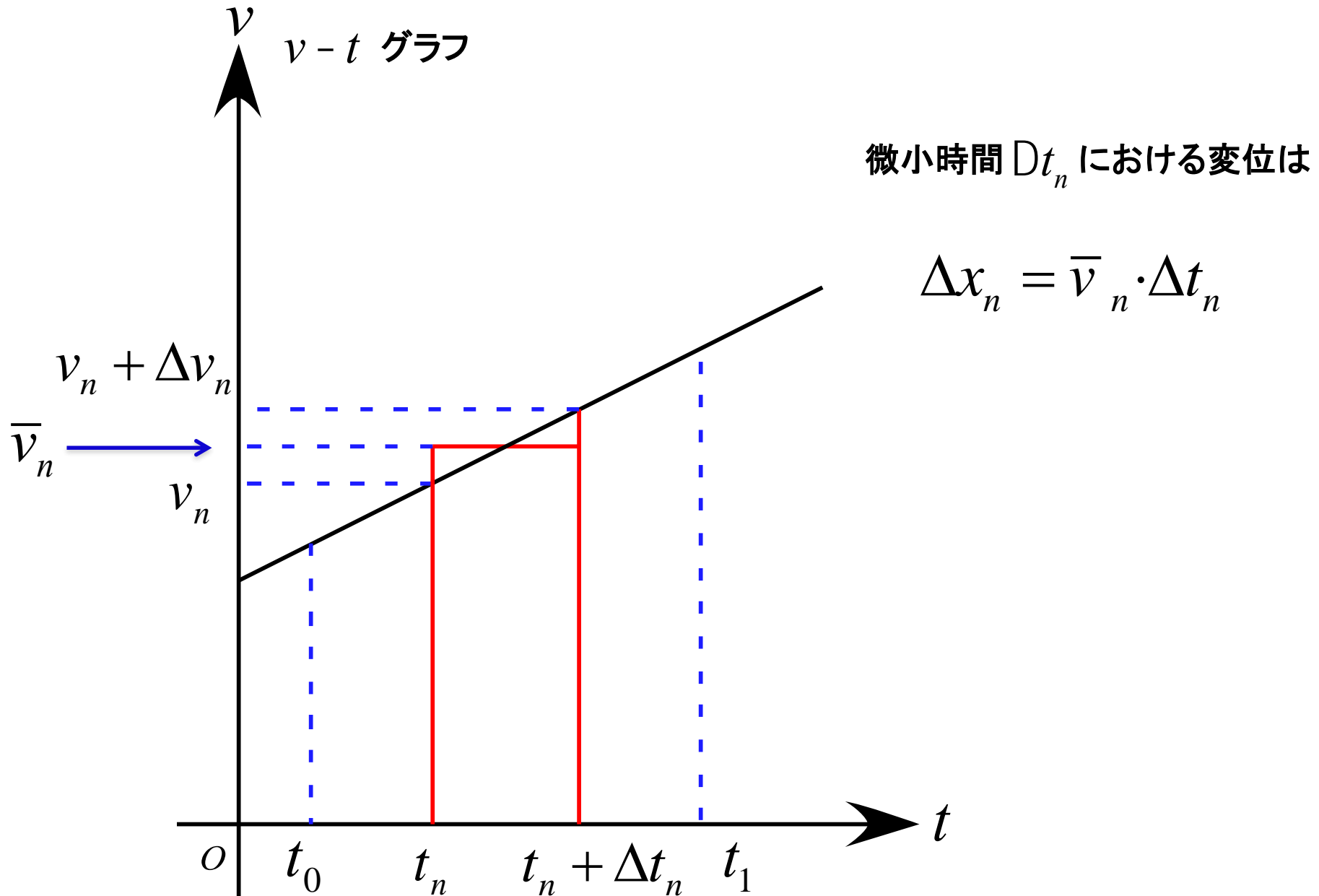
$$\vec{a} = \lim_{Dt \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + Dt) - \vec{v}(t)}{Dt} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

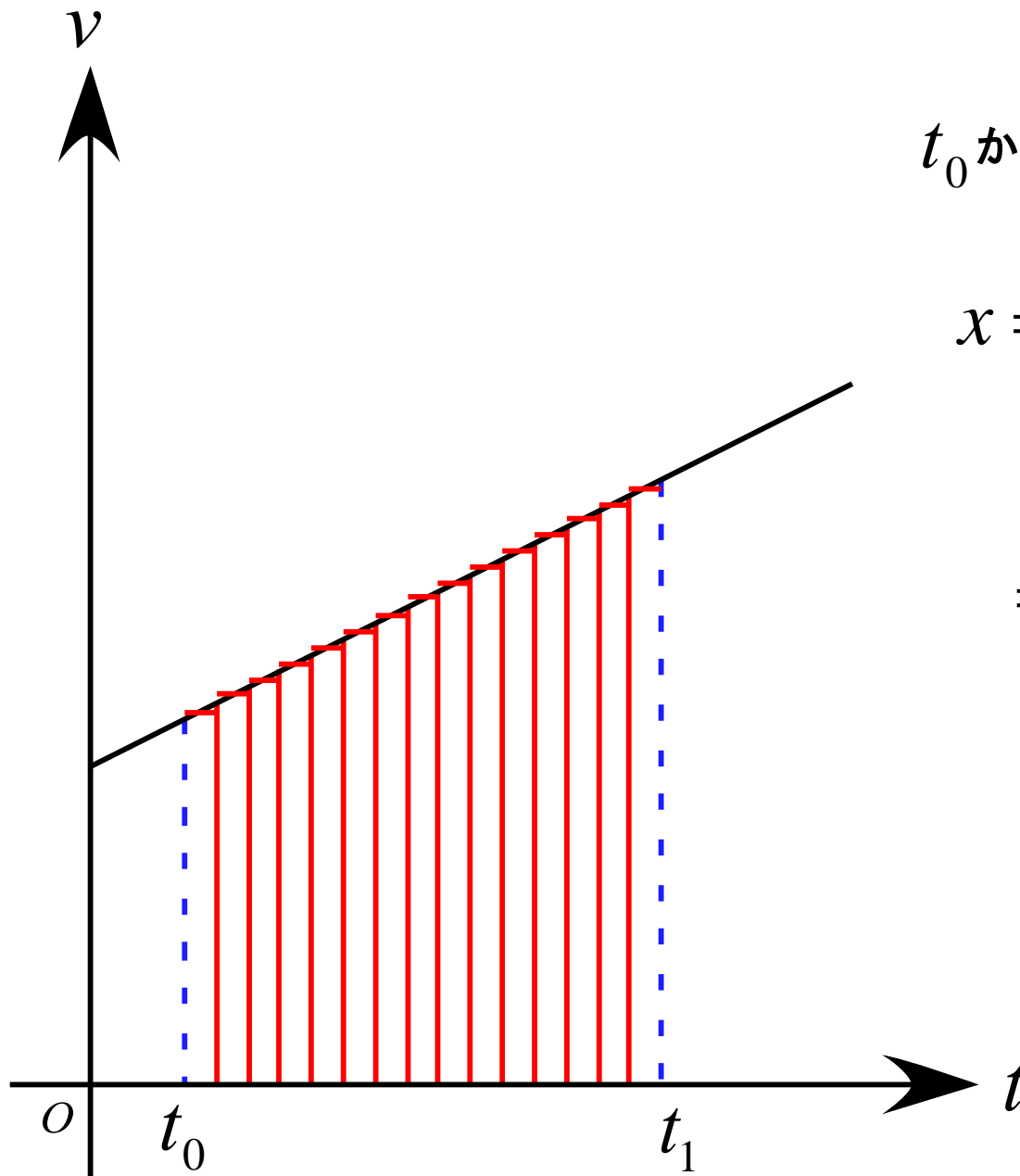
速度ベクトルの時間変化率

となる

(参考)

変位と $v - t$ グラフの面積



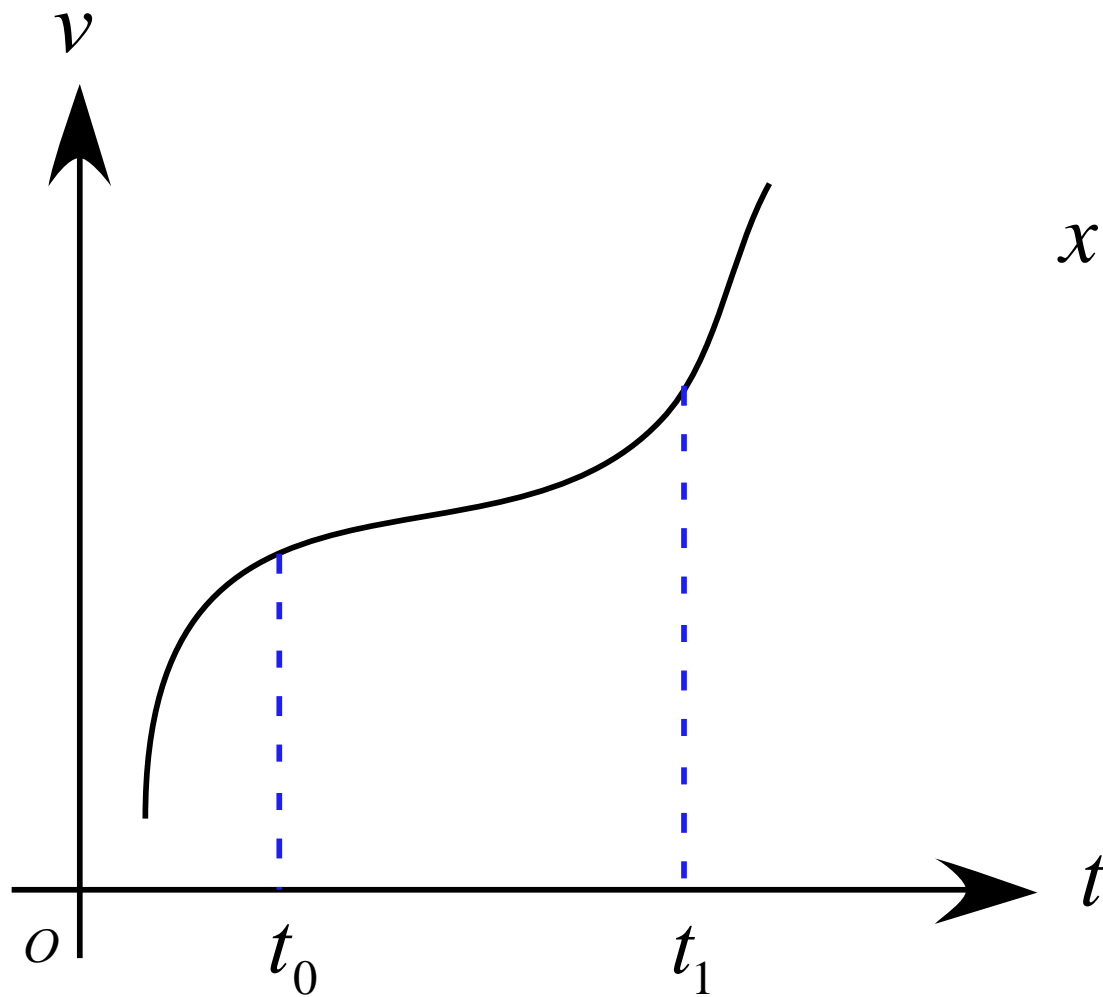


t_0 から t_1 まで合計する

$$x = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n \bar{v}_n \cdot \Delta t_n$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

$v - t$ グラフ



一般的に

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

変位～速度～加速度

