

# 位置ベクトル

位置

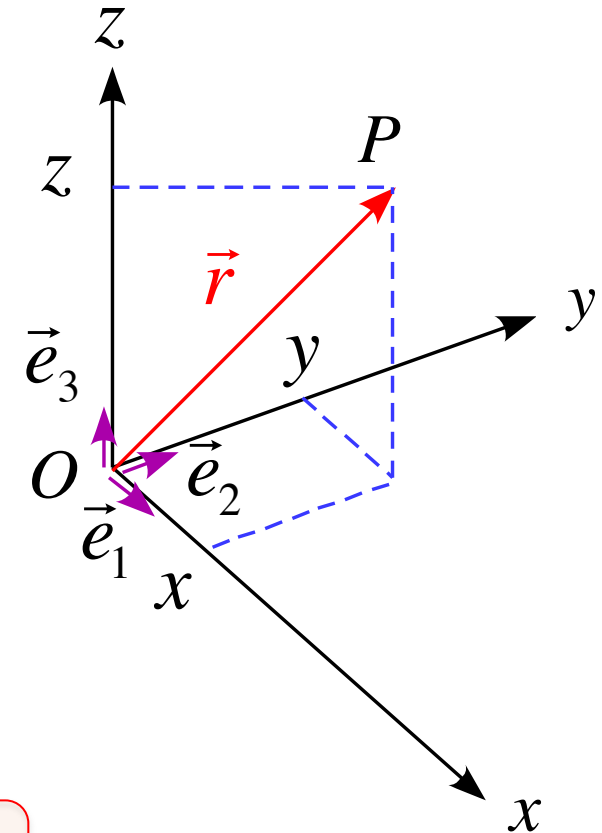
観測者  $O$  に対する ( $O$  を始点とする)

物体  $P$  の位置ベクトル

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

この座標系は、観測者  $O$  に対する  
相対座標系となる

3次元の運動を考えるときは  
このベクトルが時刻  $t$  の関数として追跡する



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$$

# 位置ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

なので

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

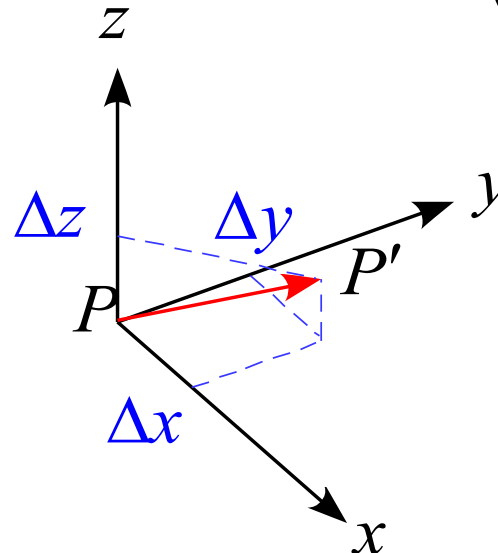
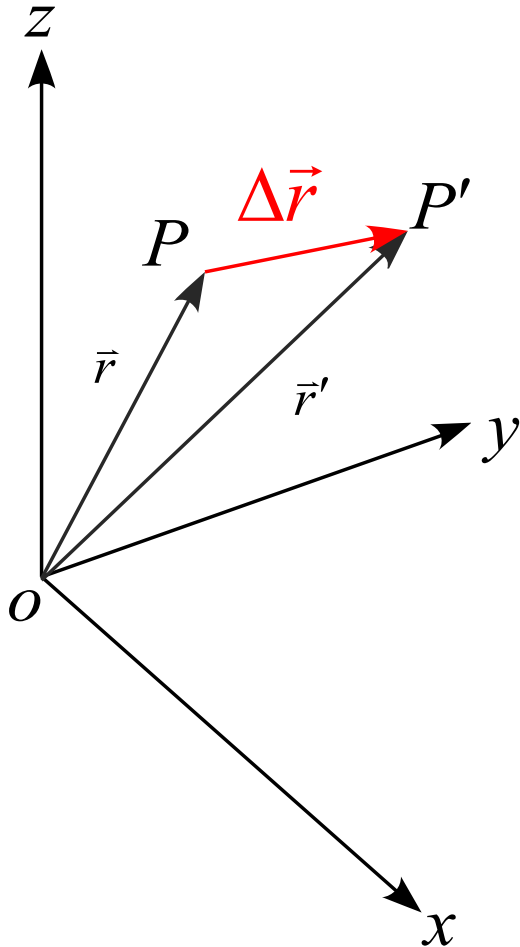
$$\vec{r} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

# 変位ベクトル

物体の移動

$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}' - \vec{r} \\ &= \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)\end{aligned}$$



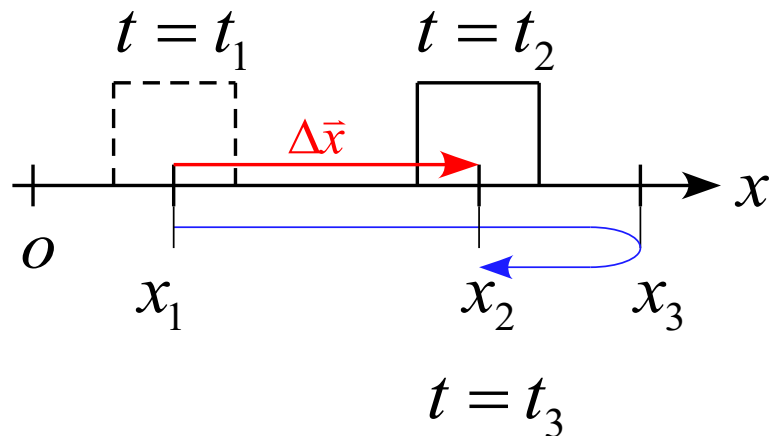
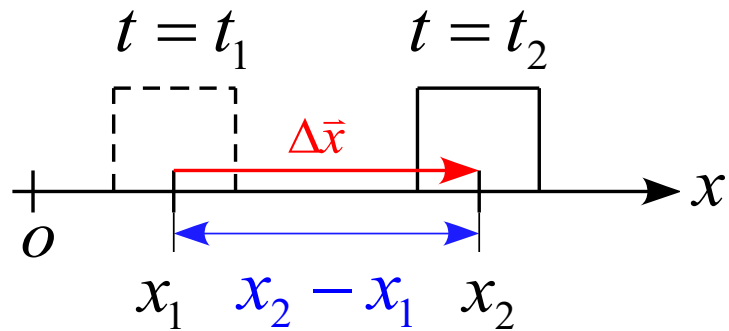
変位  $\Delta\vec{r}$     ... 移動した距離＋向き

距離  $|\Delta\vec{r}|$     ... 移動した距離

# 変位ベクトル

変位  $\Delta \vec{r}$  ... 移動した距離＋向き

距離  $|\Delta \vec{r}|$  ... 移動した距離



# 速度・加速度～速さ

物理では・・・時間変化が重要

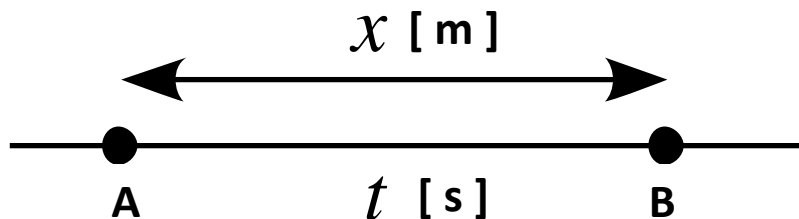
例えば

物が動く・・・

速さ、速度  
加速度

が知りたい

平均の速さ： 目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか  
「平均するとどの程度の速さです～っと走り続けたのと同じか」

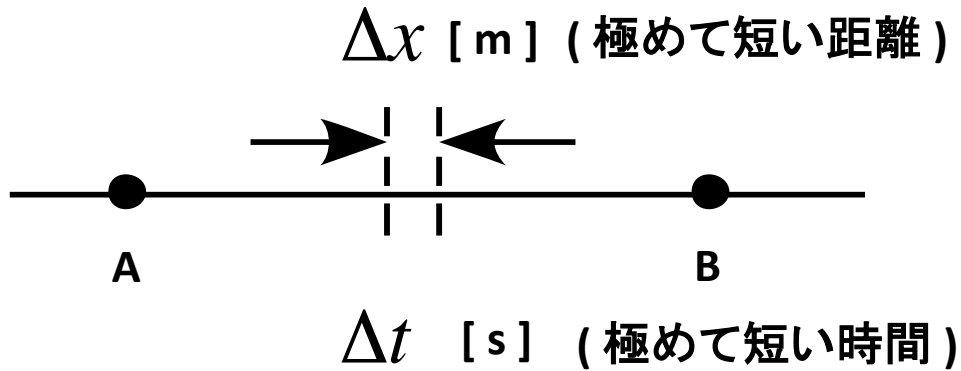


平均の速さ

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \quad [\text{m/s}]$$

# 速さ

瞬間の速さ : ある時点での「スピード」のこと



瞬間の速さ

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [\text{m/s}]$$

# 速さ～速度

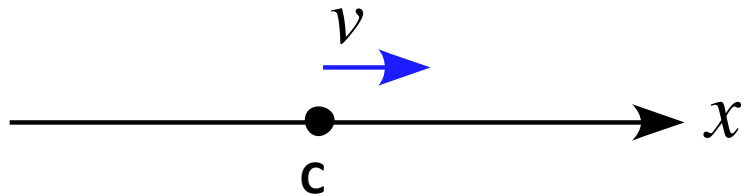
速度＝速さ＋向き ←ベクトル

物理学では  
大きさも向きも大事

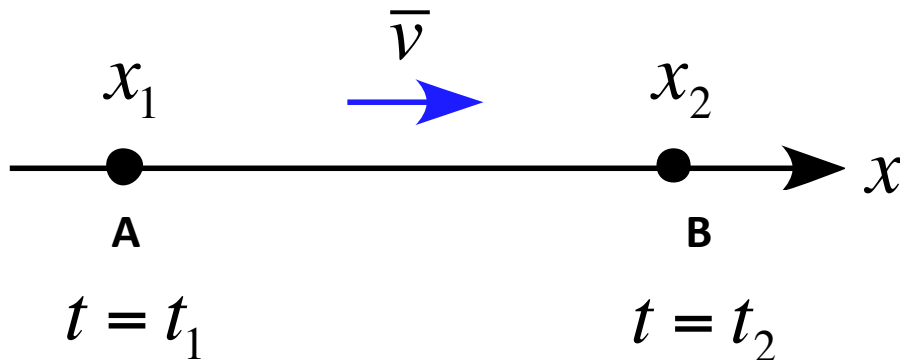
例

5 [m/s]の速さで走っている ( どちら向きかわからない )

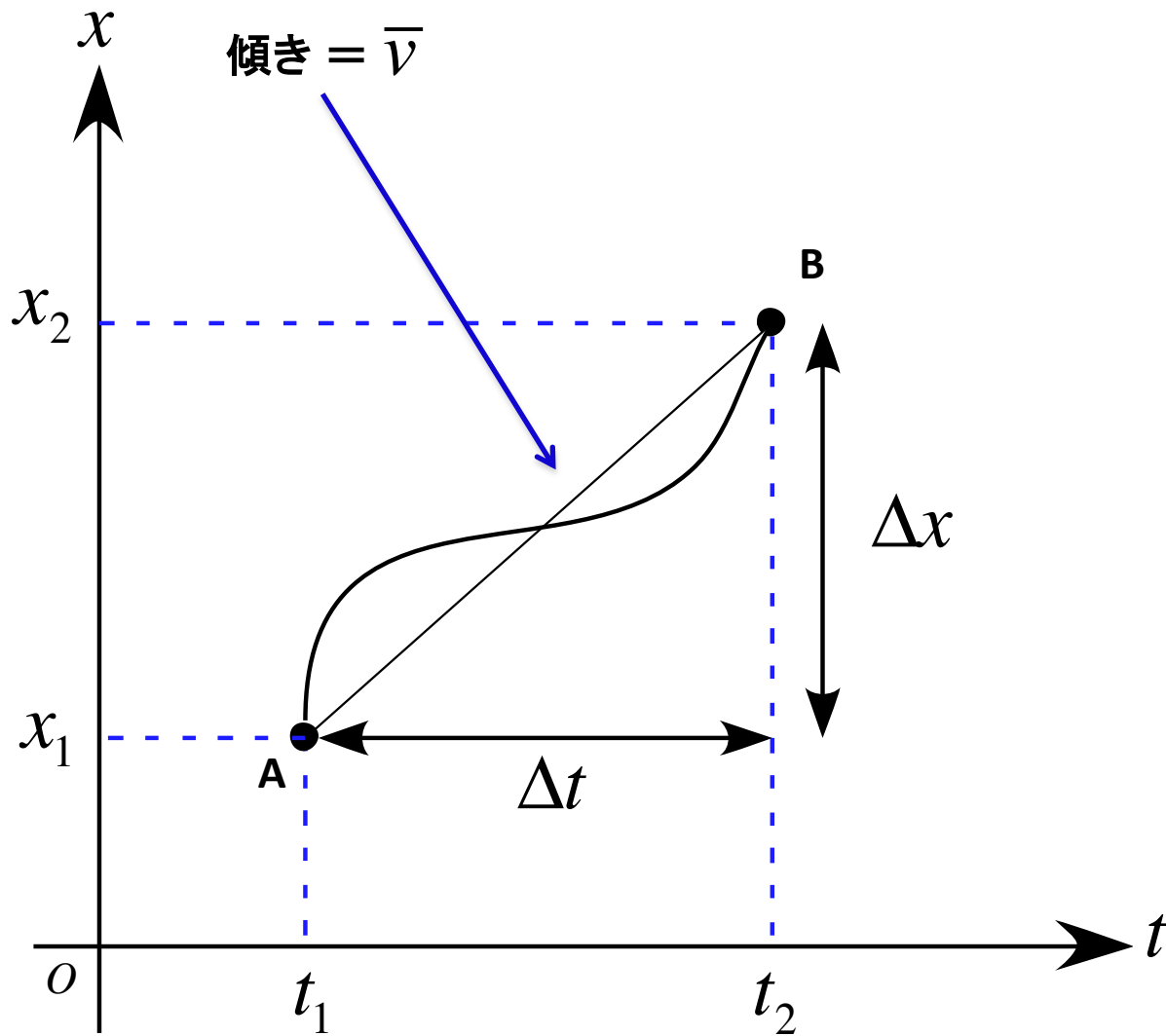
5 [m/s]の速度で走っている ( ある特定の向きに走っている = 向きが決まっている )



平均速度：時間 $t$ に対する変位 $x$ の変化



## 質点の位置 - 時間の関係





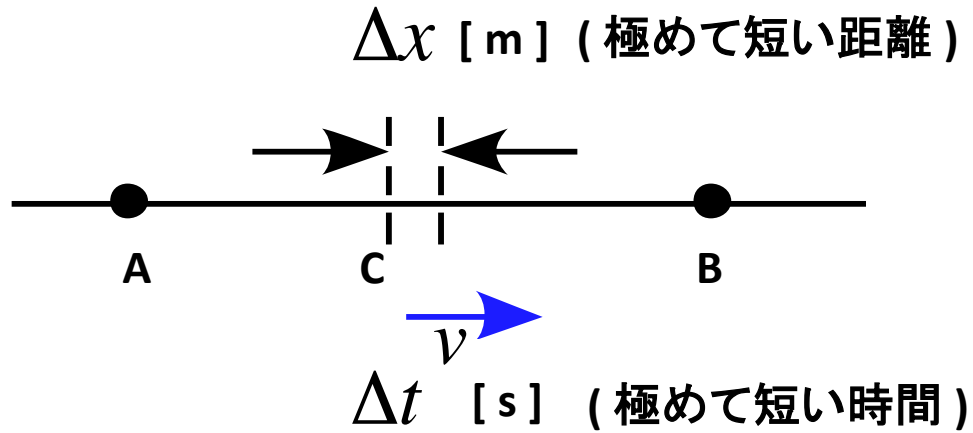
# 平均速度

平均速度

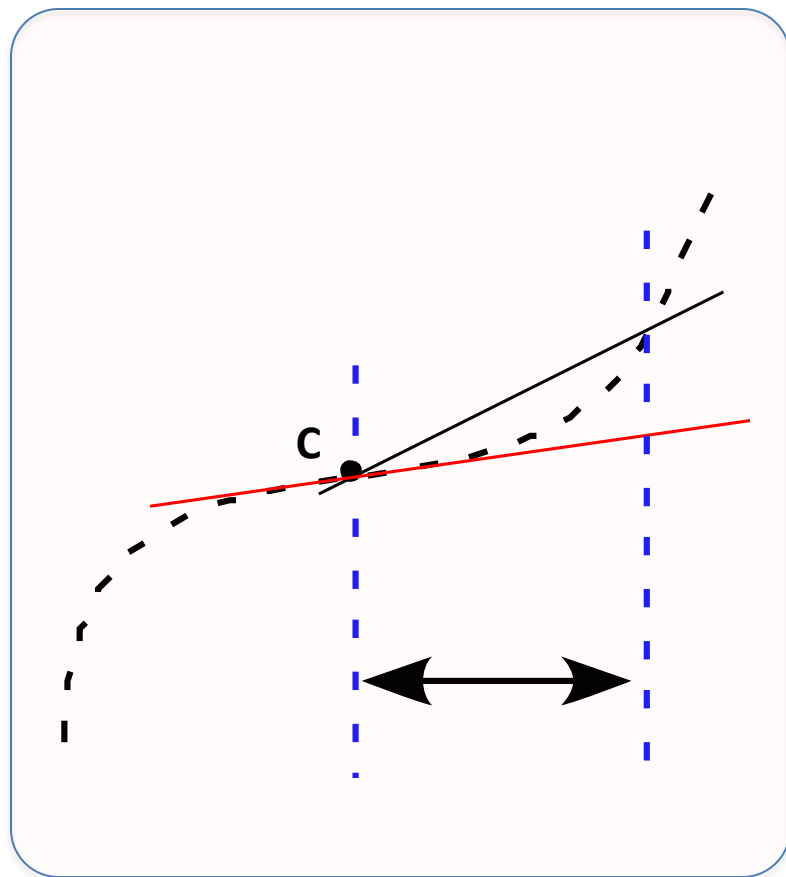
$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

# 瞬間速度

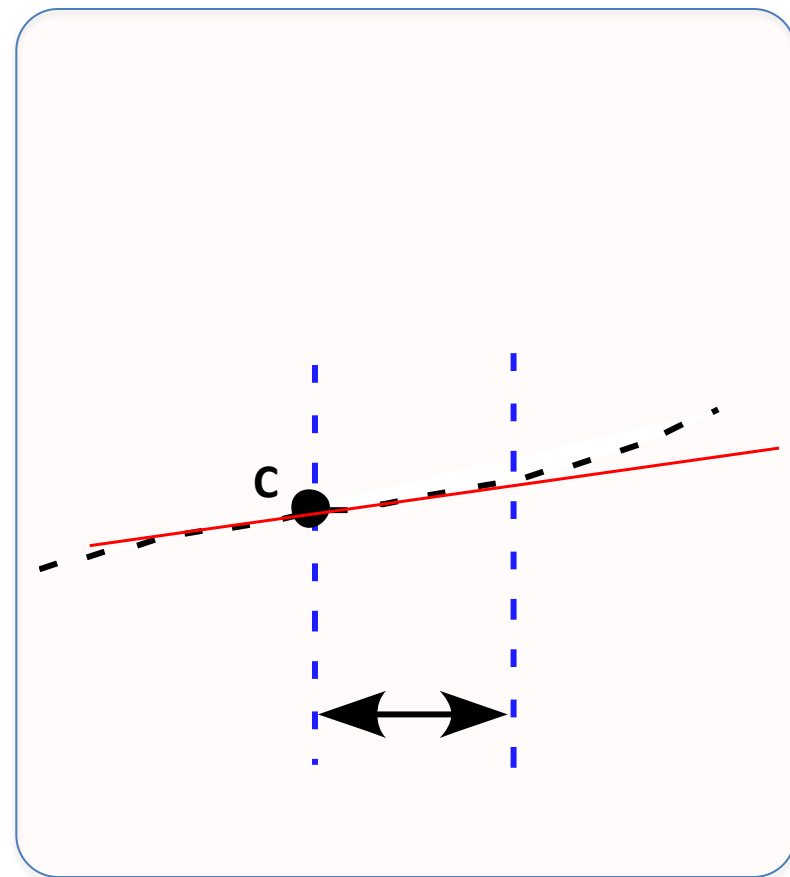
瞬間速度







拡大




$\Delta t \rightarrow 0$  で  
 $v$  は点 $C$ での接線

# 速度～瞬間速度

瞬間速度

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

変位



# 速度～例題

## 例題

$x$  軸に沿って運動する質点が  $t_1 = 1 \text{ s}$  のとき  $x_1 = 14 \text{ m}$  の位置にあり、  
 $t_2 = 3 \text{ s}$  のとき  $x_2 = 4 \text{ m}$  の位置にある。

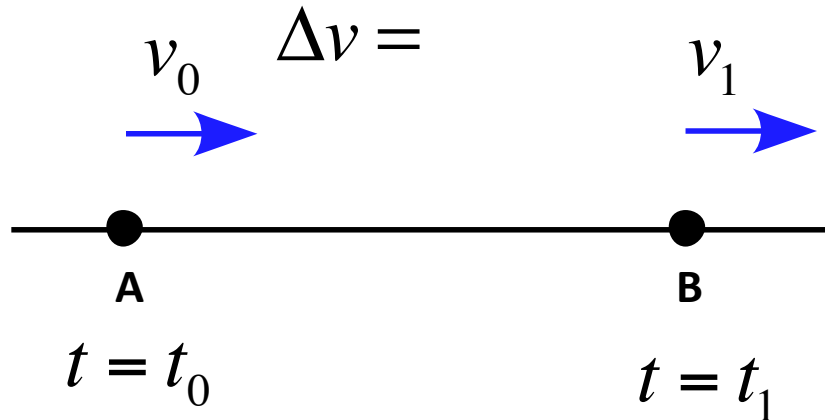
1. この運動における変位を求めよ。
2. この運動における平均速度を求めよ。

# 加速度

加速度：どれくらいの時間をかけて、どれくらい速度が変化するかの度合い

時間に対する速度変化率

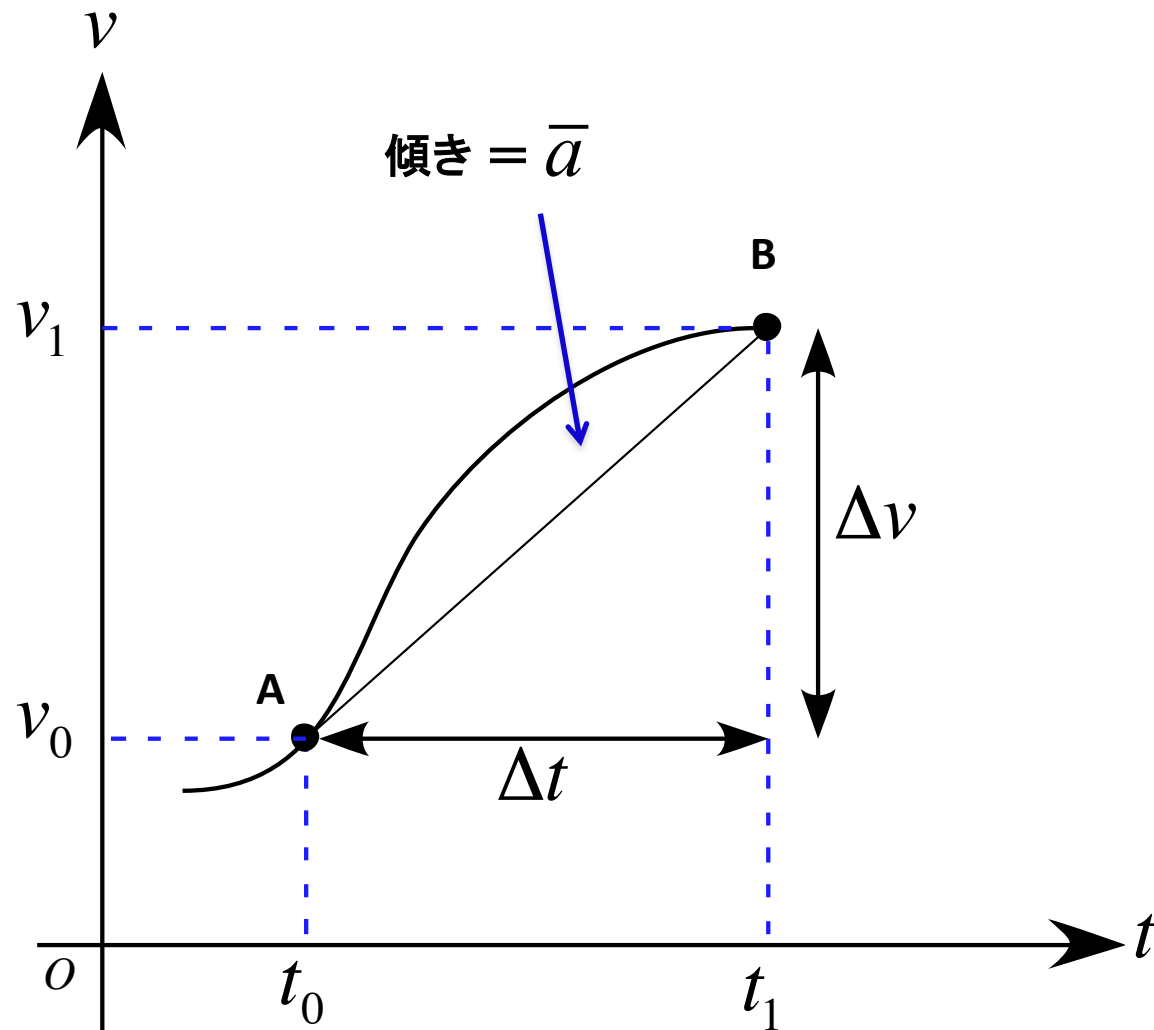
平均加速度



平均加速度

$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

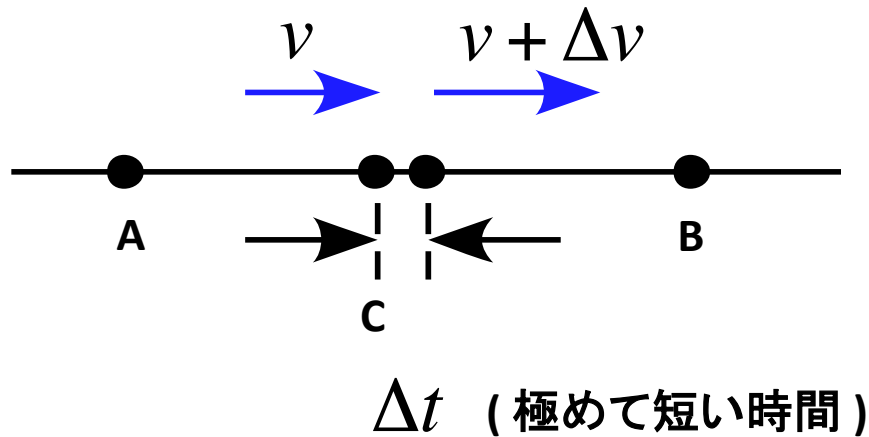
## 質点の速度 - 時間の関係



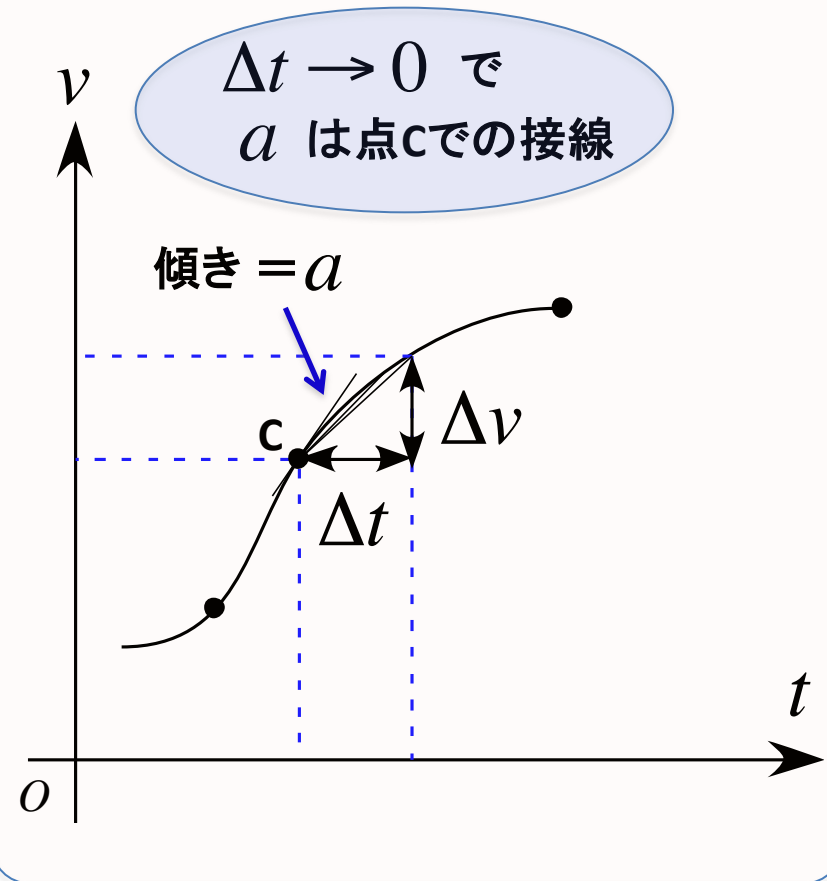


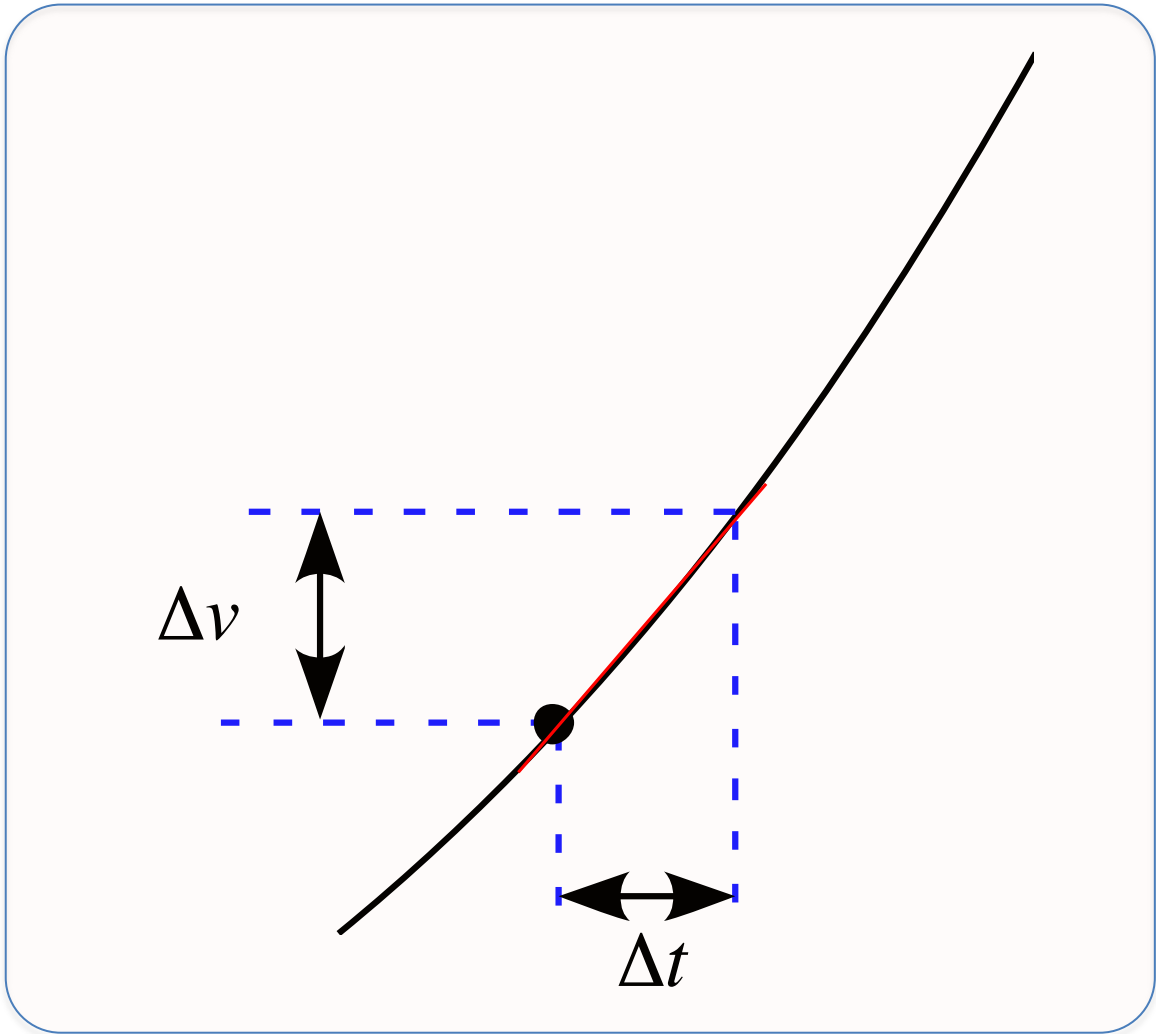
# 加速度～瞬間加速度

瞬間の加速度（単に「加速度」）



質点の速度－時間の関係





# 瞬間加速度

瞬間加速度

速度変化

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(v + \Delta v) - v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

$v$  は  $t$  の関数であると考えると

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2回微分する

# 加速度

それぞれ何を意味するか考えよう

$$a > 0$$

加速する

$$a < 0$$

減速する(ブレーキをかける)

逆向きに走っているという意味ではない

# 加速度～例題

## 例題

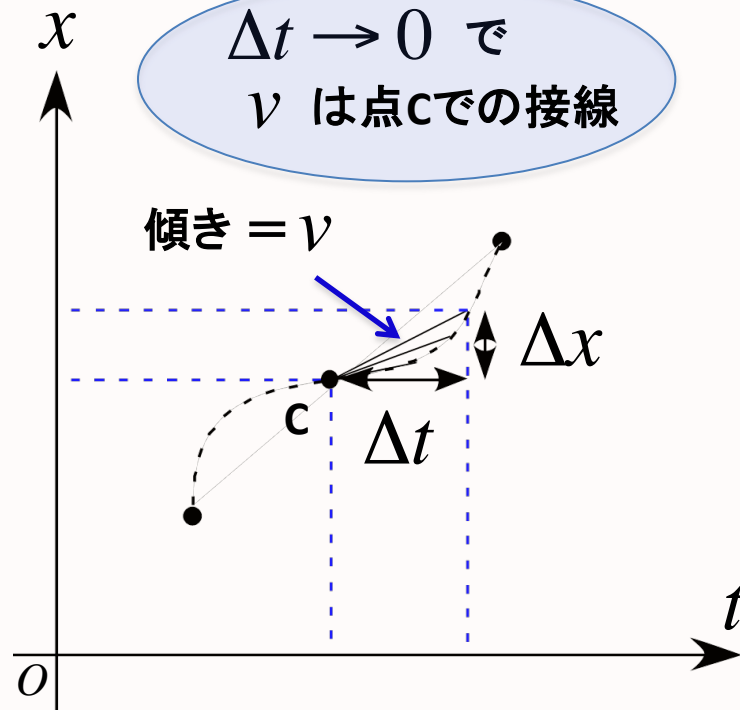
$x$  軸に沿って運動する質点が  $v(t) = 5 + 10t$  m/s に従って運動する。  
この質点は  $t = 0$  s における位置は 20 m である。

1. 加速度を時間  $t$  の関数として表せ。
2.  $t = 0$  における質点の速度を求めよ。
3. 位置を  $t$  の関数として表せ。

# 速度～まとめ

## 速度

質点の位置 - 時間の関係



変位の時間変化率

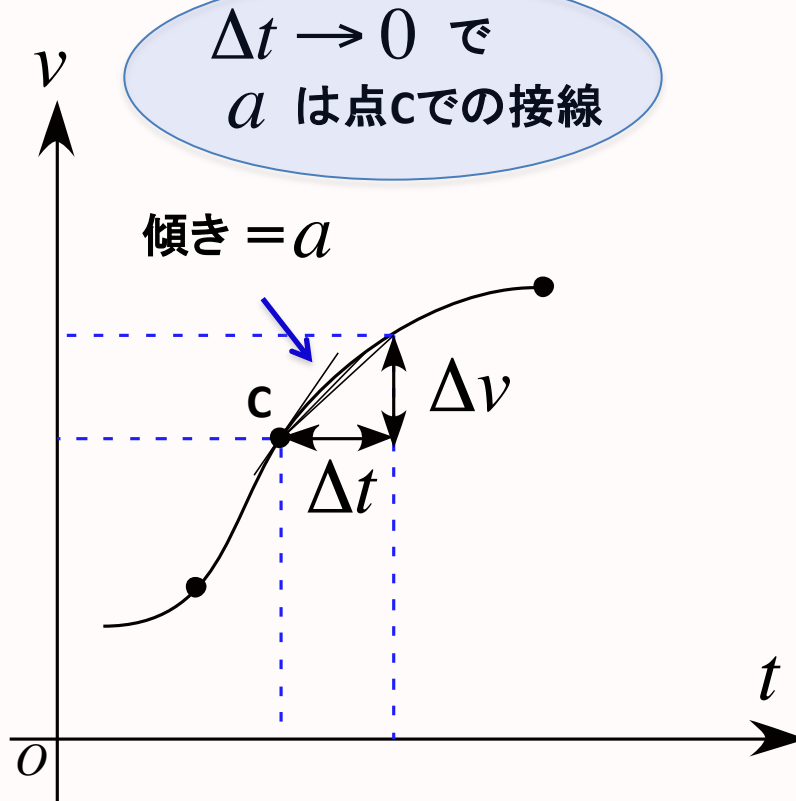
$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

変位  $x$  を時間  $t$  で微分したもの

# 加速度～まとめ

## 加速度

質点の速度－時間の関係



速度の時間変化率

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

速度  $v$  を時間  $t$  で微分したもの

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dx}{dt} \right) = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

# ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{e}_1 + \frac{dy}{dt} \vec{e}_2 + \frac{dz}{dt} \vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2} \vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2} \vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2} \vec{e}_3$$

と表すことができる

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

変位ベクトルの時間変化率

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

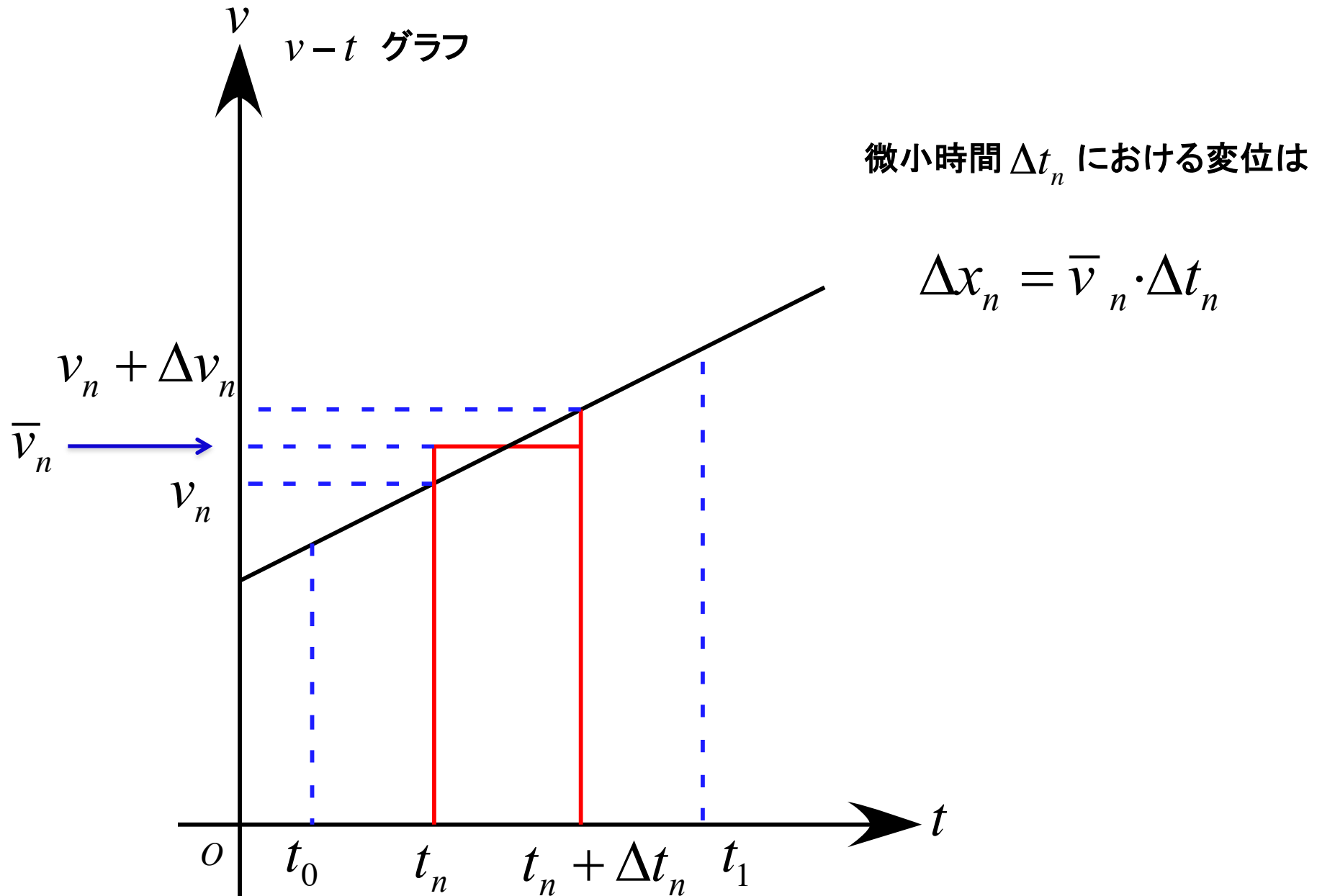
速度ベクトルの時間変化率

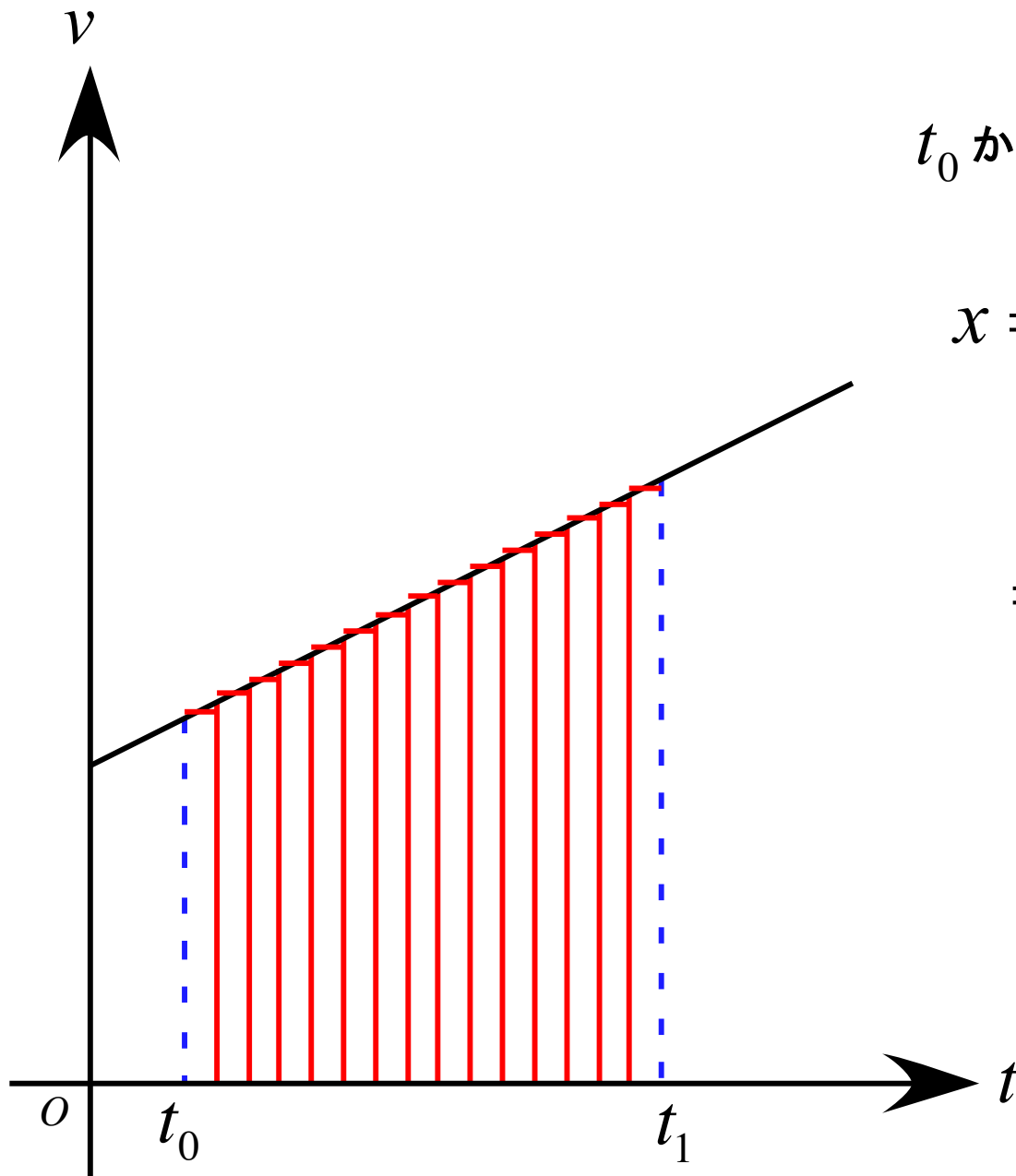
となる



(参考)

# 変位と $v-t$ グラフの面積



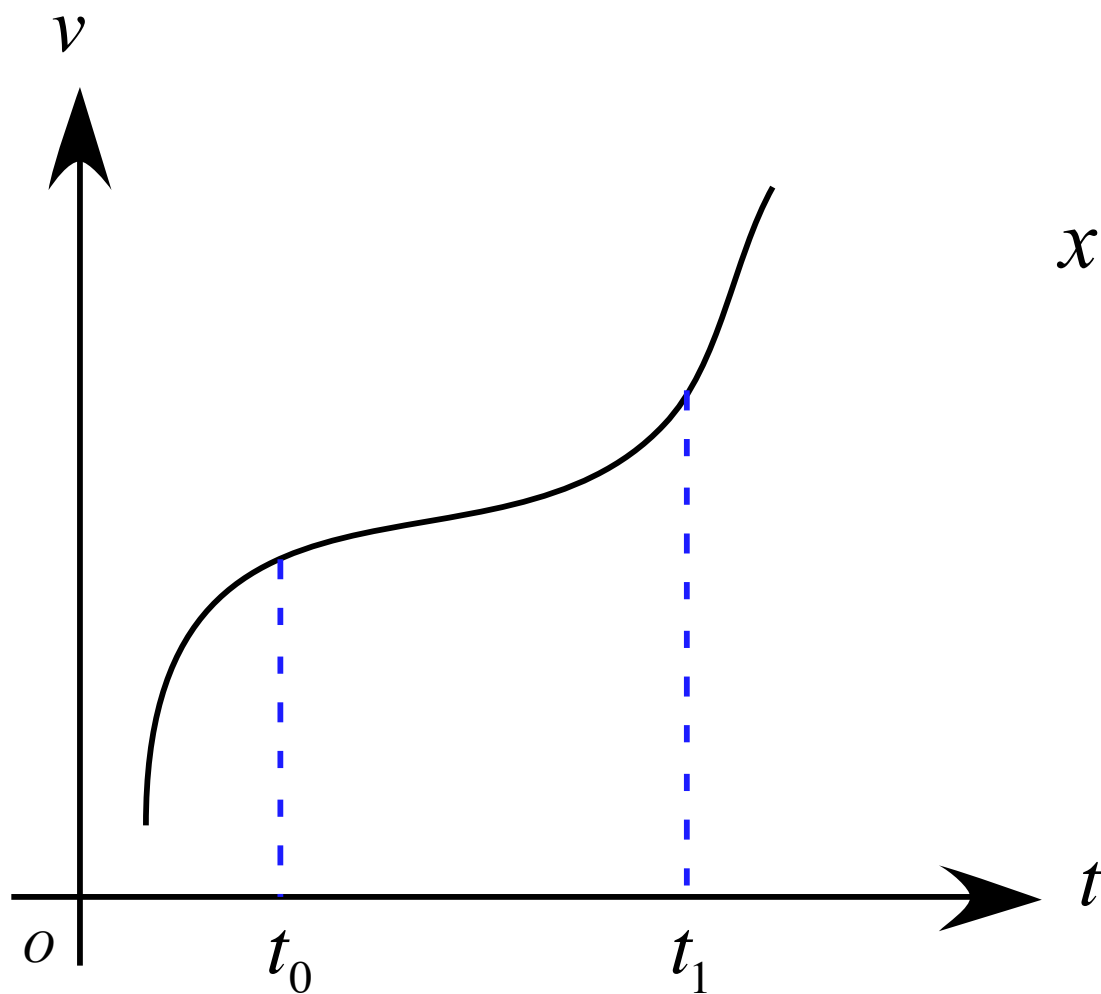


$t_0$  から  $t_1$  まで合計する

$$x = \lim_{\Delta t_n \rightarrow 0} \sum_n \bar{v}_n \cdot \Delta t_n$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

$v-t$  グラフ



一般的に

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$$

# 変位～速度～加速度

