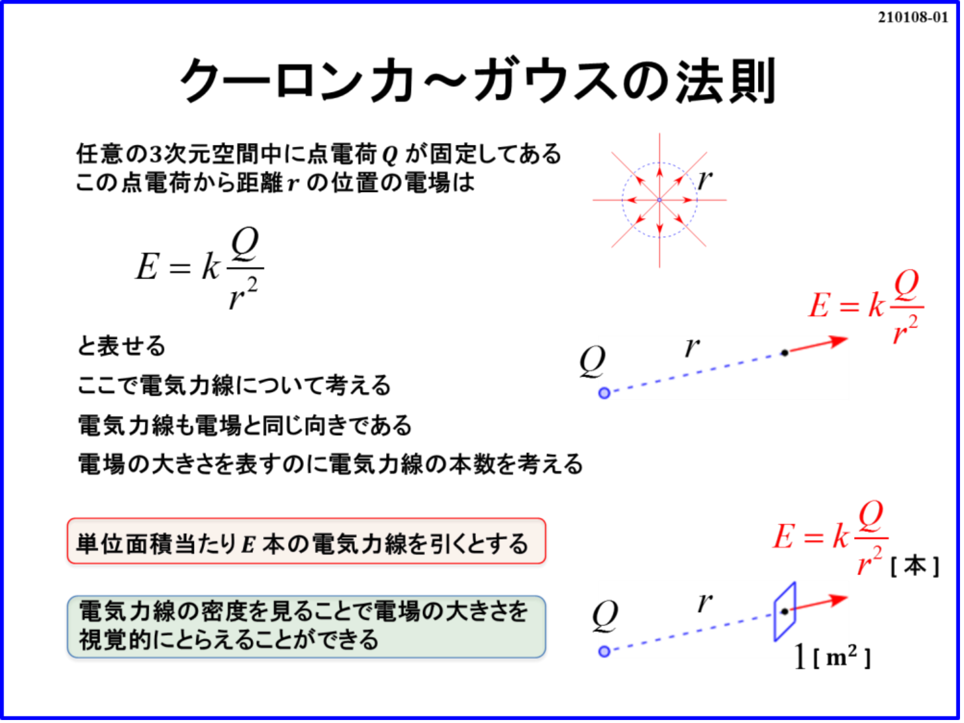


前回の内容では「**電場**」という概念が登場しました。
「**点電荷 Q によって空間自体が変化している状態**」であると考える考え方です。

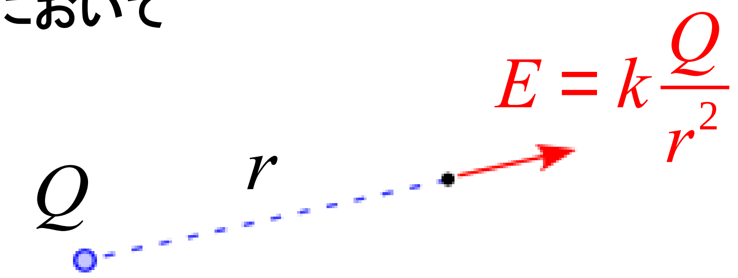
今回は「**電場**」という概念をクーロンの法則(**点電荷**)から導出したものから拡張し
任意の電荷に対して電場がどう生成されるか検討していきます。

結論から言うと、**「クーロンの法則」を拡張すると「ガウスの法則」**になります。
ガウスの法則は最初に提示した**「Maxwellの方程式」の1つ目**に相当します。

それでは実際に説明していきます。

右図のように点電荷 Q が作る電場 E は距離 r の位置において

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$



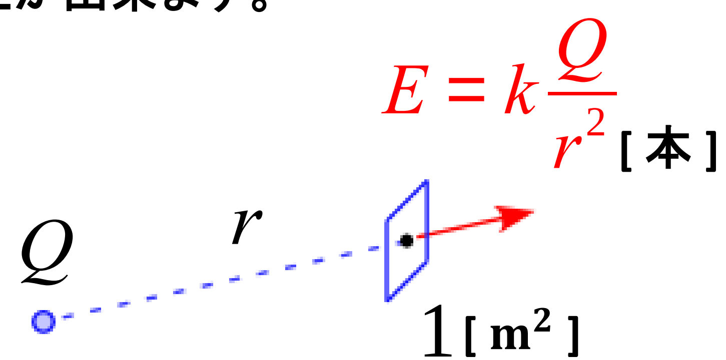
と表されます。

ここで、電気力線はその場所での「電場の向きと強さ」に直結していることを利用します。
電気力線の密度として、「電気力線の本数」という量を考えます。

そこで、この電気力線の本数を次のように定義します。

「単位面積当たり E 本の電気力線を引く」とする。

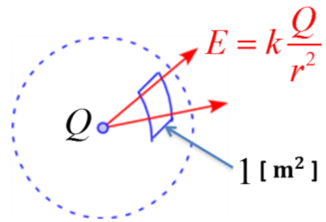
こうすることで、電気力線の密度が視覚的に表現することが出来ます。



この点電荷 Q から出る電気力線の総本数 N を求める
この点電荷から3次元的に放射状に電気力線が出ているので

半径 r の球の面積を S とすると

$$N = E \cdot S$$
$$= k\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$
$$= 4\pi kQ \quad [本]$$



形状に関する量 r が含まれていない → 帯電体の形状に関係ない

ガウスの法則

単位面積当たり E [本] の電気力線を引くとすると
電荷 Q から湧き出す電気力線の総本数 $4\pi kQ$ [本] である

単位面積当たり E 本
面積 S なら $E \times S$ 本

点電荷 Q からは放射状に電気力線が出ています。
この電気力線の総本数 N がどうなっているか検討します。

半径の r 球をイメージ、その球の表面を貫く電気力線の本数を考えます。

$$N = E \cdot S$$

$$= k\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

$$= 4\pi kQ \quad [本]$$

となります。

この式は非常に重要な意味を持っています。
当初、半径 r の球をイメージして計算を行いましたが、
この結果には r が含まれていません。
つまり、「どんな形状を想定してもOK」と言うことになります。
また、距離 r の情報を含んでいないので、点電荷である必要すら無いことを意味しています。

Point

・帯電体の形状は関係ない。(点電荷である必要は無い)

・イメージした閉曲面も任意で良い。

これらについて記述したのが「ガウスの法則」になります。

単位面積当たり E 本の電気力線を引くと定義すると
電荷 Q から湧き出す電気力線の総本数は $4\pi kQ$ 本 である。

$k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ とすると $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ 本となる

コンデンサー

2枚の平面金属極板を平行に設置したものを考える
更に電池を接続し、図のような回路にした

電池は金属板Aの自由電子を金属板Bへ運ぶ

↓

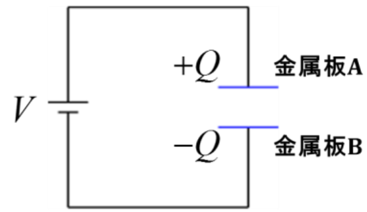
金属板はそれぞれ正負に帯電

↓

A, B の電位差が電池の電位差と等しくなる

↓

自由電子の移動が止まる



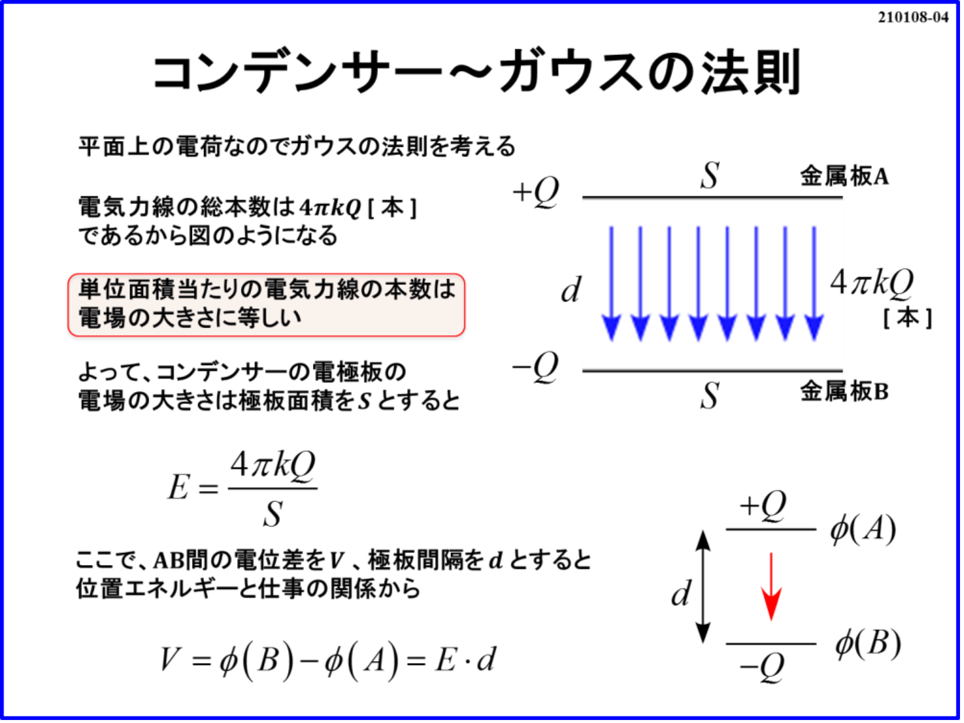
電池を切り離しても電荷は失われない(A上の電荷とB上の電荷は引き合う為)
電気(電荷)を蓄える装置
金属板に蓄えられる電気量は互いに大きさが等しく、異符号の電気量

ここでは「コンデンサー」という装置について説明します。
「コンデンサー」は様々な電子機器の中で使われているものです。
ここでは最もシンプルな形の「平行板コンデンサー」を基に解説します。

まずは「コンデンサー」の仕組みについて説明します。

金属板ABそれぞれには時間と共に電子が溜まっていきます。
金属板Aにはプラスの電荷が、金属板Bにはマイナスの電荷が帯電します。
ある程度時間が立つと金属板AB間の電位差が無くなり、電子の移動が止まります。
この状態になった後、電池を切り離しても電荷が金属板ABに帯電した状態を維持します。

この様に、「電荷を蓄積することができる装置」を「コンデンサー」と呼びます。



さて、ここで「コンデンサー」に対してガウスの法則を適用してみましょう。

ガウスの法則は「形状に関わらず、電荷 Q から湧き出る電気力線の本数は $4\pi kQ$ 本」
であるので電極板の面積を S とすると電場 E の大きさは

$$N=E\cdot S=4\pi kQ$$

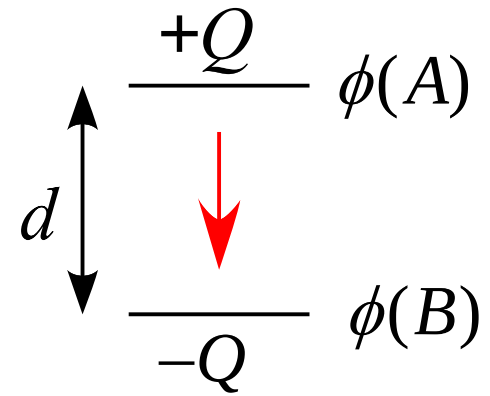
$$E=\frac{4\pi kQ}{S}$$

となります。

一方、電極板ABの電位差 V に着目すると
位置エネルギーと仕事の関係から

$$V = \phi(B) - \phi(A) = E \cdot d$$

と表すことができます。



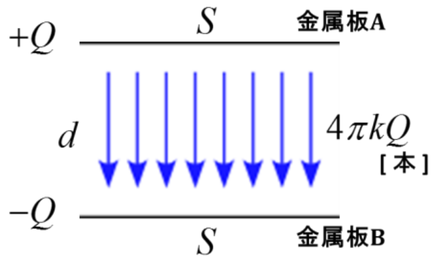
210108-05

コンデンサー～ガウスの法則

従って、電場 E は

$$E=\frac{4\pi kQ}{S}=\frac{V}{d}$$

となる



蓄えられる電気量 Q は

$$Q=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}\cdot V$$

となり、AB間の電位差 V に比例していることがわかります
この比例定数は

$$C=\boxed{\frac{1}{4\pi k}}\frac{S}{d}\quad [\mathrm{F}]$$

静電容量
キャパシタンス

と表される

真空中では「真空誘電率 ε_0 」で表される

従って、この2式より

$$E=\frac{4\pi kQ}{S}=\frac{V}{d}$$

となります。
蓄えられる電荷の量 Q は

$$Q=\frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}V$$

となります。

この式は電気量 Q が電極板ABの電位差に比例していると見ることが出来ます。
この比例定数を C と表すと

$$Q = \frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}V = CV$$

となります。
比例定数 C は

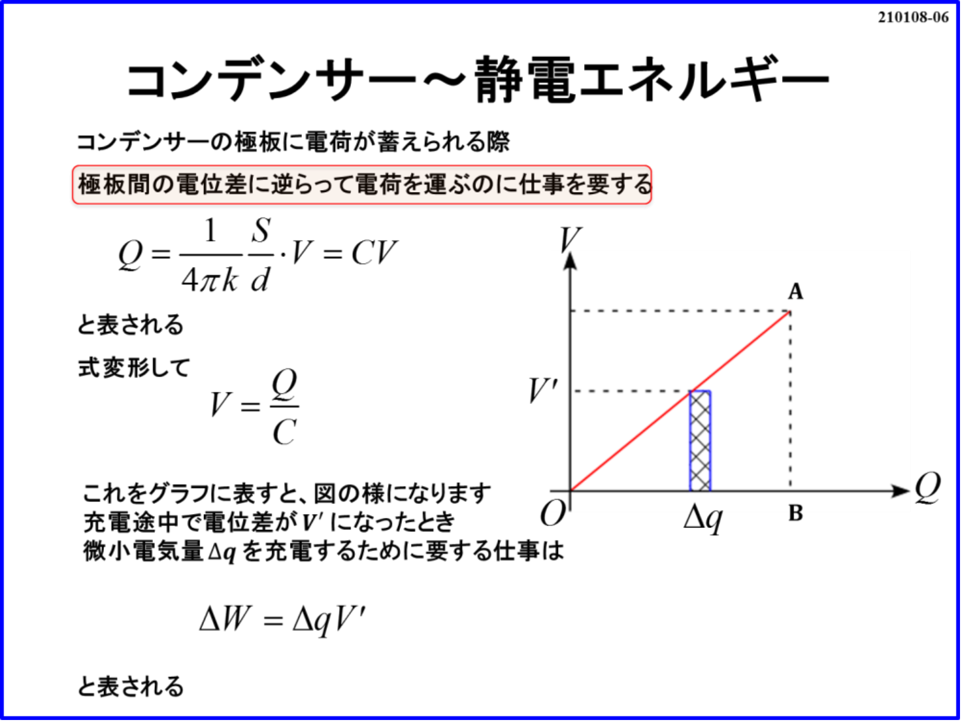
$$C = \frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d}$$

であり、「静電容量 (キャパシタンス)」と呼ばれます。
静電容量 C は面積 S に比例し、距離 d に反比例すると言えます。

また、$\frac{1}{4\pi k}$ の部分は「誘電率 ε (イプシロン)」と呼ばれ、
特に真空中では「**真空誘電率 ε_0**」と呼びます。
これを用いるとクーロン定数 k は

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

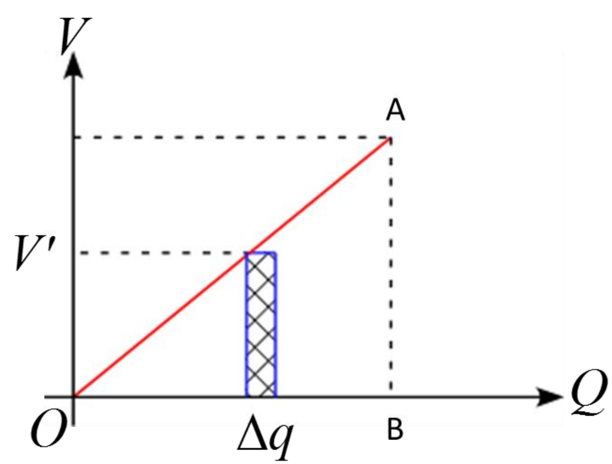
と表すことができます。



続いて、コンデンサーのエネルギーについて検討します。
このエネルギーは電極板間での電荷の移動に際して生ずる仕事に依るものになります。
よって、$V-Q$ グラフを考えます。
電位差 V は

$$V=\frac{1}{C}Q$$

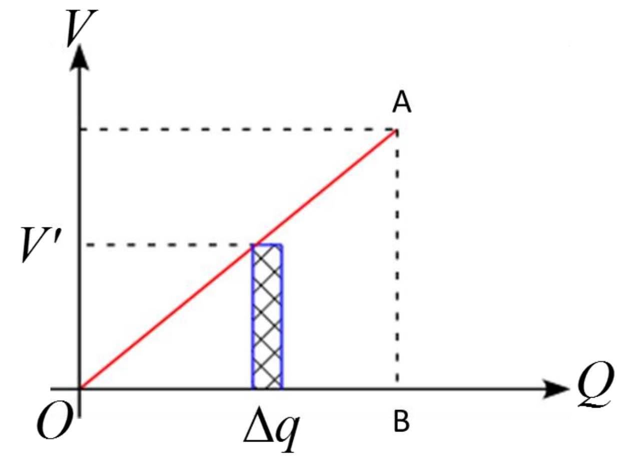
と表され、静電容量 C は定数であることから
$V-Q$ グラフは比例関係で表すことができます。



微小電気量 Δq が充電されるために要した仕事 ΔW は

$$\Delta W = \Delta q V$$

と表されます。
これを $Q=0$ から $Q=Q$ まで足し合わせれば(積分)
良いことになります。



コンデンサー～静電エネルギー

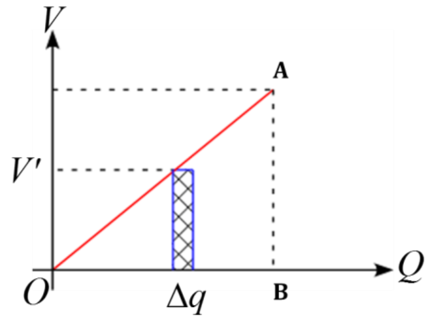
よって、電位差 V まで充電に要する全仕事は

$$W = \frac{1}{2}QV$$

従って、コンデンサーの静電エネルギーは

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

となる



従って、全仕事 W は $\triangle OAB$ の面積に相当し

$$W = \frac{1}{2}QV$$

となります。
この仕事がコンデンサーのエネルギー「**静電エネルギー U**」であり
$Q = CV$ より

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

と表すことができます。

コンデンサー

$$Q = CV$$

$$C = \frac{1}{4\pi k}\frac{S}{d} = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{Q^2}{2C}$$

Q：蓄えられる電気量

C：静電容量

V：電位差

S：極板面積

d：極板間距離

ε_0：真空誘電率

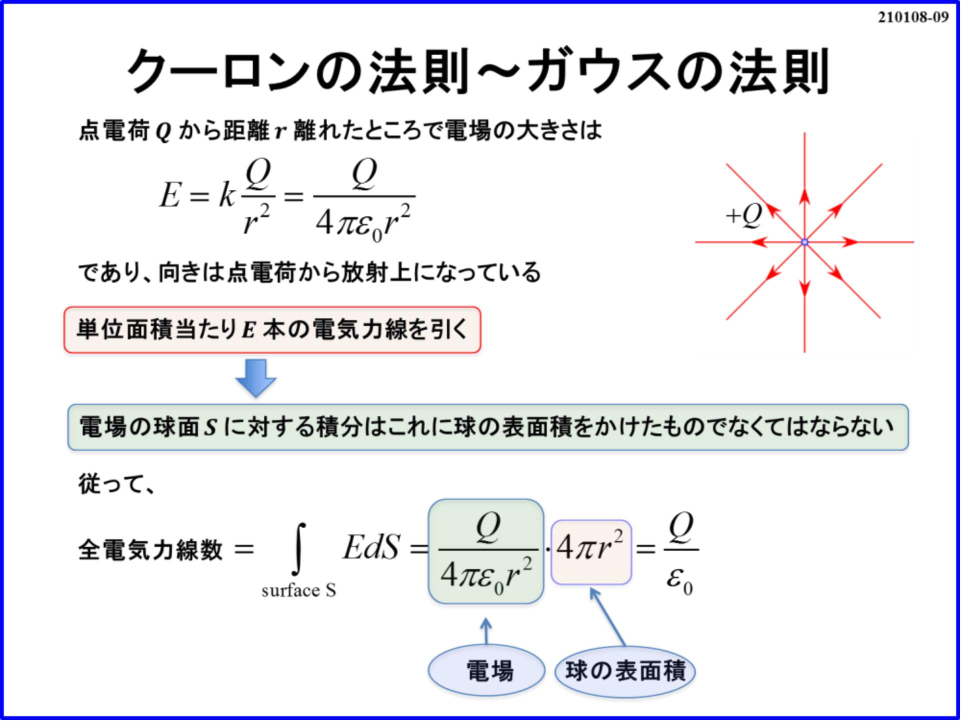
k：クーロン定数

U：静電エネルギー

コンデンサー関連の式をまとめたものになります。

全ての式を覚える必要はないです。
$Q = CV$ ぐらいは覚えてほしいかな。

後、文字で当てた物理量が多いので、何の文字が何を指しているか
押さえておくと良いでしょう。



ここからはガウスの法則の話に戻ります。

ガウスの法則は

> 単位面積当たり E 本の電気力線を引くと定義すると
> 電荷 Q から湧き出す電気力線の総本数は $4\pi kQ$ 本である。

と記述しました。
これをどのように運用すれば良いのかという説明をしていきます。
「ガウスの法則」は主として電場を求める時に用います。
その理由について説明していきます。

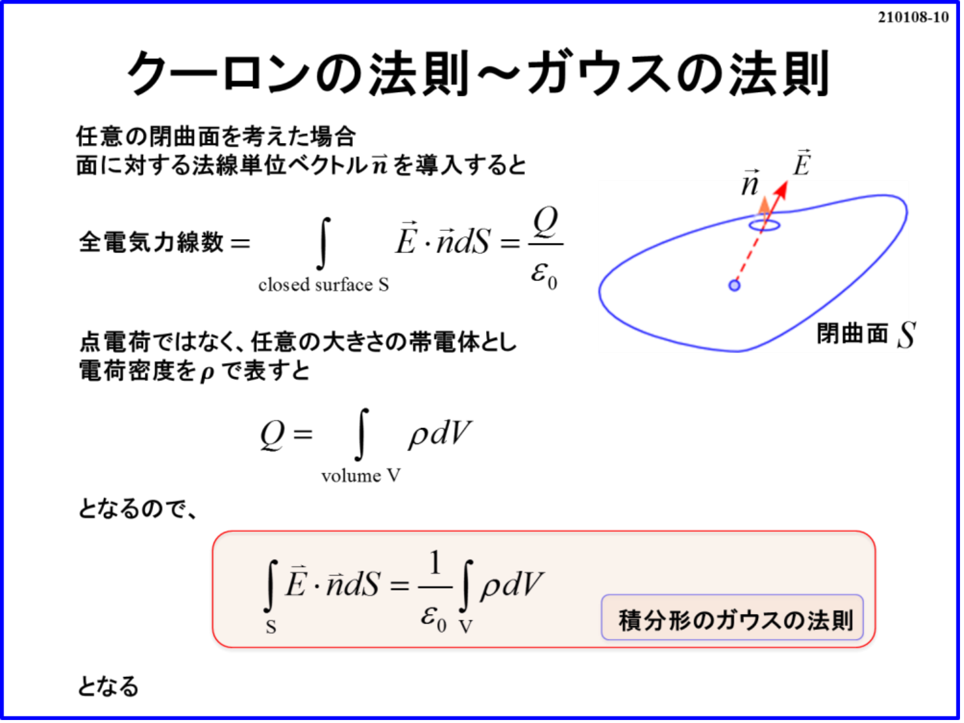
点電荷 Q から距離 r の位置での電場の大きさ E は

$$E = k\frac{Q}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$$

となります。
ここで、距離 r の位置での閉曲面 S として半径 r の球をイメージし、
その球の表面を貫く電気力線の総本数 N を求めると

$$N = \int_S EdS = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

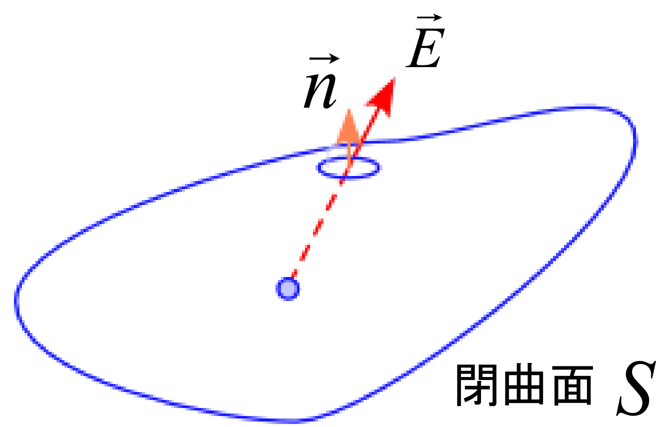
となります。



$$
\begin{aligned}
\vec{E}\cdot\vec{n} &= |\vec{E}||\vec{n}|\cos\theta \\
&= |\vec{E}|\cdot 1\cdot\cos\theta \\
&= E\cos\theta
\end{aligned}
$$

総本数 N には距離 r の情報は含まれないので閉曲面 S を球の代わりに任意の閉曲面を考えてもOKとなります。

右図のような任意の閉曲面を考え、
表面に対する法線の単位ベクトル $\vec{n}$ を導入すると



$$
N = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}
$$

と表すことができます。

また、帯電体は任意の大きさとし、電荷密度を ρ とすると

$$Q = \int_V \rho dV$$

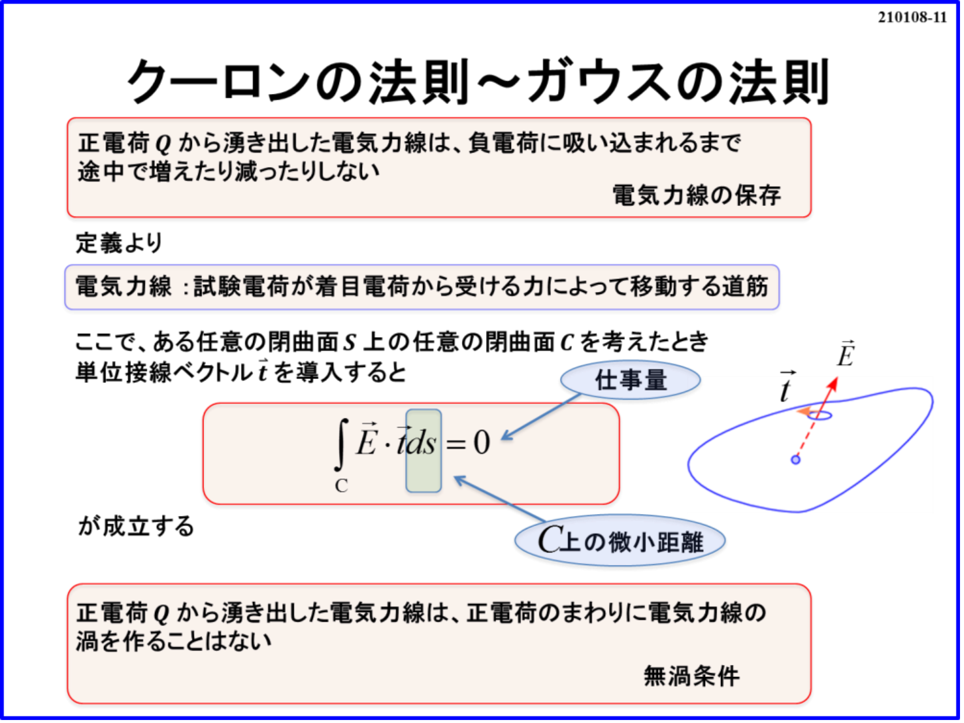
と表され、

$$\boxed{N = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho dV}$$

となり、これを「積分形のガウスの法則」と呼びます。

ここでは、**電気量 Q を単位体積あたりの密度 ρ** を用いて表しましたが、
状況によっては「単位長さあたりの密度」や「単位面積あたりの密度」を
用いて表すこともあります。

欲を言えば、この式「積分形のガウスの法則」を覚えて欲しいけれども
期末テストでは式を与える予定なので無理に覚えなくても良いです。



ここでは任意の閉曲面 S において、閉曲面上に任意の閉曲線 C を考え、
その周りを一周分積分をする場合を考えます。

電場 E の閉曲線 C についての距離積分を行うことになります。
すると「ゼロ」になります。

これは、「電気力線が渦状に形成されることは無い」ことを意味しています。
これを「無渦条件」と言います。

ガウスの法則～積分形

以上をまとめると

任意の面 S を垂直に横切る電気力線の総数は内部電気量に依存し、比例定数は $\frac{1}{\varepsilon_0}$ である

$$\underbrace{\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}dS}_{\text{電気力線の総数}} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underbrace{\int_V \rho dV}_{\text{内部電気量}}$$

正電荷のまわりに電気力線の渦はできない

$$\int_C \vec{E}\cdot\vec{t}ds = 0$$

$$\vec{E}\cdot\vec{n} = |\vec{E}||\vec{n}|\cos\theta$$

$$= |\vec{E}|\cdot 1\cdot\cos\theta$$

$$= E\cos\theta$$

「積分形のガウスの法則」をまとめたものになります。

欲を言えば、この式「積分形のガウスの法則」を覚えて欲しいけれども
期末テストでは式を与える予定なので無理に覚えなくても良いです。

(参考) 210108-13

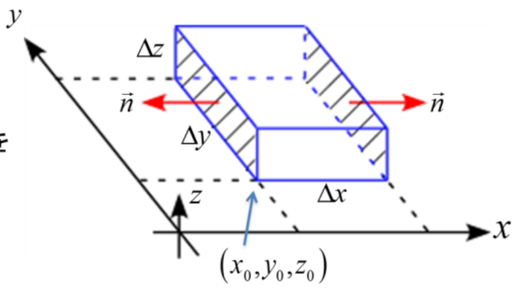
ガウスの法則～微小部分

図のような直方体を考える
斜線の2つの面に着目する

電場 E の面に垂直な成分は E_x
それぞれの位置での電場の成分を

$$E_x(x_0) \quad E_x(x_0+\Delta x)$$

と表すとする



x 方向に湧き出す電気力線の総数 N_x は

$$N_x = E_x(x_0+\Delta x)\Delta y\Delta z - E_x(x_0)\Delta y\Delta z$$
$$= \left\{E_x(x_0+\Delta x) - E_x(x_0)\right\}\Delta y\Delta z$$
$$= \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x \cdot \Delta y\Delta z$$

近似式(テーラー展開)

$$E_x(x_0+\Delta x) \approx E_x(x_0) + \left[\frac{dE_x(x)}{dx}\right]_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

ここからは「微分形のガウスの法則」の導出になります。

数学的に難しい・・・訳ではないですが、
未学習の内容となりますので紹介のみにしておきます。
スライドを流し読む程度で良いと思います。

というか、物理学科の学生でも必死に頑張るような内容なのです。

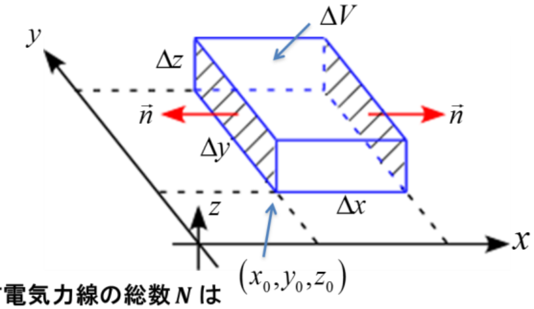
どうしても自力でチャレンジしてみたいという学生が多い場合は別途解説しますが
通常の授業ですとスルー状態です。

ガウスの法則～微小部分

同様に、y, z 方向については

$$N_y = \frac{\partial E_y}{\partial y}\Delta y \cdot \Delta x \Delta z$$

$$N_z = \frac{\partial E_z}{\partial z}\Delta z \cdot \Delta x \Delta y$$



よって、この直方体から湧き出す電気力線の総数 N は

$$\begin{aligned} N &= N_x + N_y + N_z \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta x \Delta y \Delta z \\ &= \left(\nabla \cdot \vec{E}\right)\Delta V \end{aligned}$$

微小体積 ΔV から湧き出す電気力線の総数

となる

ガウスの法則～微小部分

任意の体積 V に対しては

$$N_{\mathrm{total}} = \int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \vec{E} dV$$

ここで、

$$\text{全電気力線数} = \int_{\mathrm{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathrm{V}} \rho dV$$

であるから、

$$\int_{\mathrm{S}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \vec{E} dV$$

となり、2つの式を比較すると

$$\int_{\mathrm{V}} \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_{\mathrm{V}} \rho dV$$

ガウスの法則～微小部分

被積分関数を比較すると

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

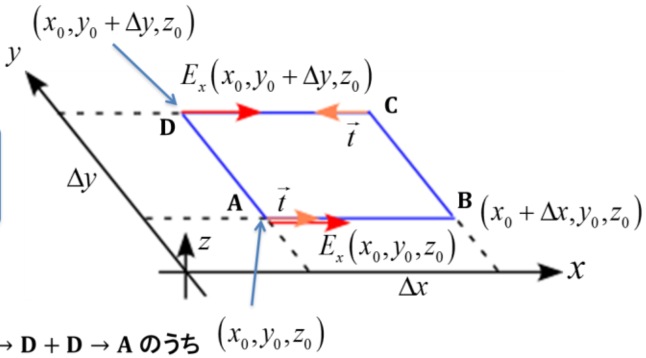
書きかえると

$$\mathrm{div}\ \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

と表すことができる

ガウスの法則～微小部分

無渦条件についても微小部分を考えると



図のように微小な長方形1周の電場について考える

x 成分では
A → B + B → C + C → D + D → A のうち
A → B + C → D のみを考えればよく

$$E_x(x_0, y_0, z_0)\cdot\Delta x - E_x(x_0, y_0+\Delta y, z_0)\cdot\Delta x$$

$$= \left\{E_x(x_0, y_0, z_0) - E_x(x_0, y_0+\Delta y, z_0)\right\}\cdot\Delta x$$

ガウスの法則～微小部分

$$
=-\left\{\frac{E_x\left(x_0,y_0+\Delta y,z_0\right)-E_x\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\Delta y}\Delta y\right\}\cdot\Delta x
$$

$$
=-\frac{\partial E_x}{\partial y}\Delta y\Delta x
$$

y 成分では
B → C + D → A のみを考えればよく

$$
E_y\left(x_0+\Delta x,y_0,z_0\right)\cdot\Delta y-E_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\cdot\Delta y
$$

$$
=\left\{E_y\left(x_0+\Delta x,y_0,z_0\right)-E_y\left(x_0,y_0,z_0\right)\right\}\cdot\Delta y
$$

$$
=\left\{\frac{E_y\left(x_0+\Delta x,y_0,z_0\right)-E_y\left(x_0,y_0,z_0\right)}{\Delta x}\Delta x\right\}\cdot\Delta y
$$

$$
=\frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x\Delta y
$$

ガウスの法則～微小部分

従って、長方形1周分は

$$\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y=\left(\nabla\times\vec{E}\right)_z\Delta x\Delta y=\left(\nabla\times\vec{E}\right)_z\Delta S$$

となり、∇と電場ベクトル$\vec{E}$の外積のz成分として表すことができる
全ての成分について計算し、任意の面積Sに対して積分を行うと

$$\int_{\mathrm{S}}\left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

と書くことができる

従って、

$$\int_{\mathrm{C}}\left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds=\int_{\mathrm{S}}\left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\vec{n}\,dS=0$$

ガウスの法則～微小部分

従って、

$$\boxed{\nabla \times \vec{E} = 0}$$

が得られる

書きかえると

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0}$$

と表すことができる

ガウスの法則～微分形

以上をまとめると

微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \left(\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)$$

微分形の無渦条件

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \qquad \left(\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0\right)$$

この結果も、数学的に知らない記号がいっぱいあると思うので読むだけでOKです。

ガウスの定理～ストークスの定理

積分系と微分形を関連付けた式

$$\int_{S} \vec{E}\cdot\vec{n}dS = \int_{V} \nabla\cdot\vec{E}dV$$

$$\int_{C} \left(\vec{E}\cdot\vec{t}\right)ds = \int_{S} \left(\nabla\times\vec{E}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

は一般のベクトル $\vec{A}$ に対しても成立する

$$\int_{S} \vec{A}\cdot\vec{n}dS = \int_{V} \nabla\cdot\vec{A}dV$$

ガウスの定理 (面積積分と体積積分の関係)

$$\int_{C} \left(\vec{A}\cdot\vec{t}\right)ds = \int_{S} \left(\nabla\times\vec{A}\right)\cdot\vec{n}\,dS$$

ストークスの定理 (線積分と面積積分の関係)

ラプラスの方程式

微分形のガウスの法則

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

に、電場と静電ポテンシャルの関係式

$$\vec{E} = -\nabla \phi$$

を適用し、成分を考えると

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \vec{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(E_x, E_y, E_z \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}, -\frac{\partial \phi}{\partial y}, -\frac{\partial \phi}{\partial z} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)
\end{aligned}$$

ラプラスの方程式

従って、

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \phi$$

ここで、演算子 ∇^2 を

∇^2:ラプラシアン

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

と定義すると

$$\nabla \cdot \vec{E} = -\nabla^2 \phi$$

従って、

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

ポアソンの式 (静電ポテンシャルと電荷の関係式)

特に、真空中に電荷が存在しない場合

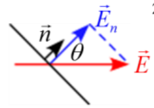
$$\nabla^2 \phi = 0$$

ラプラスの方程式

が得られる

210108-25

ガウスの法則～ポイント



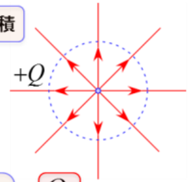
ガウスの約束事

単位面積当たりの電気力線の本数を E [本] とする

全電気力線数 $= E \cdot S$

単位面積当たりの本数 × 全面積

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot S$$



例えば、半径 r の球を閉曲面としたら

$$\text{全電気力線数} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

即ち、$+Q$ の電荷から出てくる全電気力線数 Q/ε_0 [本] はある

ガウスの法則は

$$E \cdot S = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

と書ける

電場が求められる

一般化

注意点

・E は電場の大きさだが、面に垂直な成分

$$E_n = \vec{E} \cdot \vec{n} = |\vec{E}||\vec{n}|\cos\theta$$

$$\int_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = E_n \cdot S$$

・電荷 (電気量) は点電荷でない場合は

体積密度 : ρ $\quad Q = \int_V \rho dV = \rho \cdot V$

面密度 : σ $\quad Q = \int_S \sigma dS = \sigma \cdot S$

線密度 : ρ $\quad Q = \int_l \rho dl = \sigma \cdot l$

$$\text{全電気力線数} = \int_{\text{Surface}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_{\text{Volume}} \rho dV$$

$$E_n \cdot S = \frac{1}{\varepsilon_0} \times \text{全電気量}$$

最後のまとめの部分はよく理解しておきましょう。

大事な事は、

「電気力線の本数をカウントする時、面に垂直な成分のみカウントする」ということです。

なので、内積を利用して表記することになる訳です。

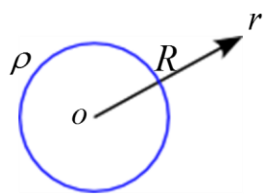
ガウスの法則～例題

図のように、半径 R の球の内部に単位体積あたり電気量 $\rho(>0)$ の荷電粒子が一様に分布しているとする。
以下の問に答えよ。

(1) この球の中心から距離 $r(\geq R)$ での電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

(2) この球の中心から距離 $r(\leq R)$ での電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

(3) 球の内外につくる静電場を距離 r の関数としてグラフに表せ。



このモデルは今回の宿題(後半)と同じモデルになります。
宿題の設問を進めていくと解けるようになっています。

重要な事は閉曲面の取り方

(1) この球の中心から距離 $r(\geq R)$ でのガウスの法則を適用した式を記述せよ。

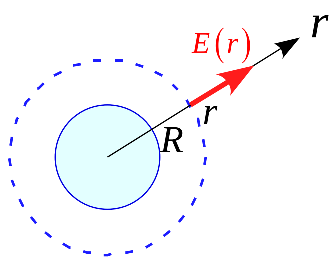
(2) この球の中心から距離 $r(\geq R)$ での電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

(3) この球の中心から距離 $r(\leq R)$ でのガウスの法則を適用した式を記述せよ。

(4) この球の中心から距離 $r(\leq R)$ での電場の大きさ $E(r)$ を求めよ。

(5) 球の内外につくる静電場を距離 r の関数としてグラフを描け。

$r \geq R$

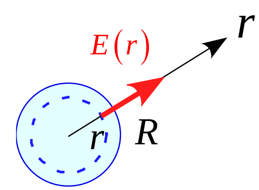


$$\int_s \vec{E}\cdot\vec{n}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3\rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

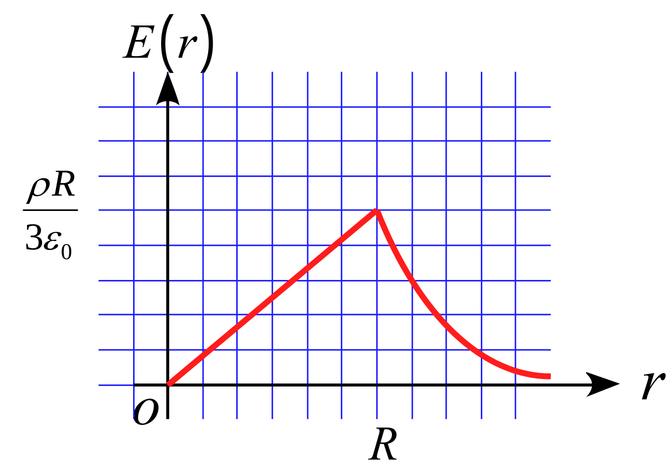
$r \leq R$



$$\int_s \vec{E}\cdot\vec{n}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV$$

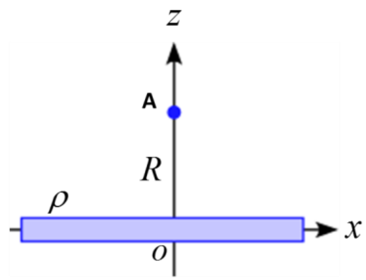
$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi r^3\rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}r$$



ガウスの法則～線電荷

単位長さあたりの電気量(線密度)が ρ である無限に長い直線上の電荷がある。
直線から距離 R にある点Aでの電場の大きさを求めよ。
但し、線の太さは無視できるものとする。



このモデルを前回はクーロンの法則を用いて考えましたが、
ここではガウスの法則を用いて求めて下さい。

このモデルは今回の宿題(前半)と同じモデルになります。
宿題の設問を進めていくと解けるようになっています。

学籍番号	氏名

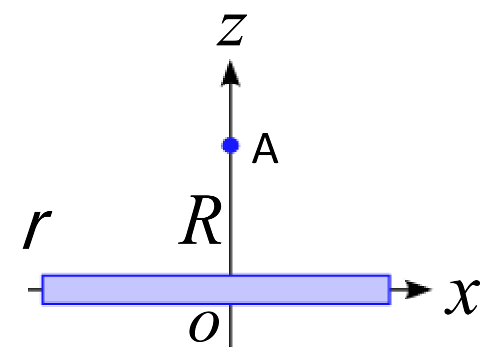
宿題 第11回

200703-01

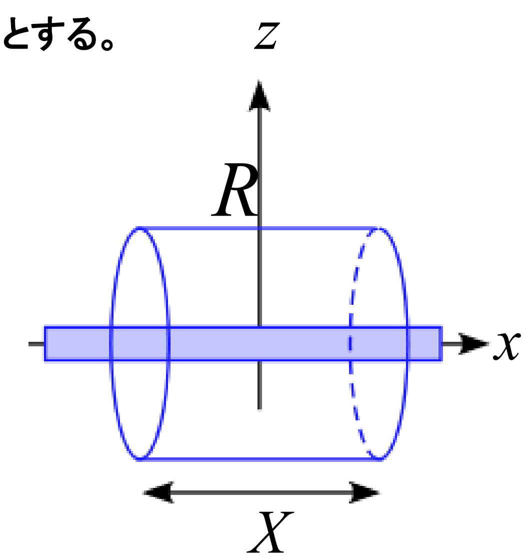
単位長さあたりの電気量(線密度)が r である無限に長い直線上の電荷がある。

但し、線の太さは無視できるものとし、クーロン定数は $k=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ とする。

直線から距離 R にある点Aでの電場の大きさをガウスの法則を使って求めよう。



ガウスの法則を適用する閉曲面を右図の様に左右に長さ X 、半径 R の円筒とする。



(1) この閉曲面内の電気量を長さ X と線密度 ρ を用いて表せ。 $Q=X\rho$

(2) この閉曲面を貫く電気力線は (1) の電気量を用いると

円筒の側面部分から合計 $\boxed{\dfrac{\rho X}{\varepsilon_0}}$ 本であり、

円筒の左右の面(円筒の底面)から $\boxed{0}$ 本である。

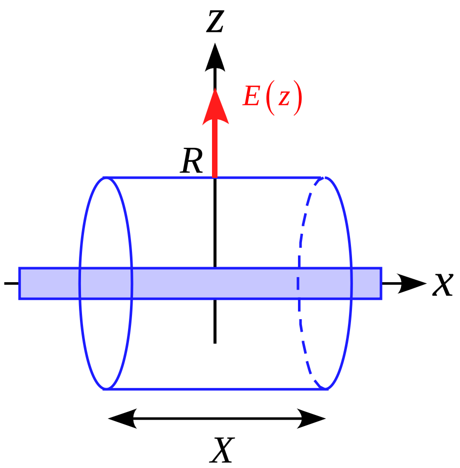
よって、この円筒に対するガウスの法則は

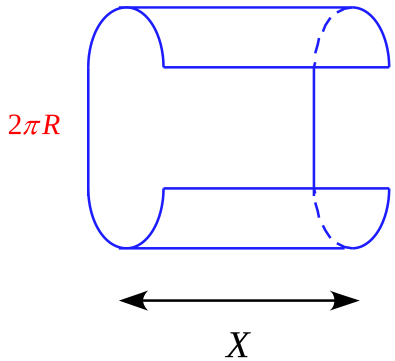
$$\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}ds=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_l \rho dl$$

(3) $\boxed{E(z)\cdot 2\pi RX=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\rho X}$ と表せる。

従って、求める電場 E は

(4) $\boxed{E=\dfrac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 R}}$ となる。





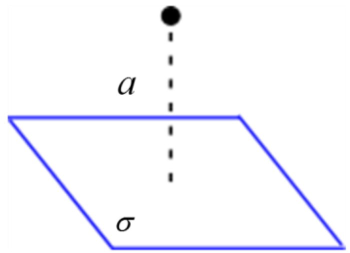
$$\int_s \vec{E}\cdot\vec{n}ds = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_l \rho dl$$

$$E(z)\cdot 2\pi RX = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho X$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

ガウスの法則～面電荷

無限に広い平面がある。
この平面上に面密度 σ で一様に電荷が分布しているとする。
この平面から距離 a だけ離れた点での電場の大きさを求めよ。
但し、真空誘電率は ε_0 とする。



このモデルを前回はクーロンの法則を用いて考えましたが、
ここではガウスの法則を用いて求めて下さい。

この問題は次回の宿題と重なるので次回に扱います。

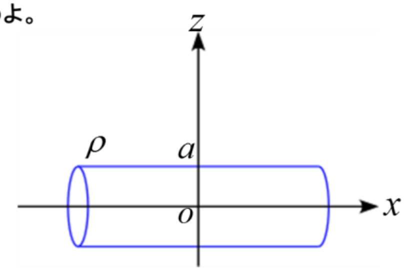
まずは各自でやってみて下さい。

ガウスの法則～円筒

図のような半径 a の無限に長い円筒の表面に単位長さ当たり ρ の電荷量が一様に分布している。

(1) 円筒の外側 $z(\geq a)$ に生ずる電場を求めよ。

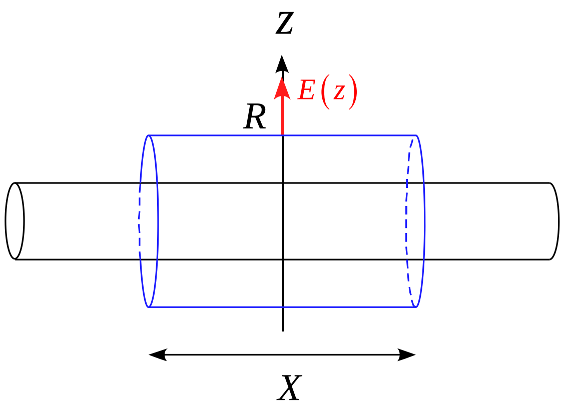
(2) 円筒の内側 $z(< a)$ に生ずる電場を求めよ。



このモデルは線状の電荷に太さがあり、電荷が表面に帯電している状態のモデルになります。

このモデルもガウスの法則を適用する閉曲面をうまく設定することが大事です。

$z \geq a$

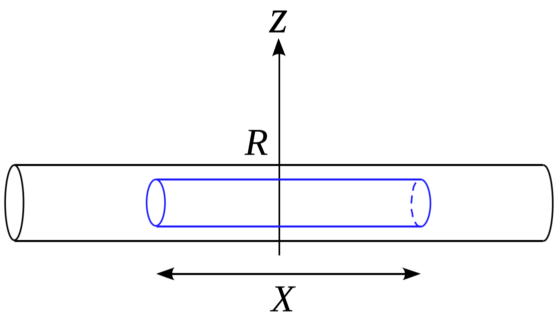


$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_l \rho dl$$

$$E(z) \cdot 2\pi z X = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho X$$

$$E(z) = \frac{\rho}{2\pi \varepsilon_0 z}$$

$z < a$



$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{n} ds = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_l \rho dl$$

$$E(z) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 0$$

$$E(z) = 0$$