210115-01

電流～電荷の移動

電荷が停止している → 静電現象

移動する電荷 ＝ 電気が流れる / 荷電粒子の流れ → 電流

電荷の流れが一定　：定常電流

電流の定義
任意の導線断面を単位時間に通過する電気量

任意の断面をΔt [s] の間に、ΔQ [C] の電荷が通過したとき、その電流の大きさI [A] は

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

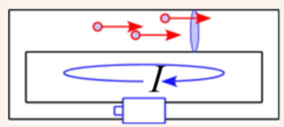
スカラー量

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = [\mathrm{A}]$$

$\Delta t \to 0$ の極限において

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

と定義される



これまでの講義では「電荷が静止状態」の現象について検討をしてきました。
所謂、「静電現象」と呼ばれる現象です。

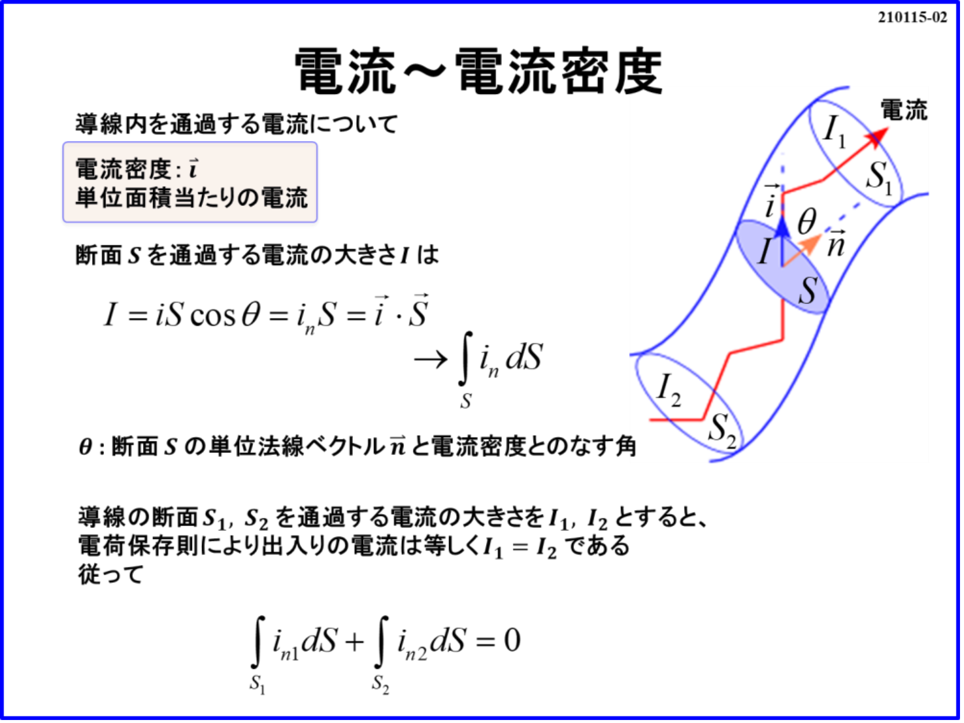
ここではこの電荷が動いた場合について検討していきます。
電荷が動くと流れができます。この流れを「電流」と呼びます。
電荷の流れが一定の場合は「定常電流」と呼びます。

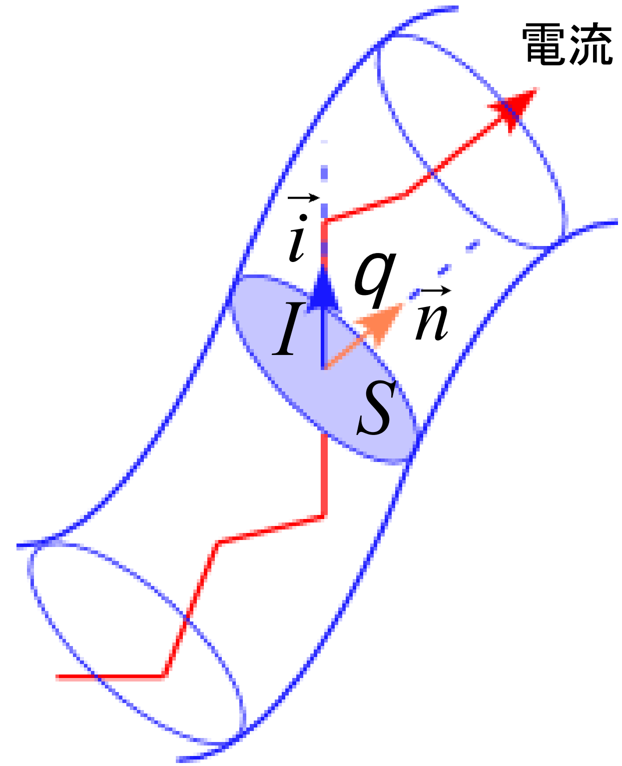
電荷の流れである「電流」を定義は
「任意の導線断面を単位時間あたりに通過する量」となります。

従って、電流 I の定義として

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

となります。





一般的な導線内を通過する電流について考えます。
ここで、「単位面積あたりの電流 $\vec{i}$ を電流密度と定義」します。

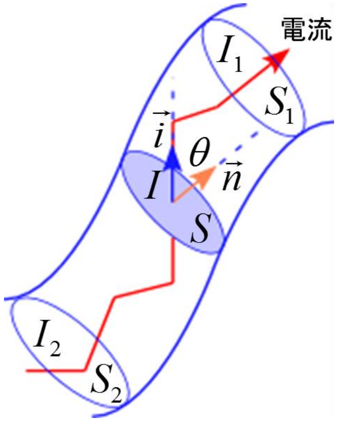
導線内のある断面積 S を通過する電流 I の大きさを考えます。
電流密度 $\vec{i}$ は断面積 S を通過する際に様々な大きさや向きがあります。
この時、断面積 S を通過する量としてカウントするのは面に対して垂直な成分のみになります。
よって、断面積 S を通過する電流の大きさ I は

$$I = i\cos\theta\cdot S = i_n S = \vec{i}\cdot\vec{S}$$

となります。

つまり、電流 I は電流密度 $\vec{i}$ と断面積 $\vec{S}$ の内積で表すことが出来ます。

導線の出口を断面積 S_1 とし、入り口を断面積 S_2 とすると



$$\int_{S_1} i_{n1} dS + \int_{S_2} i_{n2} dS = 0$$

となります。
ざっくり言うと
「断面積 S_2 で入った分と断面積 S_1 で出た分の量は同じ」となります。
これは「電荷保存則」から言えるのですが、
この法則は今の処、反例が見つかっていなく経験的事実から成り立つ法則となっています。

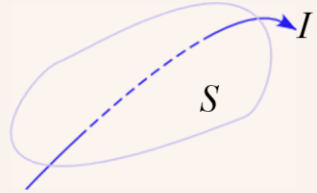
電流～電流の保存側

任意の閉曲面 S 上で電流を面積分とすると

$$\int_S i_n dS = 0$$

である

電流の保存則



この法則を任意の閉曲面を考えて表すと

$$\int_S i_n dS = 0$$

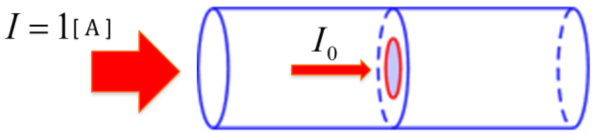
となります。
これを「**電流の保存則**」と言うのですが、
「ある閉曲面 S を通過した電流 I は入った量と出た量は同じ」という
当たり前のことと思われる現象を数式として表しただけです。

導線を流れる電流～例題

半径 1 mm の断面をもつ導線がある。この導線に 1 A の電流が流れている。
以下の問いに答えよ。但し、電流密度は一様として考えてよいものとする。

(1) 電流密度の大きさ i を求めよ。

(2) 導線の半径 0.5 mm の内側で流れる電流の大きさ I_0 を求めよ。



まずは各自でやってみて下さい。

有効数字は2桁あれば十分でしょう。

(1) 電流密度は「単位面積あたりの電流を電流密度と定義」されるので

$$i=\frac{I}{S}=\frac{I}{\pi r^2}$$

$$=\frac{1\mathrm{A}}{3.14\times(0.001\mathrm{m})^2}=3.18\times10^5\ \mathrm{A}/\mathrm{m}^2\simeq3.2\times10^5\ \mathrm{A}/\mathrm{m}^2$$

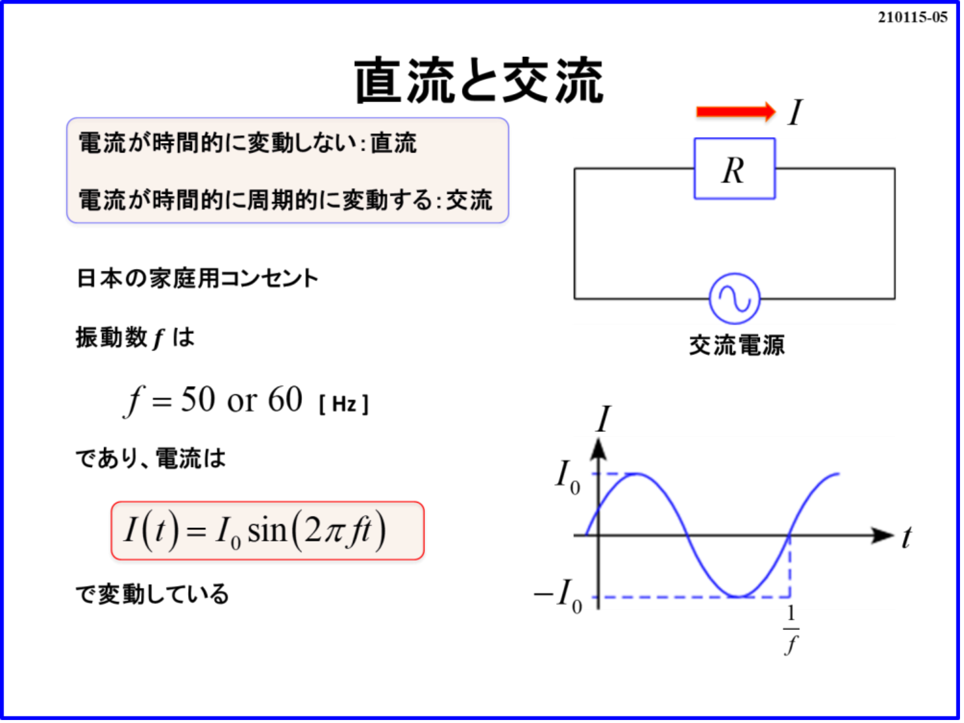
となります。

(2) 電流 $\boldsymbol{I_0}$ は

$$I_0=iS=3.2\times10^5\ \mathrm{A}/\mathrm{m}^2\times3.14\times(0.0005\,\mathrm{m})^2$$

$$=0.2512\,\mathrm{A}\simeq0.25\,\mathrm{A}$$

となります。



ここでは電流の種類について紹介しておきます。

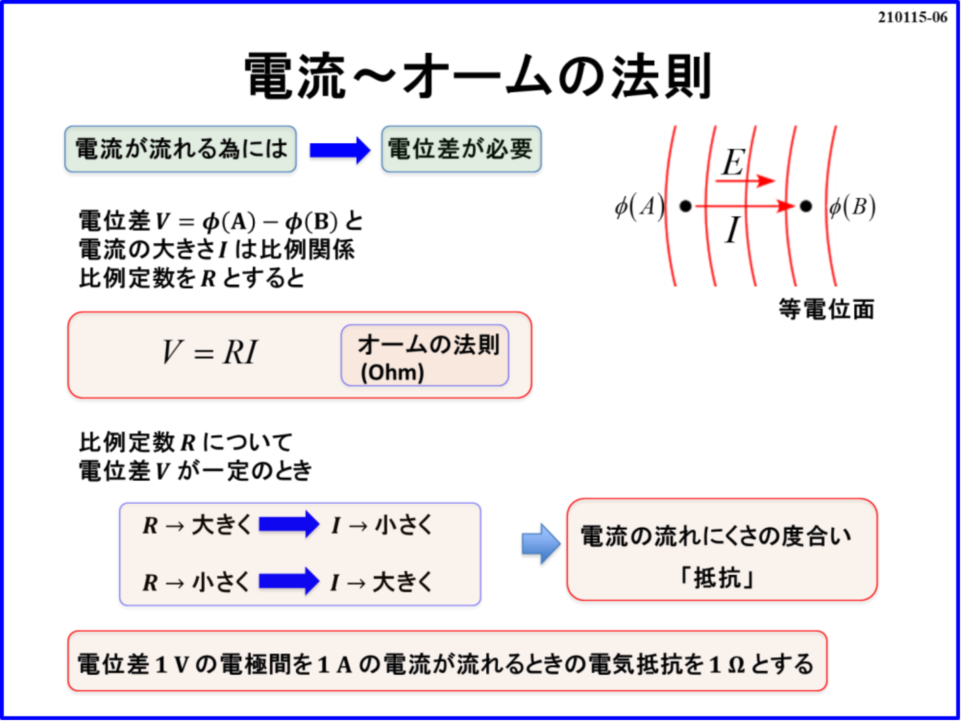
電流が時間的に変化しない状態の電流を「**直流(電流)**」といいます。
電流が時間的に変化し、その変化が周期的に変動する状態の電流を
「**交流(電流)**」といいます。

日本の家庭用電源は振動数 f が 50 Hz と 60 Hz の2種類ある状態です。
これが、東日本大震災の時に電力不足の状態に陥った原因の一つでもあります。
被災していない地域からの電力の融通が簡単ではないからになります。
この差は歴史的な問題で、明治の頃に電気を作る発電機を外国から輸入した時
「**東京はドイツ製(50 Hz)**」を導入し「**大阪はアメリカ製(60 Hz)** 」を導入しました。
これが近隣地域に広がり、東日本と西日本の周波数の違いとなった訳です。

話を戻すと、交流は「時間的、周期的に変動」するのでこれを関数で表すと

$$I(t) = I_0 \sin(2\pi ft)$$

となり、三角関数で表しています。



続いて、有名な「オームの法則」の話をしていきます。

電流とは「電荷の流れ」です。よって、電荷が動いてもらう必要があります。
電荷は何もない状態では動きません。電荷を動かすためには「電位差」が必要になります。
電荷は高い電位から低い電位へ移動します。
電位差 V を2点間の電位差として表すと

$$V = \phi(A) - \phi(B)$$

となります。
電流の大きさ I と電位差 V は比例関係にあり、その比例定数を R とすると

電位差 V は

$$V = RI$$

となります。
この式が「オームの法則」と呼ばれるものになります。

比例定数 R は電位差 V が一定とすると

R → 大きく I → 小さく
R → 小さく I → 大きく

という関係にあり、これは電流の流れにくさの度合いを表すことになるので
比例定数 R を「抵抗」と呼びます。

抵抗の定義として
「電位差 1 V の電極間を 1 A の電流が流れるときの電気抵抗を 1 Ω とする」
となります。

電流～抵抗

一様な物質で作られた抵抗線

「抵抗」は「電流の流れにくさの度合い」

抵抗線の長さ l に比例 ← 抵抗線が長ければ長いほど、電流は流れにくい

導線の断面積 S に反比例 ← 断面積が広ければ広いほど、電流は流れやすい

比例定数 ρ として

$$R = \rho \frac{l}{S} = \frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}$$

ρ : 電気抵抗率

$\sigma = {}^{1}/_{\rho}$: 電気伝導率

ρ, σ : 抵抗線の物質に依存

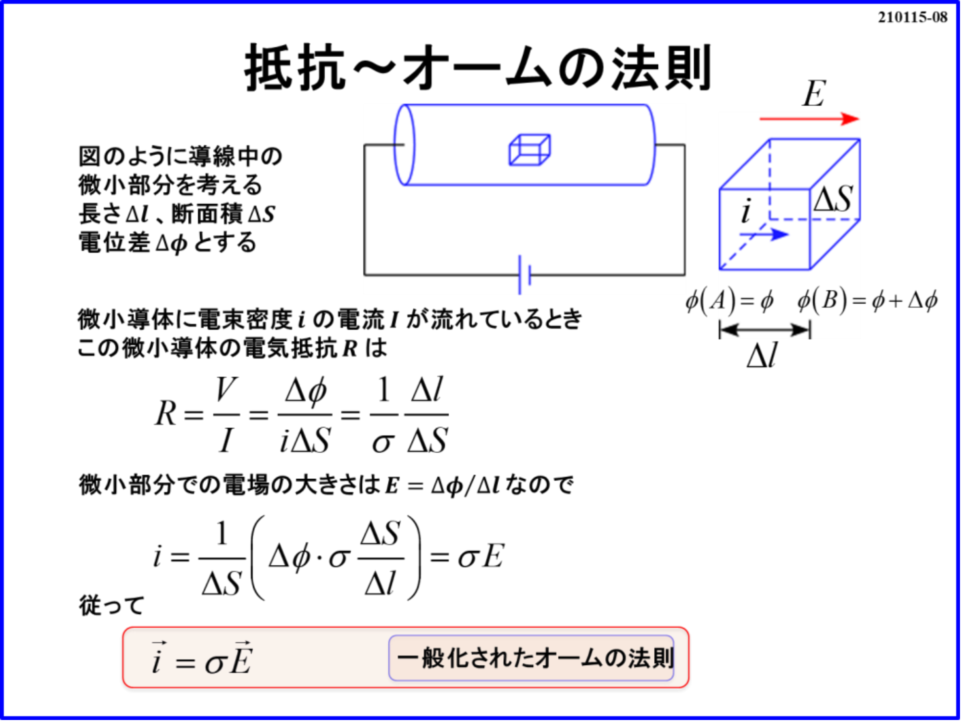
$$\rho = R\frac{S}{l}$$

$$\Omega \frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = [\,\Omega \cdot \mathrm{m}\,]$$

一様な物質で作られた抵抗線(導線)を考えたとき、
抵抗は「流れにくさの度合い」を表しているので
「抵抗線の長さ l に比例」し「導線の断面積 S に反比例」すると考えられます。
従って、比例定数を ρ と記述すると、

$$R = \rho \frac{l}{s}$$

と表されます。比例定数 ρ は「電気抵抗率」と呼ばれる値です。
また電気抵抗率 ρ の逆数と取って σ とし、σ を「電気伝導率」と呼びます。
電気抵抗率 ρ も電気伝導率 σ も物質に依存する定数となります。

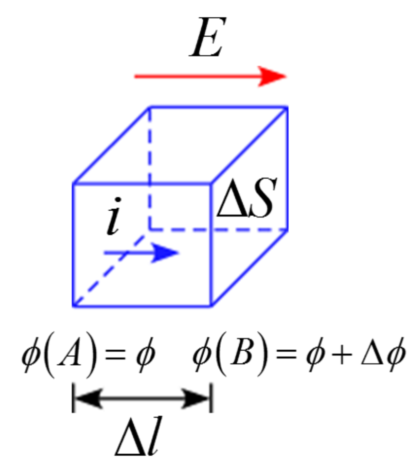


導線に対して考えたオームの法則を導線内の微小部分に対して検討します。

導線内の微小部分の直方体を考えます。
そして、直方体の断面積を通過する電気の量を計算します。
電流密度が i とすると微小断面積 ΔS を通過する電気の量 I は

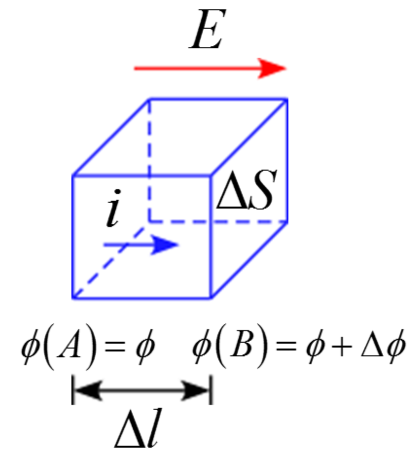
$$I=i\Delta S$$

と表されます。



従って、微小導体の電気抵抗 R は

$$R=\frac{V}{I}=\frac{\Delta\phi}{i\Delta S}=\frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\Delta S}$$



と表されます。
微小部分内の電場の大きさ E は $\Delta\phi = E\cdot\Delta l$ より

$$E=\frac{\Delta\phi}{\Delta l}$$

であるので

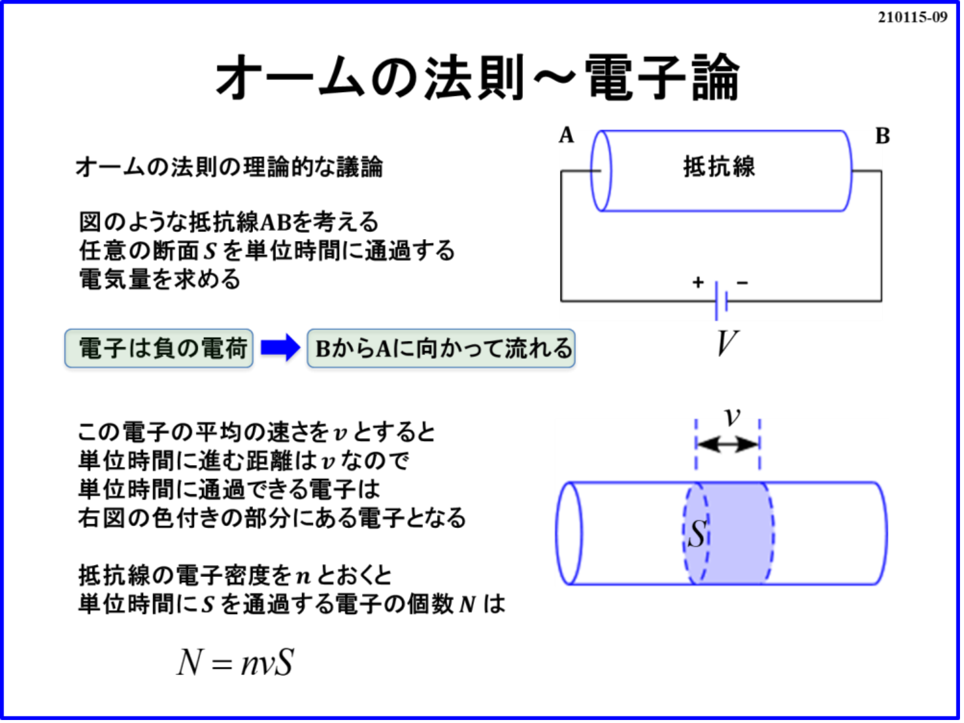
$$i=\frac{1}{\Delta S}\left(\Delta\phi\cdot\sigma\frac{\Delta S}{\Delta l}\right)=\sigma E$$

$$\boxed{R=\frac{1}{\sigma}\frac{l}{S}}$$

と表され、これを「一般化されたオームの法則」と呼びます。

電位

+1 [C] の電荷を、静電気力に逆らって
基準点から考えている点まで運ぶのに要する仕事



オームの法則はオームによって**実験的に得られた式**です。
しかし、後に電子が発見され、理論的に解釈が出来るようになりました。

ここでは簡単なモデルを使ってオームの法則を検討してみましょう。
抵抗線を設定し、任意の断面 S を単位時間に通過する量を考えます。

電子の平均の速さを v とし、抵抗線内の電子の密度を n すると
単位時間に断面 S を通過する電子の個数 N は

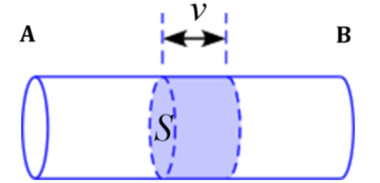
$$N = nvS$$

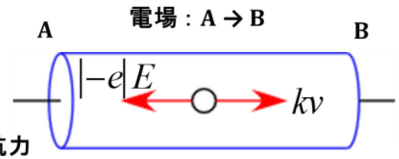
と表されます。

オームの法則～電子論

1個当たりの電気量を $-e$ とすると
単位時間に S を通過する電気量の大きさ
即ち、電流 i の大きさは

$$i=|-e|\cdot N$$
$$=\boxed{envS}$$





電子の運動をモデル化すると

電場からの力：B→A
原子や正イオンからの妨害：速度比例の抵抗力
この2つがつり合って、一定の速さで運動するとする

$$|-e|\cdot E=kv$$

$$eE=kv$$

が成立する

電子1個当たりの電気量を $-e$ とすると電流 i の大きさは

$$i=|-e|N=envS$$

と表されます。
電子は一定の速さ v で運動しているが、
これは「電場により電子に作用する力」と「速度比例の抵抗力」がつりあっていると考えます。
従って、

$$|-e|E=kv$$

$$eE=kv$$

が成り立ちます。

オームの法則～電子論

ここで、抵抗線の長さを l とすると
電位差 V なので、電場 E の大きさは

$$E = \frac{V}{l}$$

と表されるので、

$$e \cdot \frac{V}{l} = kv$$

よって電子の速さ v は

$$v = \frac{eV}{kl}$$

となる
電流の式に代入すると

$$i = envS$$

$$= en\frac{eV}{kl}S$$

$$= \frac{e^2 nS}{kl}V$$

式変形をして

$$V = \frac{k}{e^2 n}\frac{l}{S} \cdot i$$

従って、抵抗 R は

$$R = \frac{k}{e^2 n}\frac{l}{S}$$

となり、オームの法則が成立している

電場 E の大きさは

$$E = \frac{V}{l}$$

なので電子の速さ v は

$$v = \frac{eV}{kl}$$

となります。
これを電流の式に代入し整理すると

$$i = envS = en\frac{eV}{kl}S = \frac{e^2nS}{kl}V$$

電位差 V として表すと

$$R = \rho\frac{l}{S}$$

$$V = \frac{k}{e^2n}\frac{l}{S}i = Ri$$

と記述され、オームの法則が成立していることが確認できます。
前述の様に「長さ l に比例し、断面積 S に反比例」していることも確認できます。

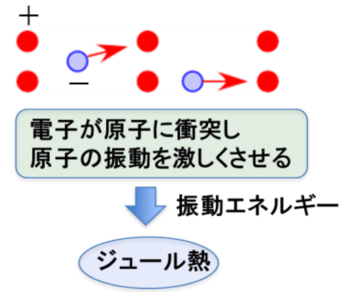
ジュールの法則

2点間 A – B の電位差が

$$V=\phi(A)-\phi(B)$$

のとき、電荷 q が点Aから点Bに移動すれば
電荷は外部に対して次のような仕事をする

$$W=q\left\{\phi(A)-\phi(B)\right\}=qV$$



オームの法則を使うと、電荷に対する仕事率は

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{dq}{dt}V=IV=I^2R=\frac{V^2}{R}\quad [\mathrm{W}]$$

ジュールの法則

P = 1 W は毎秒 1 J の仕事をする

電気抵抗 R がある回路では、電荷の持つエネルギーは抵抗により失われる
失われたエネルギーは抵抗周辺の熱エネルギーとして散逸していく

電子の運動により仕事が生じます。
電位差 V があり、電荷 q が移動する場合

$$W=q\left[\phi(A)-\phi(B)\right]=qV$$

となります。
従って仕事率 P は

$$P=\frac{dW}{dt}=\frac{d}{dt}(qV)=\frac{dq}{dt}V=IV=I^2R=\frac{V^2}{R}$$

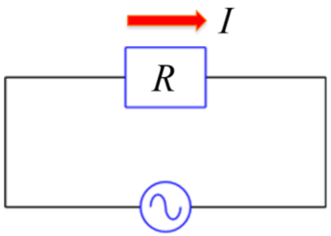
となります。

直流と交流～例題

電流が時間的に周期的に変動する電流 $I(t)$ が

$$I(t)=I_0\sin(2\pi ft)$$

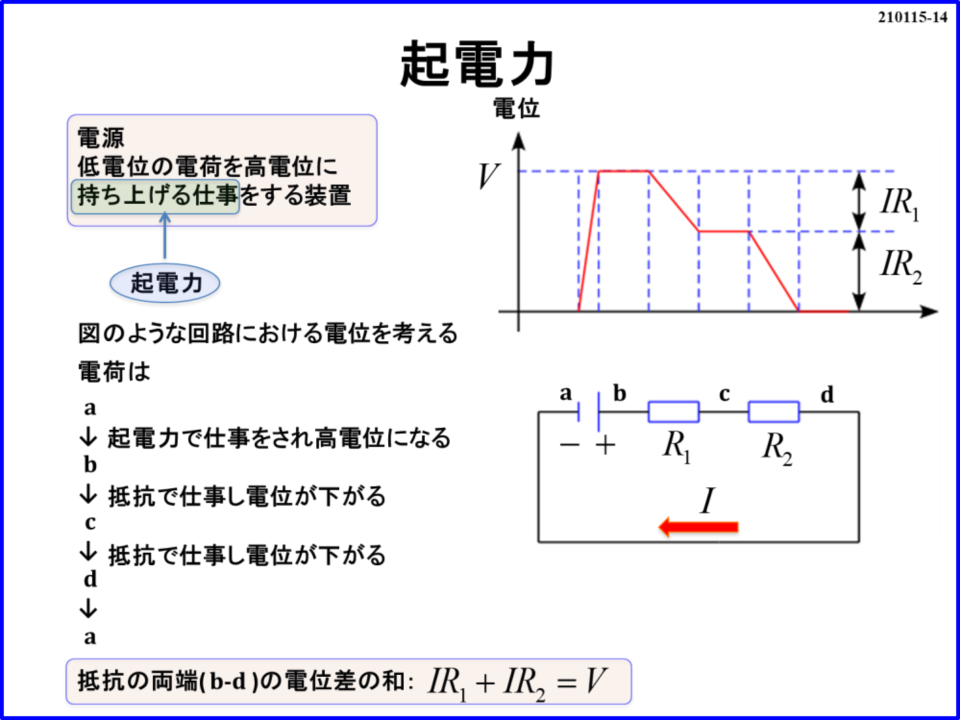
で表される電流がある。



(1) 抵抗 R に電流 $I(t)$ を流したときの仕事率 P を求めよ。

(2) このときの平均電流の大きさ $\bar{I}$ を求めよ。

この問題はレポート課題の1つとして扱う予定なのでここでは解答はしません。



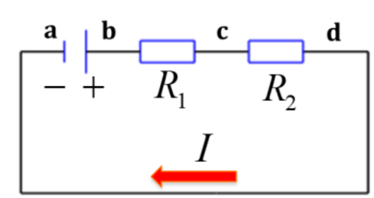
ここからは電位差を作る装置「電源」を用いた回路について検討していきます。

「電源」は低電位から高電位に電荷を持ち上げる仕事をしています。
図のような抵抗 R_1, R_2 が取り付けられた回路を例に考えてみましょう。

点aをスタート地点として、電源で電位が高電位になり、
抵抗 R_1 で仕事をし電位が下がり、抵抗 R_2で仕事をし
さらに電位がさがります。そして点aまで戻ってきます。
このとき、起電力で上がった電位と2つの抵抗で下がった電位は等しく

$$IR_1 + IR_2 = V$$

となります。



キルヒホッフの法則

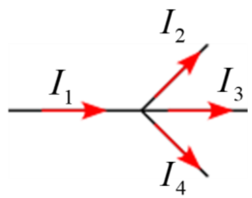
キルヒホッフの第1法則(電流の保存則)

回路の分岐点に流れ込む電流の代数和は0である

例

分岐点に
流れこむ電流:正
流れだす電流:負

$$0=\sum_{i=1}^{4} I_i$$



回路分岐点での電流

キルヒホッフの第2法則(オームの法則)

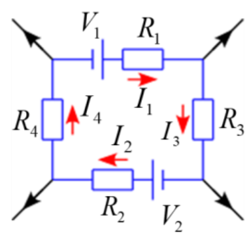
回路の一部を形成する閉回路にそって1周する経路で、起電力の総和は抵抗による電圧降下の総和に等しい

例

閉回路で時計回りに回路の向きを取ると

$$V_1+V_2=I_1R_1+I_2R_2+I_3R_3+I_4R_4$$

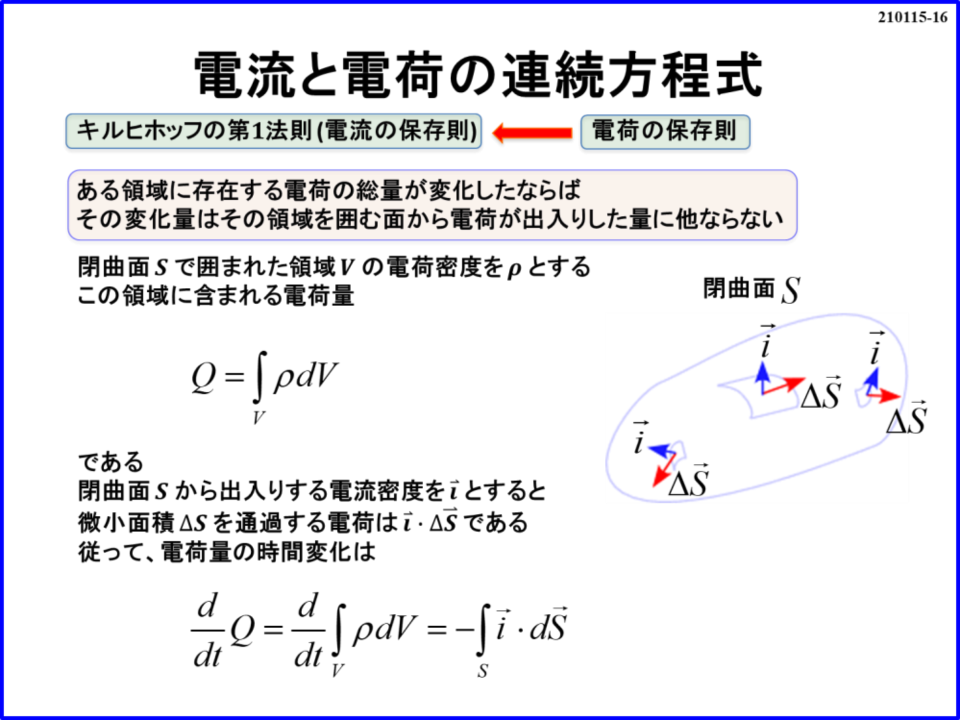
任意の閉回路



ここで電流についての法則を紹介しておきます。
この法則は「電流の保存則」を回路に適用した形になります。

「回路の分岐点に流れ込む電流の代数和は0である」という法則で
「キルヒホッフの第1法則」と呼ばれています。

さらに、任意の回路について閉回路を考え、その閉回路を1周すると
「起電力の総和 ＝ 抵抗に依る電圧降下の総和」となります。
これを「キルヒホッフの第2法則」と呼びます。



キルヒホッフの第1法則の一般化を考えます。

任意の閉曲面 S を考え、閉曲面内の電荷密度を ρ とすると

$$Q=\int_V \rho dV$$

となります。
閉曲面 S から出入りする電流密度を i とし、微小面積 ΔS を考えると
微小面積 ΔS を通過する電荷の量は

$$\Delta Q=\vec{i}\cdot\Delta\vec{S}$$

となります。

従って、電荷量の時間変化 $\frac{dQ}{dt}$ は

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

と表されます。
ここで、ガウスの定理を用いると上式は

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \int_S \vec{i} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_V \frac{d}{dt} \rho dV + \int_V \nabla \cdot \vec{i} dV = 0$$

$$\int_V \left(\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot \vec{i} \right) dV = 0$$

となります。

電流と電荷の連続方程式

ガウスの定理(面積積分と体積積分の関係)により

$$\int_S \vec{i}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{i}\,dV$$

であるから

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \int_S \vec{i}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_V \frac{d}{dt}\rho dV + \int_V \nabla\cdot\vec{i}\,dV = \int_V\left(\frac{d}{dt}\rho + \nabla\cdot\vec{i}\right)dV = 0$$

となる

この式は任意の閉曲面で成り立つので、空間の各点で

$$\frac{d}{dt}\rho + \nabla\cdot\vec{i} = 0$$

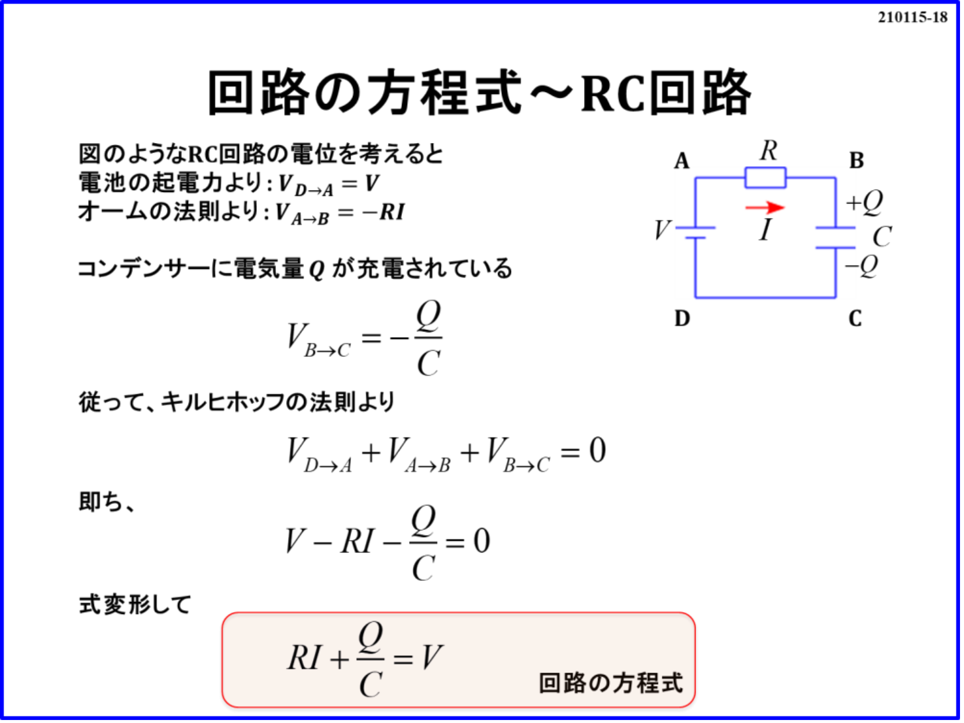
電流と電荷の連続方程式

が成り立つ

この式は任意の閉曲面で成立するので

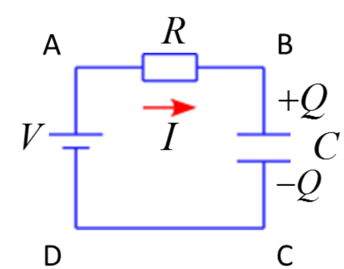
$$\frac{d}{dt}\rho + \nabla\cdot\vec{i} = 0$$

となります。これを「**電流と電荷の連続方程式**」と呼びます。



ここではRC回路のモデルについて考えます。

図の回路において、起電力 V で電位が上がり、抵抗 R で電位が RI 下がり、さらにコンデンサー C で電位が $\frac{Q}{C}$ 下がります。



従って、キルヒホッフの法則(第2)より

$$V-RI-\frac{Q}{C}=0$$

となります。

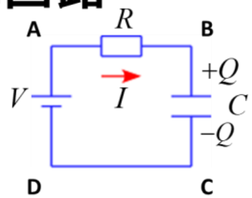
さらに式変形をし「電圧降下の総和＝起電力の総和」の形で表すと

$$RI + \frac{Q}{C} = V$$

となります。
この式を「回路方程式」と呼びます。

回路の方程式～RC回路

ここで、コンデンサーについて着目してみる



コンデンサーでの電気量の充電は

$$Q(t)=\int_0^t I(t')\,dt'+Q(0)$$

となる

この両辺を t で微分すると

$$I(t)=\frac{dQ(t)}{dt}$$

電気量保存の式

コンデンサーに流れ込んだ電気量がそのまま蓄えられる

これを回路方程式に代入すると

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V$$

Q に関する微分方程式

となる

ここで回路のコンデンサーに着目すると、コンデンサーの電気量 $Q(t)$ は

$$Q(t)=\underbrace{\int_0^t I(t')\,dt'}_{\text{変化量}}+\underbrace{Q(0)}_{\text{最初の量}}$$

となります。

この式の両辺を t で微分すると

$$\frac{dQ(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\left[\underbrace{\int_0^t I(t')\,dt'}_{t\text{で積分して微分}}+\underbrace{Q(0)}_{\text{定数}}\right]=I(t)$$

となります。

従って回路方程式は

$$R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V$$

となります。
この式は電気量 Q に関する微分方程式になっています。

回路の方程式～RC回路

微分方程式の一般解は

$$Q(t) = CV - Ae^{-\frac{t}{RC}} \quad (A\text{ は定数})$$

と表せる

初期条件を $t = 0$ でコンデンサーは充電されていなかったとすると

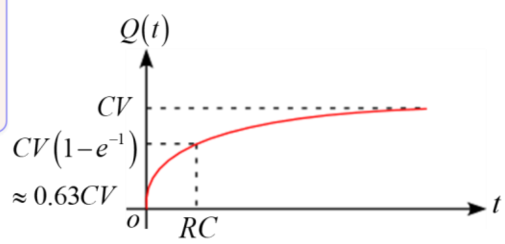
$$Q(0) = CV - Ae^{-\frac{0}{RC}} = CV - Ae^{0} = 0$$

よって、$A = CV$ であるから

$$Q(t) = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

RC : 回路の時定数

となる



回路方程式は

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V$$

を解くと、一般解は

$$Q(t) = CV - Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

となります。
初期条件 $Q(0) = 0$ より定数 A を求めると

初期条件を代入すると

$$Q(0) = CV - Ae^{-\frac{0}{RC}} = 0$$

$$CV - A = 0$$

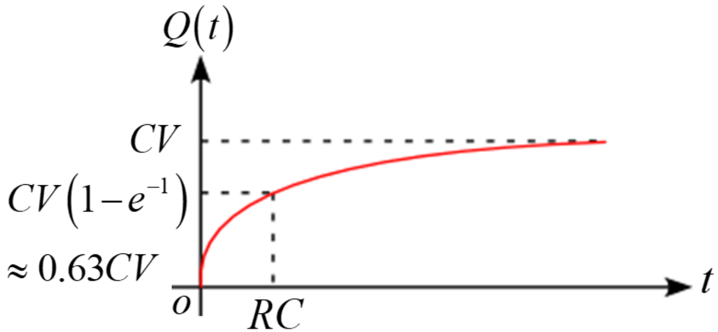
$$A = CV$$

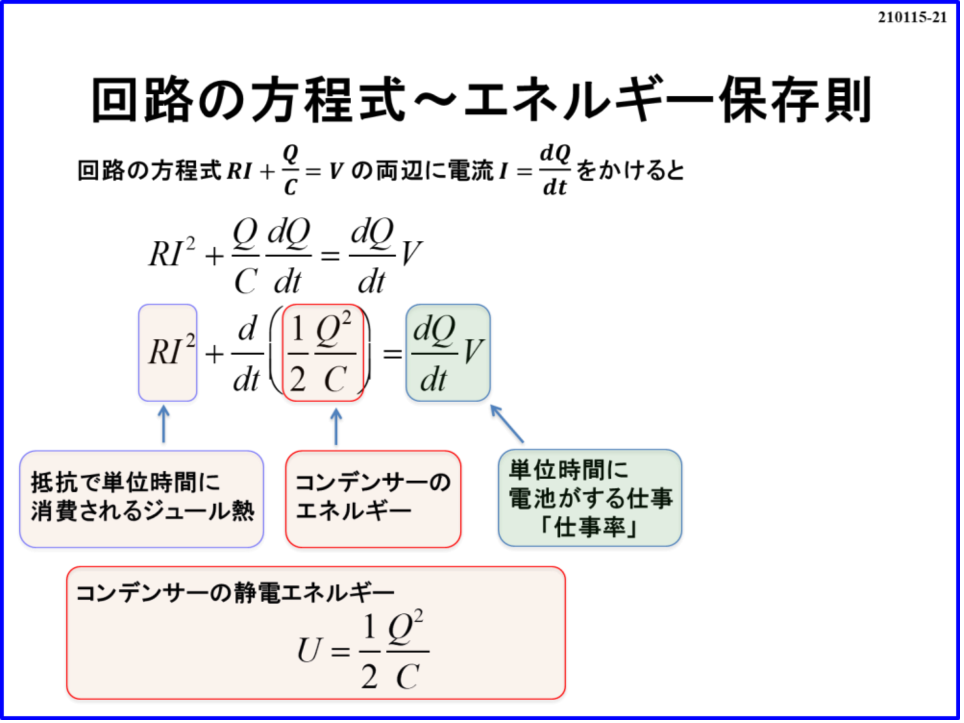
となり、一般解は

$$Q(t) = CV - CVe^{-\frac{t}{RC}} = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

となります。
指数の分母にある「RC」は「回路の時定数」と呼ばれる定数になります。

グラフの概形は図のようになり、CV に漸近する振る舞いとなります。





回路方程式の両辺に電流 $I=\frac{dQ}{dt}$ をかけると

$$RI^2+\frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt}=\frac{dQ}{dt}V$$

$$RI^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}\right)=\frac{dQ}{dt}V$$

となります。この式の形からコンデンサーの静電エネルギーも確認できます。

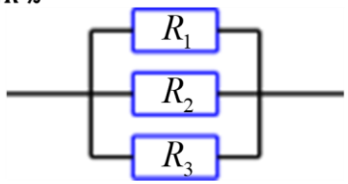
合成抵抗～例題

抵抗 R_1, R_2, R_3 がある。

(1) 3つの抵抗が並列につながれたときの合成抵抗 R が

$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}$$

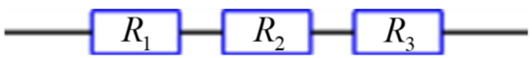
であることを示せ。



(2) 3つの抵抗が直列につながれたときの合成抵抗 R が

$$R=R_1+R_2+R_3$$

であることを示せ。



この問題はレポート課題の1つとして扱う予定なのでここでは解答はしません。

回路の方程式～例題

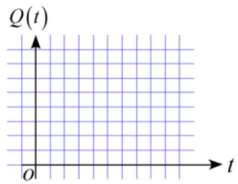
次のRC回路を考える。スイッチを入れる前にはコンデンサーに電荷が蓄えられていないものとする。
スイッチを入れた時刻を $t=0$ として以下の問いに答えよ。

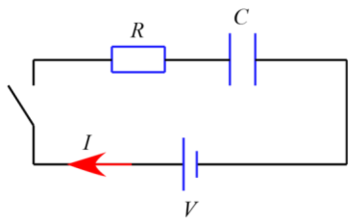
(1) 回路方程式を記述せよ。
ある時刻 t におけるコンデンサーの電荷を $Q(t)$ としてよい。

(2) 図の向きを電流の正として、$t=0$ における電流の値を求めよ。

(3) 十分に時間が経った後のコンデンサーの電荷 Q の値を求めよ。

(4) $Q-t$ グラフを描け。
また、$Q-t$ グラフの原点での傾きを記述せよ。





今回の宿題と同じ問題です。

まずは各自でやってみて下さい。