

2020 基礎物理学 練習問題 (力学)

注) 途中式などは省略せず記述すること。

必要であれば重力加速度は g として用いよ。
出題されているモデルの物体はいずれも質点であり、
大きさは無視できるものとする。

1. 力学の基礎的な物理量について答えよ。但し、位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$ として考えよ。

(1) 速度 \vec{v} の定義式とその次元を記述せよ。

(2) 加速度 \vec{a} の定義式とその次元を記述せよ。

(3) 力 \vec{F} は $= \vec{F}$ と表される。

その次元は である。

(4) (3)の式は運動方程式であり、この式を変形することにより
さまざまな物理量を導くことができる。

(3)の式の両辺を変位 $d\vec{r}$ で内積をとって積分すると

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\text{①} \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

となる。

左辺の①の部分は運動エネルギーを右辺は仕事を表している。運動エネルギーの次元は であり、仕事の次元は である。

(5) また、(3)の式を変形すると

$$\frac{d}{dt} \left(\text{②} \right) = \vec{F}$$

と表される。

②の部分は運動量であり、その次元は である。

②を \vec{p} とおくと

$$\frac{d}{dt}(\vec{p}) = \vec{F} \qquad d\vec{p} = \vec{F}dt$$

この左辺 Fdt が力積であり、その次元は である。

(6) さらに、(3)の式を両辺に左側から位置ベクトル \vec{r} の外積を取ると

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad \cdots (A)$$

となる。

ここで、

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \\
 &= \boxed{\textcircled{3}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \\
 &= \boxed{\textcircled{4}}
 \end{aligned}$$

であるから、式 (A) は

$$\frac{d}{dt}(\boxed{\textcircled{5}}) = \boxed{\textcircled{6}}$$

と表される。

左辺の⑤は角運動量 \vec{L} であり、

その次元は である。

右辺の⑥は力のモーメント \vec{N} であり、

その次元は である。

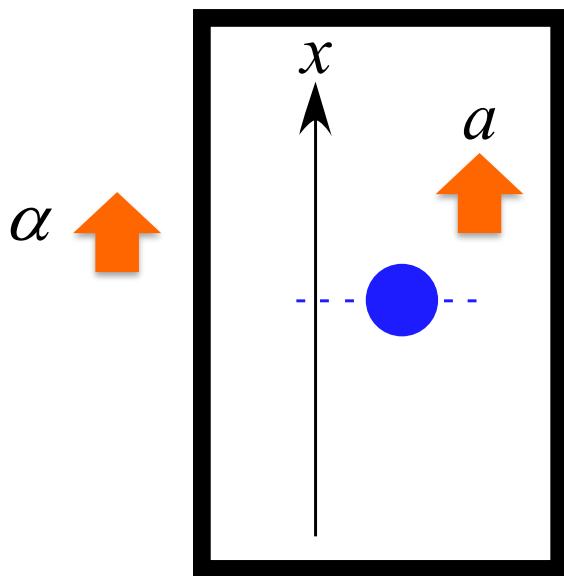
この式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

と表すことができ、これを「回転の運動方程式」と呼ぶ。

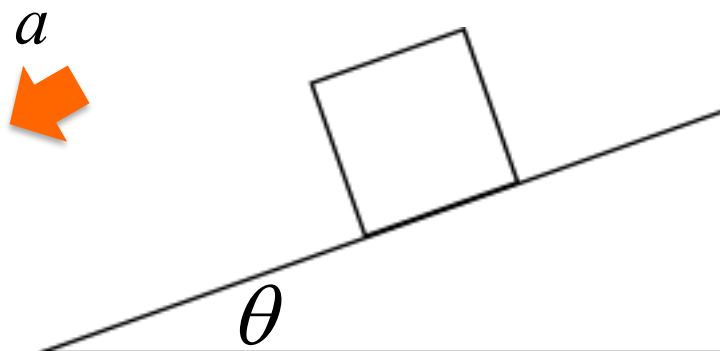
2. 以下の運動について物体に作用する力を図に書き込み、その運動の運動方程式を記述せよ。
いずれの運動も物体の質量は m とし、重力加速度は g とする。

- (1) 一定の加速度 a で上昇するエレベーター内で物体を鉛直投げ上げさせる運動 (初速度 v_0)



- (2) 摩擦力が働く斜面を滑り降りる運動

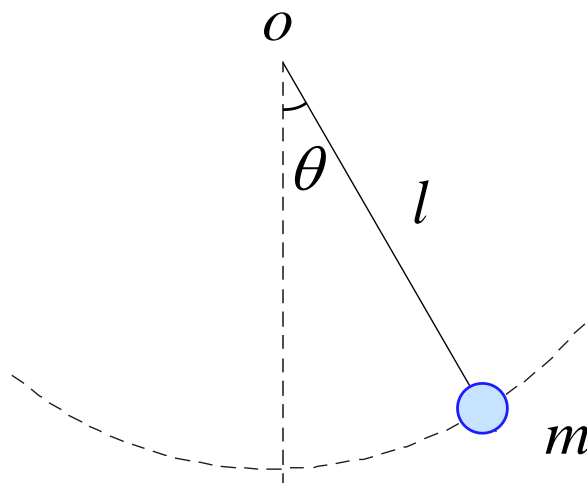
(動摩擦係数は $\mu_k = \frac{f}{N}$ とする)



(3) 単振り子の運動

極座標で軸を考え記述せよ。

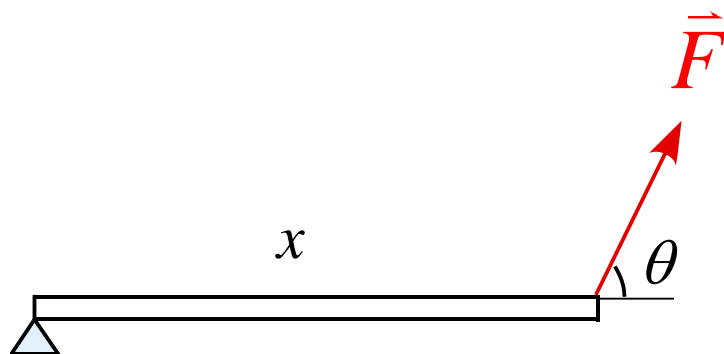
(糸の張力は S とし、 r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ とする。)



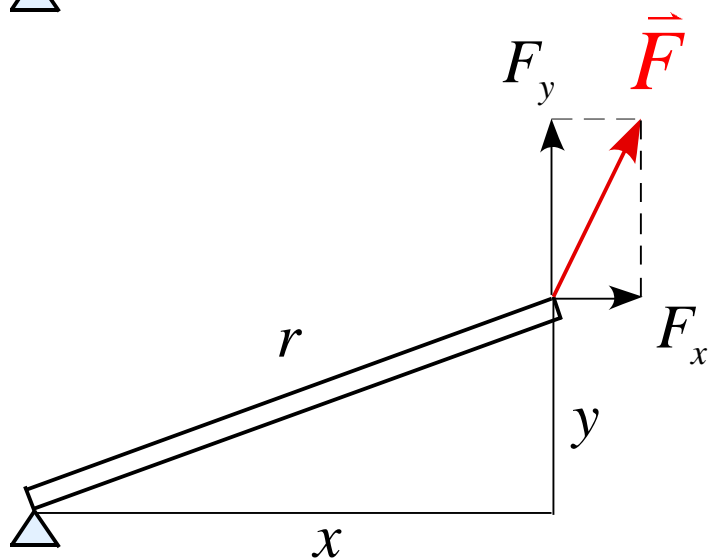
3. 以下の図の力のモーメント \vec{N} を計算し、 $|\vec{N}|$ を求めよ。

但し、棒の質量は無視できるとする。

(1)



(2)

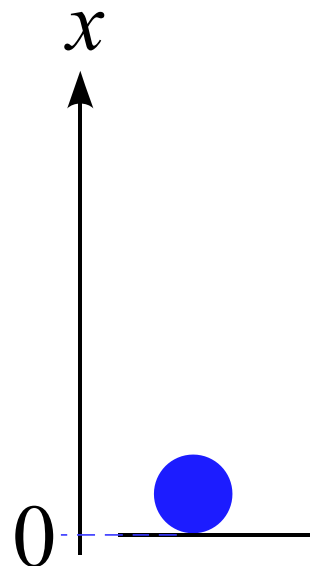


4. 質量 m の物体を地表から鉛直投げ上げする運動を考える。
初速度 $v(0) = v_0$ として以下の問に答えよ。
- (1) 運動中に物体に作用する力を書き込め。
 - (2) この運動の運動方程式を記述せよ。
 - (3) 運動方程式から速度 $v(t)$ を導け。
 - (4) 運動方程式から変位 $x(t)$ を導け。
 - (5) 再び地表に戻ってくる時刻 t_1 を求めよ。
 - (6) ある時刻 t ($t \leq t_1$) での運動エネルギー $K(t)$ を求めよ。
 - (7) ある時刻 t ($t \leq t_1$) での位置エネルギー $U(t)$ を求めよ。
 - (8) 力学的エネルギー $E(t) = K(t) + U(t)$ ($t \leq t_1$) が時間に依らず一定であることを示せ。
 - (9) 運動エネルギー $K(t)$ 、位置エネルギー $U(t)$ 、全力学的エネルギー $E(t)$ をそれぞれ時間 t のグラフで表わせ。
但し、 $t \leq t_1$ とする。
 - (10) 地表に衝突する瞬間の速度 v_1 を求めよ。

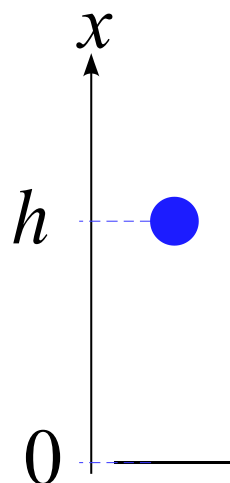
衝突において力 F が作用したとする。また、この力 F は重力に比べて十分に大きく、衝突中の重力の効果は無視できるとする。

(11) 地表に衝突する瞬間の運動方程式を記述せよ。

(12) この衝突は完全弾性衝突であった。
物体が地表から受けた力積 I を求めよ。



5. 質量 m の物体を高さ h から自由落下させる。
以下の問に答えよ。
但し、重力加速度は g とする。

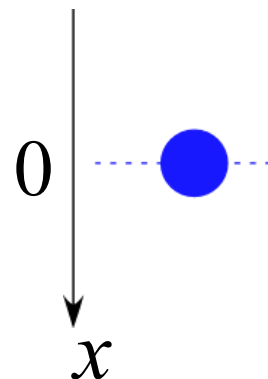


(1) 物体に作用する力を書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

(3) この運動において力学的エネルギーが保存していることを運動方程式を x で積分することで導き、力学的エネルギーを求めよ。

6. 質量 m の雨滴が落下する運動を考える。
 このとき、空気抵抗が働くものとし、
 その空気の抵抗力の大きさは kv とする。
 以下の問に答えよ。



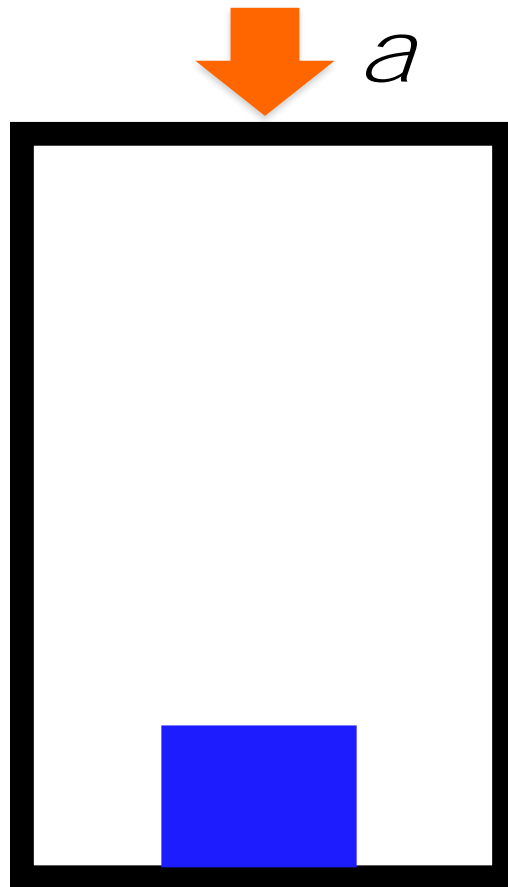
- (1) 物体に作用する力を書き込め。
- (2) この運動の運動方程式を記述せよ。

運動方程式を解くと、速度 $v(t)$ は $v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$ となる。

- (3) $v - t$ グラフを書け。また、原点での傾きを求めよ。
 - (4) 十分時間が経過した状態の速度を記述せよ。
7. 地面となす角 θ の摩擦がある斜面を質量 m の物体がすべりおきる運動を考える。以下の問に答えよ。
 但し、動摩擦力は $f = \mu_k N$ として用いてよいとする。
- (1) この運動の運動方程式を記述せよ。
 - (2) この運動の加速度 a を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。
 - (3) この運動で物体が距離 L を移動したとするととき、動摩擦力がした仕事 $W_{\text{摩}}$ を求めよ。

8. 一定の加速度 a で下降するエレベーターがある。
このエレベーター内に質量 m の物体が床に置かれている。
以下の問に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること。)

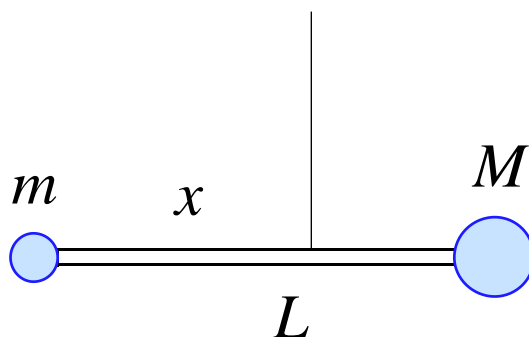
- (1) 物体に作用する力を記入せよ。
- (2) 物体が床から受ける垂直抗力 N を求めよ。
- (3) 物体が無重量になるための条件を求めよ。



9. 図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点を取り付けられ、糸でつるされている。
この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問に答えよ。

棒の質量を m とした場合

- (1) 糸でつるされている点を支点として、質量 m, M の質点及び棒の力のモーメント \vec{N} をそれぞれ求めよ。
- (2) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。
- (3) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。



10. 物体が半径 r_0 の円周上を速さ v_0 で等速円運動している。
 r_0, v_0 は定数である。以下の問に答えよ。

- (1) 速度 \vec{v} と位置ベクトル \vec{r} が直交していることを示せ。
- (2) 速度 \vec{v} と加速度 \vec{a} が直交していることを示せ。
- (3) 加速度の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

11. 図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量 m はである。

物体を水平を状態にして放し、円運動させたとする。

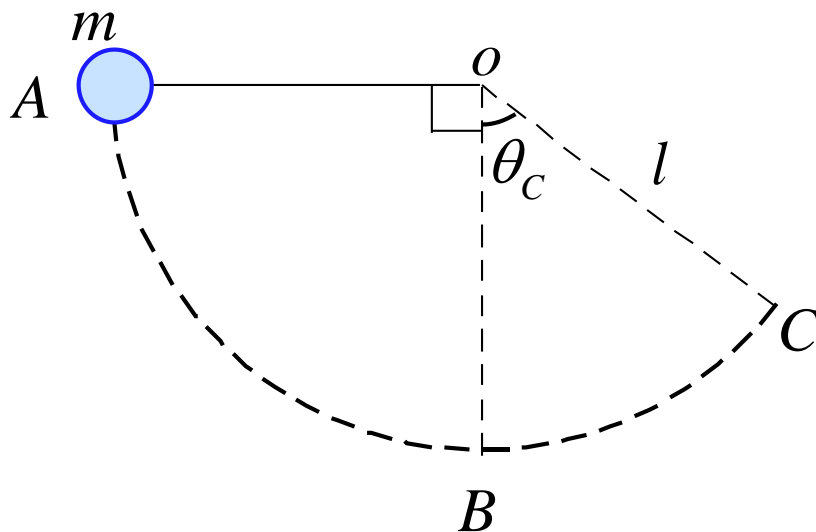
以下の問に答えよ。

ある時刻 t で糸と鉛直線のなす角を θ として用いてよい。

(1) r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

(2) 最下点 B での糸の張力 T_B を求めよ。

(3) 点 C での鉛直線となす角を θ_C とする。
糸の張力 T_C を求めよ。



12. 図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは r 、物体の質量は m である。

最下点で水平方向に初速度 v_0 を与えたとき

以下の問に答えよ。

ある時刻 t で糸と鉛直線のなす角を θ として用いてよい。

(1) r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

(2) 物体が1回転するために必要な初速度 v_0 の条件を求めよ。

