

2020 基礎物理学 練習問題 (力学)

注) 途中式などは省略せず記述すること。

必要であれば重力加速度は g として用いよ。

出題されているモデルの物体はいずれも質点であり、大きさは無視できるものとする。

- 力学の基礎的な物理量について答えよ。但し、位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$ として考えよ。

(1) 速度 \vec{v} の定義式とその次元を記述せよ。

(2) 加速度 \vec{a} の定義式とその次元を記述せよ。

(3) 力 \vec{F} は $\boxed{\quad} = \vec{F}$ と表される。

その次元は $\boxed{\quad}$ である。

(4) (3)の式は運動方程式であり、この式を変形することによりさまざまな物理量を導くことができる。

(3)の式の両辺を変位 $d\vec{r}$ で内積をとつて積分すると

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int \left(m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\boxed{\quad} \textcircled{1} \quad \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

となる。

左辺の①の部分は運動エネルギーを右辺は仕事を表している。運動エネルギーの次元は であり、仕事の次元は である。

(5) また、(3)の式を変形すると

$$\frac{d}{dt} \left(\boxed{\textcircled{2}} \right) = \vec{F}$$

と表される。

②の部分は運動量であり、その次元は である。
②を \vec{p} とおくと

$$\frac{d}{dt} (\vec{p}) = \vec{F} \quad d\vec{p} = \vec{F} dt$$

この左辺 $F dt$ が力積であり、その次元は である。

(6) さらに、(3)の式を両辺に左側から位置ベクトル \vec{r} の外積を取ると

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt} (m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F} \quad \cdots (A)$$

となる。

ここで、

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= \boxed{\textcircled{3}} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= \boxed{\textcircled{4}}$$

であるから、式(A)は

$$\frac{d}{dt}(\boxed{\textcircled{5}}) = \boxed{\textcircled{6}}$$

と表される。

左辺の⑤は角運動量 \vec{L} であり、

その次元は $\boxed{}$ である。

右辺の⑥は力のモーメント \vec{N} であり、

その次元は $\boxed{}$ である。

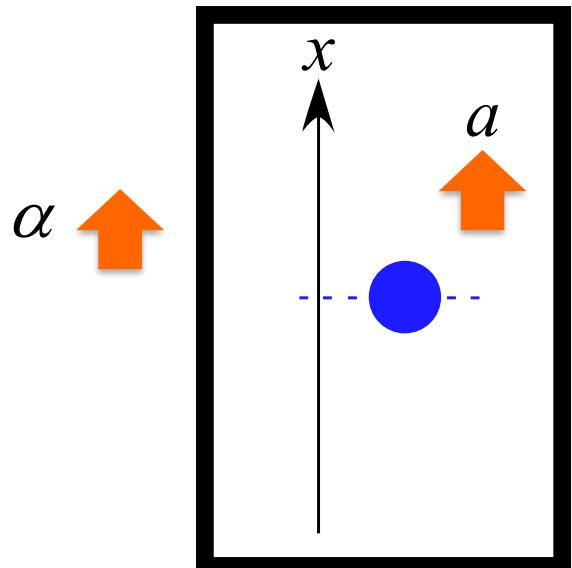
この式は

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

と表すことができ、これを「回転の運動方程式」と呼ぶ。

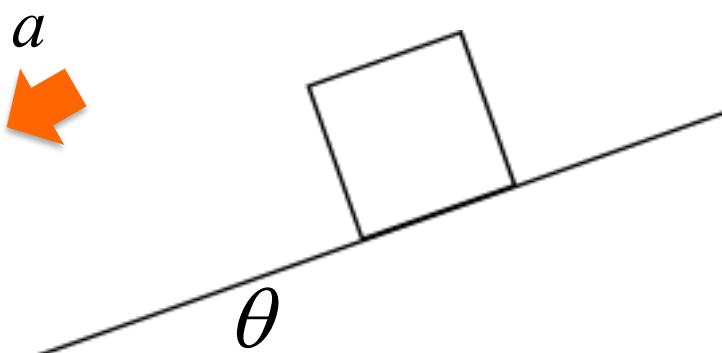
2. 以下の運動について物体に作用する力を図に書き込み、その運動の運動方程式を記述せよ。
いずれの運動も物体の質量は m とし、重力加速度は g とする。

- (1) 一定の加速度 α で上昇するエレベーター内で物体を鉛直投げ上げさせる運動(初速度 v_0)



- (2) 摩擦力が働く斜面を滑り降りる運動

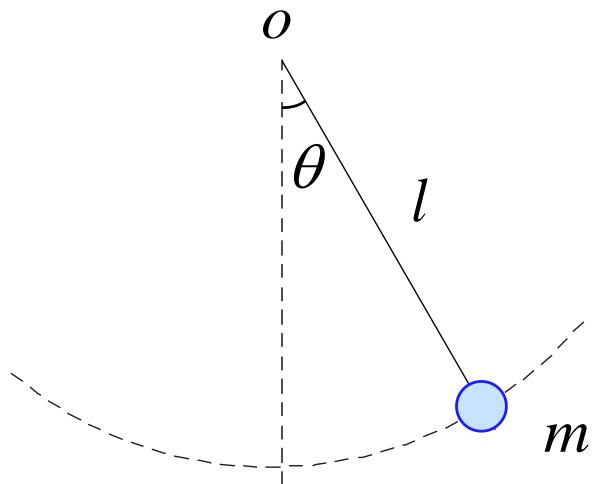
(動摩擦係数は $\mu_k = \frac{f}{N}$ とする)



(3) 単振り子の運動

極座標で軸を考え記述せよ。

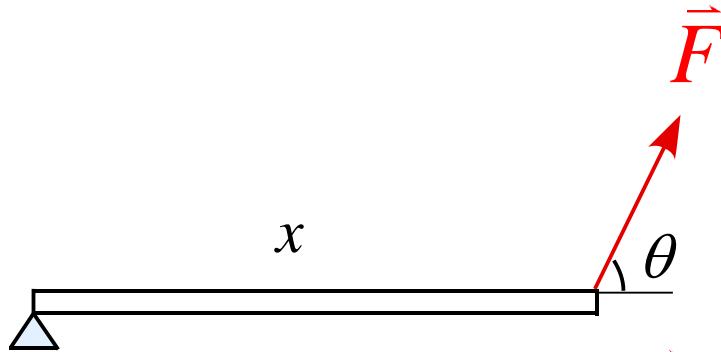
(糸の張力は S とし、 r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ とする。)



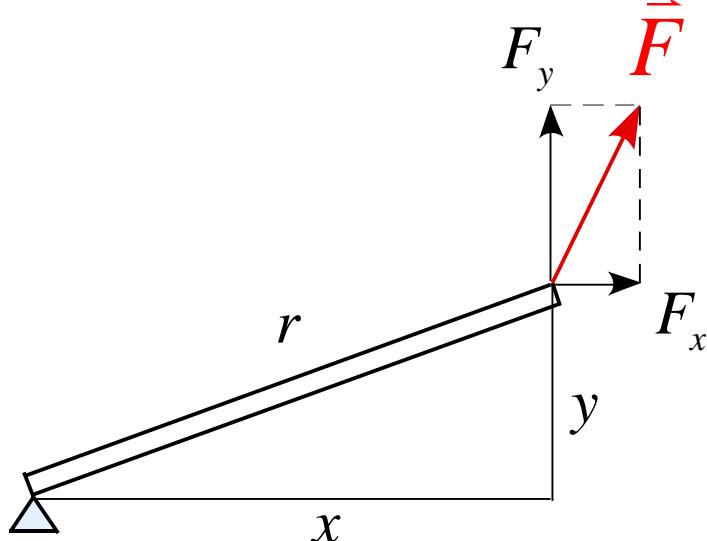
3. 以下の図の力のモーメント \vec{N} を計算し、 $|\vec{N}|$ を求めよ。

但し、棒の質量は無視できるとする。

(1)



(2)



4. 質量 m の物体を地表から鉛直投げ上げする運動を考える。
初速度 $v(0) = v_0$ として以下の間に答えよ。

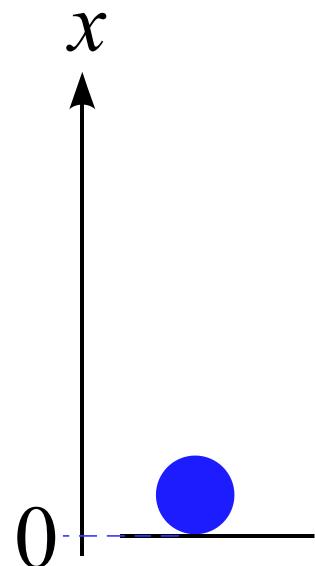
- (1) 運動中に物体に作用する力を書き込め。
- (2) この運動の運動方程式を記述せよ。
- (3) 運動方程式から速度 $v(t)$ を導け。
- (4) 運動方程式から変位 $x(t)$ を導け。
- (5) 再び地表に戻ってくる時刻 t_1 を求めよ。
- (6) ある時刻 t ($t \leq t_1$) での運動エネルギー $K(t)$ を求めよ。
- (7) ある時刻 t ($t \leq t_1$) での位置エネルギー $U(t)$ を求めよ。
- (8) 力学的エネルギー $E(t) = K(t) + U(t)$ ($t \leq t_1$) が時間に依らず一定であることを示せ。
- (9) 運動エネルギー $K(t)$ 、位置エネルギー $U(t)$ 、全力学的エネルギー $E(t)$ をそれぞれ時間 t のグラフで表わせ。
但し、 $t \leq t_1$ とする。
- (10) 地表に衝突する瞬間の速度 v_1 を求めよ。

衝突において力 F が作用したとする。また、この力 F は重力に比べて十分に大きく、衝突中の重力の効果は無視できるとする。

(11) 地表に衝突する瞬間の運動方程式を記述せよ。

(12) この衝突は完全弾性衝突であった。

物体が地表から受けた力積 I を求めよ。



5. 質量 m の物体を高さ h から自由落下させる。

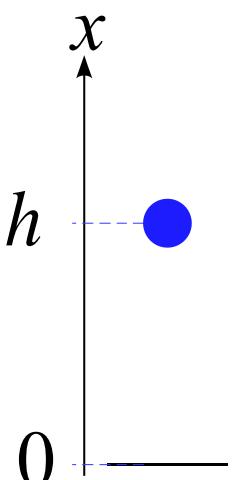
以下の間に答えよ。

但し、重力加速度は g とする。

(1) 物体に作用する力を書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

(3) この運動において力学的エネルギーが保存していることを運動方程式を x で積分することで導き、力学的エネルギーを求めよ。



6. 質量 m の雨滴が落下する運動を考える。

このとき、空気抵抗が働くものとし、

その空気の抵抗力の大きさは $k\nu$ とする。

以下の間に答えよ。

(1) 物体に作用する力を書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

運動方程式を解くと、速度 $\nu(t)$ は $\nu(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$ となる。

(3) $\nu - t$ グラフを書け。また、原点での傾きを求めよ。

(4) 十分時間が経過した状態の速度を記述せよ。

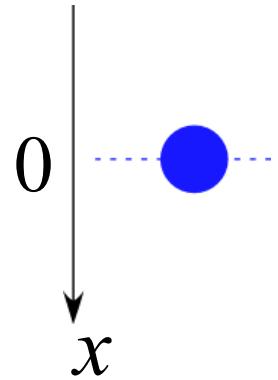
7. 地面となす角 θ の摩擦がある斜面を質量 m の物体がすべりおりる運動を考える。以下の間に答えよ。

但し、動摩擦力は $f = \mu_k N$ として用いてよいとする。

(1) この運動の運動方程式を記述せよ。

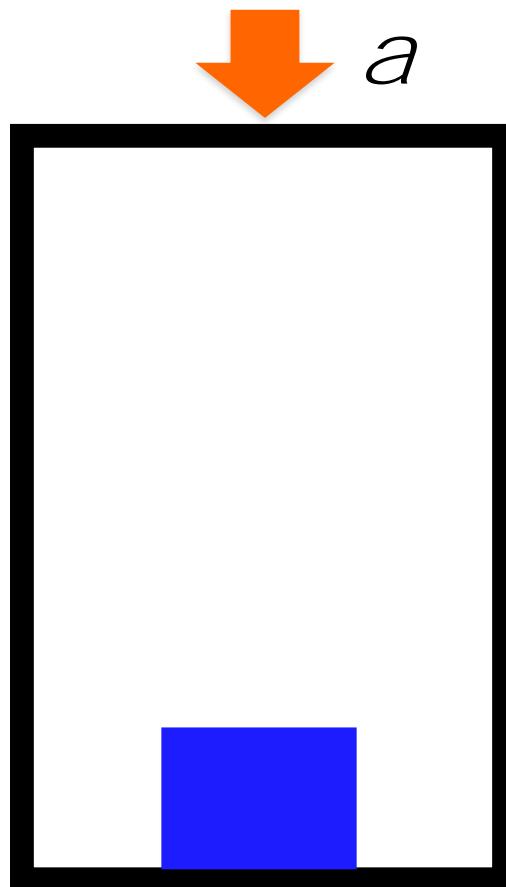
(2) この運動の加速度 a を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

(3) この運動で物体が距離 L を移動したとき、動摩擦力がした仕事 $W_{\text{摩}}$ を求めよ。



8. 一定の加速度 α で下降するエレベーターがある。
このエレベーター内に質量 m の物体が床に置かれている。
以下の間に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること。)

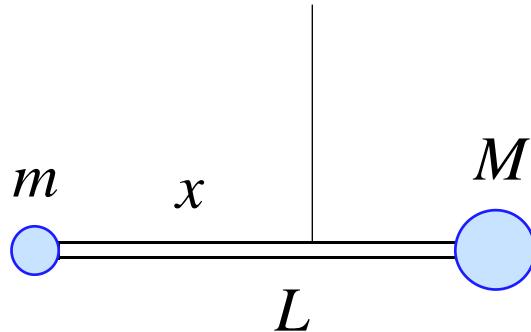
- (1) 物体に作用する力を記入せよ。
- (2) 物体が床から受ける垂直抗力 N を求めよ。
- (3) 物体が無重量になるための条件を求めよ。



9. 図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点が取り付けられ、糸でつるされている。この棒が回転しない条件を考えたい。以下の間に答えよ。

棒の質量を m とした場合

- (1) 糸でつるされている点を支点として、質量 m, M の質点及び棒の力のモーメント \vec{N} をそれぞれ求めよ。
- (2) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。
- (3) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。



10. 物体が半径 r_0 の円周上を速さ v_0 で等速円運動している。 r_0, v_0 は定数である。以下の間に答えよ。

- (1) 速度 \vec{v} と位置ベクトル \vec{r} が直交していることを示せ。
- (2) 速度 \vec{v} と加速度 \vec{a} が直交していることを示せ。
- (3) 加速度の大きさ $|\vec{a}|$ を求めよ。

11. 図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量 m はである。

物体を水平を状態にして放し、円運動させたとする。

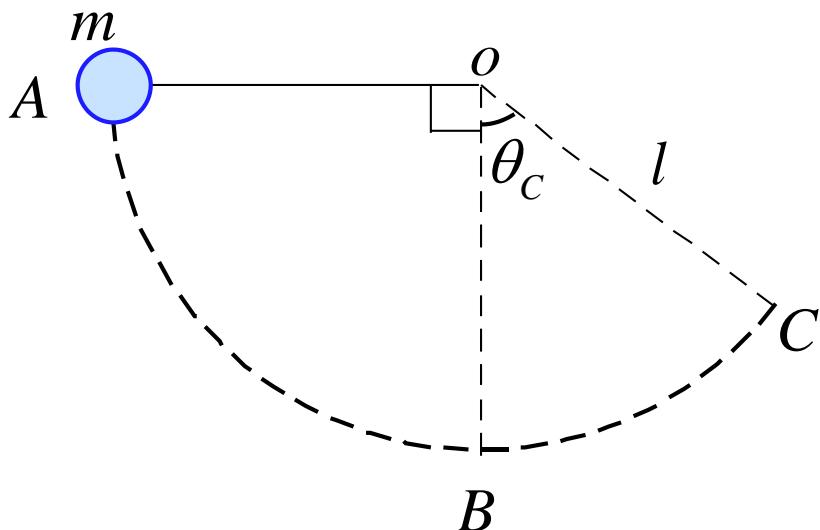
以下の間に答えよ。

ある時刻 t で糸と鉛直線のなす角を θ として用いてよい。

(1) r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

(2) 最下点 B での糸の張力 T_B を求めよ。

(3) 点 C での鉛直線となす角を θ_C とする。
糸の張力 T_C を求めよ。



12. 図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは r 、物体の質量は m である。

最下点で水平方向に初速度 v_0 を与えたとき
以下の間に答えよ。

ある時刻 t で糸と鉛直線のなす角を θ として用いてよい。

(1) r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

(2) 物体が1回転するために必要な初速度 v_0 の条件を求めよ。

