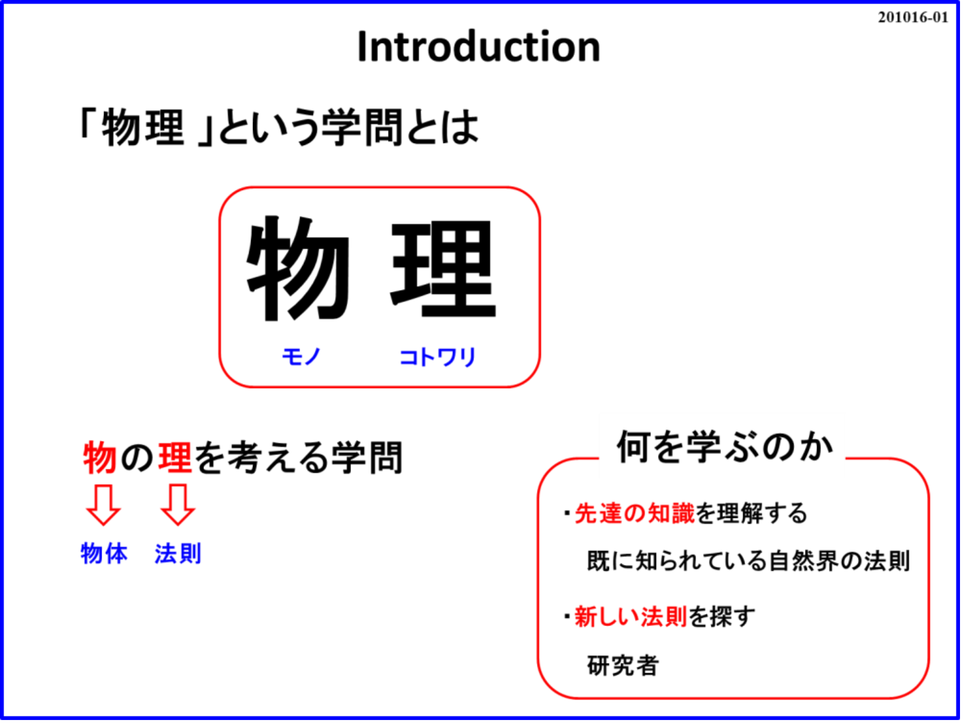
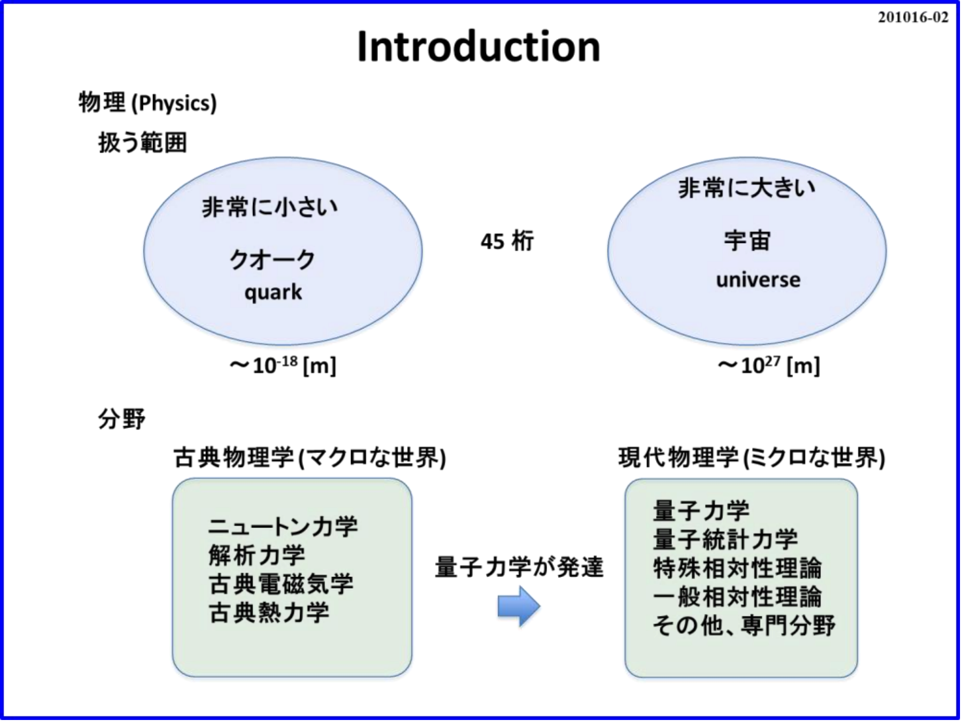
2020講義ノート
一般物理学 (力学)
理学部・生物学科
解説 ver.



「物理」という学問とは何か？

文字を見ると、「物(モノ)」の「理(コトワリ)」と表されています。
この、「物=物体」であり、「理=法則」を指しています。
即ち、「物理学」は「物体の法則を考える学問である」と言えます。

何を勉強すればいいのかを説明すると、大きく分けて2つあります。
まずは、先達の知識を理解する。これは、既に知られている自然界の法則を理解することです。この部分は「初等教育の理科」～「高校物理」～「大学学部・大学院」での所謂お勉強に相当します。さらに進むと研究者として「新しい法則」を探すことになります。



「物」=「物体」と言っても、色々あります。
「物体」には「大きいもの」から「小さいもの」まで色々あります。
例えば、「小さいもの」では「素粒子」「クォーク」などがあります。大きさは「10^{-18} m」程度であるのに対し、「大きいもの」では「宇宙自体」で、大きさは「10^{27} m」程度となります。
この大きさの差は45桁もあります。
このように、物理が扱う範囲は非常に広いことがわかります。

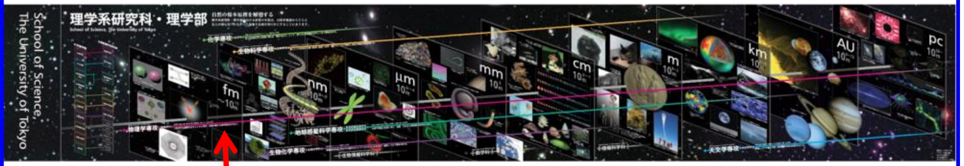
分野で分けると、「量子力学」の考え方の有無で大きく分けられます。
量子力学の発達する前を「古典物理学」と呼び、
量子力学が発達した後を「現代物理学」と呼びます。

本講義では「ニュートン力学」と「電磁気学」について学習します。

Introduction

物理 (Physics)

扱う範囲

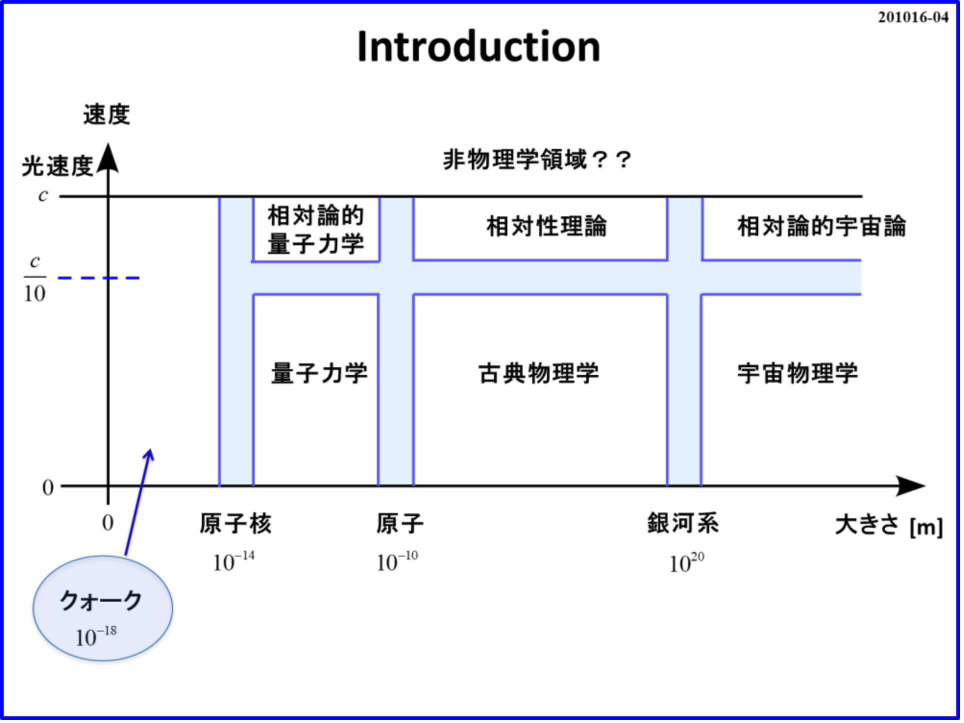


物理の線

(出典：東京大学理学研究科HP)

他の分野(物理学以外)との比較図です。
出典元は東大の理学研究科のHPから抜粋したものです。

物理(ピンクの線)は端から端までカバーしています。
各研究科を見てみると、どの分野がどのような範囲をカバーしているか
イメージができるかと思います。



この図は「横軸：大きさ」、「縦軸：速度」で分類したものになります。

物体の速度が速くなると、通常と違った現象が起こります。
この現象について述べられている分野が「相対論」となります。
光速 c の 1/10 より速くなると「相対論」の効果が無視できなくなります。
ここのラインで分野が分けられます。

光速 c より速い状態の物理は解らない。
物体の速度は「光速 c を超えない」ので、その先は？？

将来は解らないけど、今の物理学では・・・

物理量～単位系

物理量　　**MKS単位系**

Length :長さ	Time :時間	Mass :質量
m	sec	kg
[L]	[T]	[M]

(参考)

長さ: 1m
光が真空中で1/299792458 s の間に進む距離
時間: 1s
133Cs原子が吸収する電磁波の周期の9192631770倍
質量: 1kg
プランク定数hを$6.62607015 \times 10^{-34}$ Jsと定めることで設定される

国際単位系の基本単位

物理量	単位記号	名称
長さ	m	メートル
質量	kg	キログラム
時間	s	秒 (second)
電流	A	アンペア
熱力学的温度	K	ケルビン
物質量	mol	モル
光度	cd	カンデラ
平面角	rad	ラジアン
立体角	sr	ステラジアン

国際単位系(SI)
国際度量衡委員会が基本量の標準を定めた単位系

物理では様々な量を扱います。
この量を「**物理量**」と呼びます。
物理量の基本的な単位系を「**MKS単位系**」と呼びます。
「m メートル(meter)」,「k キログラム(kilogram)」,「s セコンド(second)」を基本単位とします。
この**「長さ、時間、質量」は重要な物理量**です。 **[ ] で表したものは次元**を表しています。

下の表は国際単位系の基本単位を紹介しています。

この講義で扱うのは「長さ、質量、時間、電流」となります。

201016-06

次元解析～誘導単位

次元解析

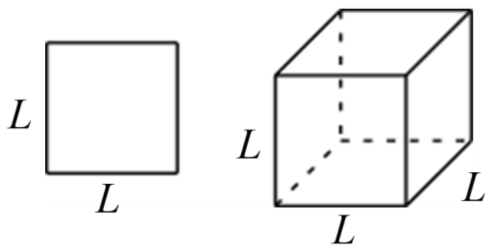
次元：物理的性質を表している

式の導出などの検証の手段になる

計算をしていて、何かオカシイ？
と思ったら、次元解析をするとよい

例

物理量	関係式	単位記号	次元	
面積 (Square)	$S = L \times L$	m^2	$[L^2]$	
体積 (Volume)	$V = L \times L \times L$	m^3	$[L^3]$	
密度 (Density)	$\rho = m / V$	g/cm^3	$[M/L^3]$	← CGS 単位系



物理量を扱う上で、その物理量がどのように構成されているかを考えることは重要です。

前のスライドで述べた基本的な物理量 [L] , [T] , [M] の何で構成されているのかを考えることを「次元解析」と言います。
次元が解れば、単位はその次元に合わせて表すことができます。

短期の基本はMKS単位系を用いるが、場合によってはCGS単位系を用いることもあります。

表の例を見ると、面積(Square)は縦×横なので次元は $[L]\times[L]=[L^2]$と表され、
MKS単位系での単位記号は m^2 となります。
同様に、体積(Volume)は $[L]\times[L]\times[L]=[L^3]$となり、MKS単位系での単位記号は m^3となります。

次元解析～誘導単位

次元解析

次元：物理的性質を表している

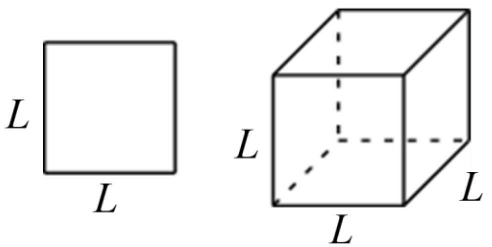
式の導出などの検証の手段になる

計算をしていて、何かオカシイ？
と思ったら、次元解析をするとよい

例

物理量	関係式	単位記号	次元
面積 (Square)	$S = L \times L$	m^2	$[L^2]$
体積 (Volume)	$V = L \times L \times L$	m^3	$[L^3]$
密度 (Density)	$\rho = m / V$	g / cm^3	$[M / L^3]$

← CGS 単位系



密度(Density) は「単位体積あたりの質量」であるから
次元は

$$\frac{[M]\ \text{(質量)}}{[L^3]\ \text{(体積)}}$$

となり、これをCGS単位系で表すと g/cm となります。

次元解析～誘導単位

物理量	関係式	単位記号	次元
速度、速さ (Velocity , Speed)	$\vec{v} =$	m / s	[LT^{-1}]
加速度 (Acceleration)	$\vec{a} =$	m / s^2	[LT^{-2}]
力 (Force)	$\vec{f} =$	kg・m / s^2 ＝ N	[LMT^{-2}]
仕事 (Work)	$W =$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
運動エネルギー (Kinetic energy)	$K =$	kg・m^2 / s^2 ＝ N・m = J	[L^2MT^{-2}]
力積 (Impulse)	$\vec{I} =$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]
運動量 (Momentum)	$\vec{p} =$	kg・m / s ＝ N・s	[LMT^{-1}]

位置ベクトルを $\vec{r} = (x, y, z)$ とする

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \qquad K = \frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2}$$

$$\vec{f} = m\vec{a} \qquad \vec{I} = \vec{f}t \qquad \vec{p} = m\vec{v}$$

ここで、少し練習をしてみましょう。
この部分は**テストに出します**。丸暗記をするのではなく、しっかりと手を動かして自力で計算ができるようにしておきましょう。

表の関係式から**次元を導き**ます。定義式・関係式については後から学習するので、ここでは「そういうもの」として計算を進めましょう。

速度の定義は $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$ であるから、

$$\frac{\overbrace{[L]}^{(\vec{r}\text{ の次元})}}{\underbrace{[T]}_{(t\text{ の次元})}} = \left[\frac{L}{T}\right]$$

となります。

($\vec{v}$ の次元)

加速度の定義は $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ であるから、 $$\frac{\left[\frac{L}{T}\right]}{[T]} = \left[\frac{L}{T^2}\right]$$ となります。

(t の次元)

力は $m\vec{a} = \vec{f}$ (運動方程式)より、 $$[M]\left[\frac{L}{T^2}\right] = \left[\frac{ML}{T^2}\right]$$ となります。

(m の次元)

($\vec{a}$ の次元)

仕事の定義 $W = \vec{f} \cdot d\vec{r}$ より、 $$\left[\frac{ML}{T^2}\right][L] = \left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$$ となります。

(f の次元)　($\vec{r}$ の次元)

運動エネルギーの定義 $K = \frac{1}{2}m\vec{v}^2$ より、 $$[M]\left(\left[\frac{L}{T}\right]\right)^2 = \left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$$ となります。

(m の次元)

($\vec{v}$ の次元)

従って、仕事 W と運動エネルギー K の次元が等しいことが判ります。
又、定義式の係数($^1/_2$)は次元に含まないことに注意すること。

力積の定義は $\vec{I} = \vec{f}t$ であるから、$\left[\dfrac{ML}{T^2}\right]\left[T\right] = \left[\dfrac{ML}{T}\right]$ となります。

($\vec{f}$ の次元)　(t の次元)

運動量の定義 $\vec{p} = m\vec{v}$ より、$\left[M\right]\left[\dfrac{L}{T}\right] = \left[\dfrac{ML}{T}\right]$ となります。

(m の次元)　($\vec{v}$ の次元)

従って、力積 $\vec{I}$ と運動量 $\vec{p}$ の次元が等しいことが判ります。

このように、[L], [M], [T] を用いて物理量を次元解析(次元で表す)と言います。

テストに出しますよ！

接頭語

単位の10の整数乗倍を表すために接頭語を用いる

例

10^3 m=1 km

k は10^3を示している

番外編

オングストローム
(angstrom)

Å $=10^{-10}$

国際単位系における接頭語

接頭語	記号	ベキ
ペタ (peta)	P	10^{15}
テラ (tera , terra)	T	10^{12}
ギガ (giga)	G	10^{9}
メガ (mega)	M	10^{6}
キロ (kilo)	k	10^{3}
ヘクト (hecto)	h	10^{2}
デカ (deka , deca)	da	10^{1}
デシ (deci)	d	10^{-1}
センチ (centi)	c	10^{-2}
ミリ (milli)	m	10^{-3}
マイクロ (micro)	μ	10^{-6}
ナノ (nano)	n	10^{-9}
ピコ (pico)	p	10^{-12}
フェムト (femto)	f	10^{-15}

例

$$1\ \mathrm{km} = \qquad \mathrm{m}$$
$$= \qquad \mathrm{m}$$
$$1\ \mathrm{cm} = \qquad \mathrm{m}$$
$$100\ \mathrm{cm} = \qquad \mathrm{m}$$
$$= \quad \mathrm{m}$$

物理量を扱う上で接頭語にも慣れておく必要があります。
とは言え、別にこの表を覚える必要は無いです。忘れたら表を見ればいいだけです。
理屈は理解しておきましょう。

表では 10^{-15} ～ 10^{15} までの接頭語を掲載しています。
見たことがある接頭語も多くあるかと思います。

「記号の部分」が「べき乗」に相当します。

例を見てみましょう。

$$1\ \text{km} = 1\times10^{3}\ \text{m} = 1000\ \text{m}$$

(有効数字の話はここでは無視します。)

「k」の部分が「10^3」に相当

$$1\ \text{cm} = 1\times10^{-2}\text{m} = 0.01\ \text{m}$$

「c」の部分が「10^{-2}」に相当

$$100\ \text{cm} = 100\times10^{-2}\ \text{m} = 1\ \text{m}$$

「c」の部分が「10^{-2}」に相当

番外編として、Å (オングストローム) があります。
化学などで昔はよく使われていました。
しかし、最近は 10^{-9} の n (ナノ) を使うことが多いようです。

時間微分と時間積分

例題

x_0, v_0, a_0 をそれぞれ定数とし、C を積分定数とする。次の条件を満たす関数 $x(t), v(t)$ について、時間微分や時間積分を行い、下記空欄に x_0, v_0, a_0 のいずれか、または、定数を書き込め。

(1) $x(t) = x_0 + v_0 t \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = \boxed{}$

(2) $v(t) = v_0 + a_0 t \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{dv(t)}{dt} = \boxed{}$

(3) $x(t) = x_0 + v_0 t + \dfrac{1}{2} a_0 t^2$

$\Longrightarrow \quad \dfrac{dx(t)}{dt} = \boxed{} + \boxed{}\, t$

(4) $\dfrac{dv(t)}{dt} = a_0$

$\Longrightarrow \quad v(t) = \displaystyle\int \boxed{}\, dt = \boxed{}\, t + C$

n を自然数，k を定数とし，$f(t)$, $g(t)$ をそれぞれ t の関数とする。変数 t に関する微分を“**時間微分**”といい，

I. $\dfrac{d}{dt} t^n = n t^{n-1}$

II. $\dfrac{d}{dt}\{k f(t)\} = k \dfrac{df(t)}{dt}$

III. $\dfrac{d}{dt}\{f(t) + g(t)\} = \dfrac{df(t)}{dt} + \dfrac{dg(t)}{dt}$

が成り立つ。また，変数 t に関する積分を“**時間積分**”といい，

IV. $\displaystyle\int t^n\, dt = \frac{1}{n+1} t^{n+1} + C$

V. $\displaystyle\int \{k f(t)\}\, dt = k \int f(t)\, dt$

VI. $\displaystyle\int \{f(t) + g(t)\}\, dt = \int f(t)\, dt + \int g(t)\, dt$

が成り立つ (C は積分定数である)。

さて、続いて数学の復習をしておきましょう。
物理学は「数学」という言語を用いて記述されています。
高校では「物理」と「数学」はきっちり分かれていましたが、
大学では「物理」でも「数学」をガンガン使用して進めていきます。

ここでは、「微分積分」と「ベクトルの扱い」について復習します。

微分積分と言っても、そんなに複雑な話ではなく、高校数学で習った程度の内容になります。
ただし、「数学」の場合では多くは変数が「x」で「$f(x)$」の微積の計算であったと思いますが、
物理では「時間変化」が重要になります。従って、変数は時間 t を用いることが多くなります。
実際に例題をやってみましょう。

(1)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t) = v_0$$

(2)

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 + a_0 t) = a_0$$

(3)

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t^2\right) = v_0 + \frac{1}{2}a_0 \cdot 2t = v_0 + a_0 t$$

(4) $\dfrac{dv(t)}{dt} = a_0$ **両辺を t で積分**

$$\int \frac{dv(t)}{dt} dt = \int a_0 dt$$

$$\int dv(t) = \int a_0 dt$$

$$v(t) = a_0 t + C$$

不定積分なので積分定数 C を忘れないこと

(5) $\dfrac{dx(t)}{dt} = v_0$

$\Longrightarrow x(t) = \int \boxed{} dt = \boxed{} t + C$

(6) $\dfrac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0 t$

$\Longrightarrow x(t) = \int \left(\boxed{} + \boxed{} t \right) dt$

$= \boxed{} t + \dfrac{1}{\boxed{}} a_0 t^2 + C$

(5) $\dfrac{dx(t)}{dt} = v_0$ **両辺を t で積分**

$$\int \frac{dx(t)}{dt} dt = \int v_0 dt$$

$$\int dx(t) = \int v_0 dt$$

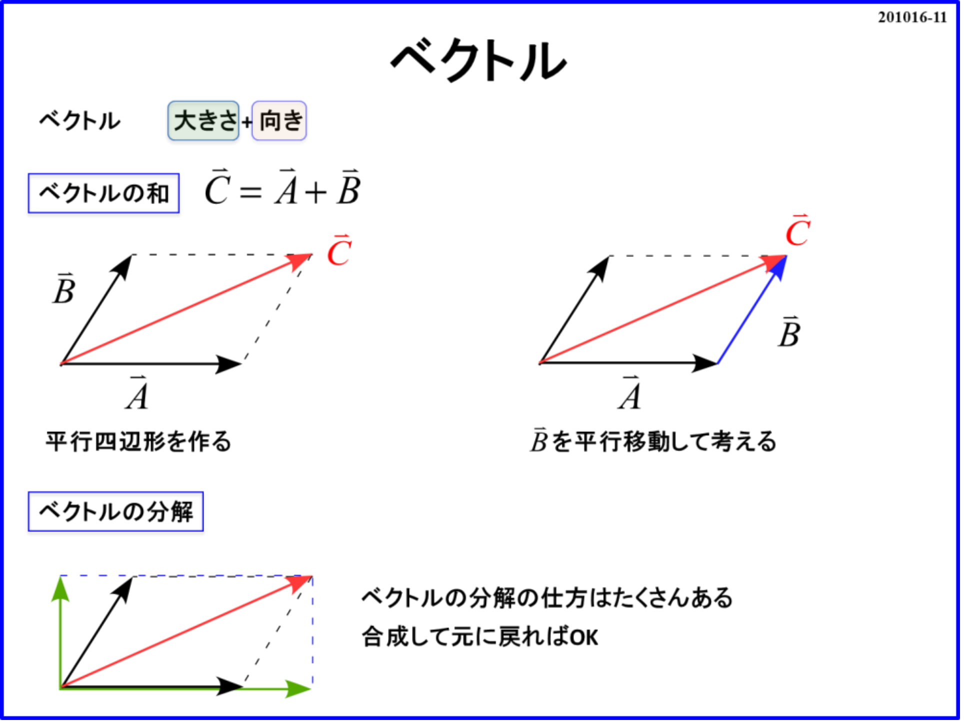
$$x(t) = v_0 t + C$$

(6) $\dfrac{dx(t)}{dt} = v_0 + a_0 t$ **両辺を t で積分**

$$\int \frac{dx(t)}{dt} dt = \int (v_0 + a_0 t) dt$$

$$\int dx(t) = \int (v_0 + a_0 t) dt$$

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_0 t^2 + C$$



物理ではベクトルの概念もよく利用します。
物理量の多くがベクトル量として表されています。

前述のP7の位置 $\vec{r}$, 速度 $\vec{v}$, 加速度 $\vec{a}$ などはベクトル量です。
従って、ベクトルの基本も復習しておきましょう。
特にベクトルの分解は力学でよく利用するのでCheckしておきましょう。

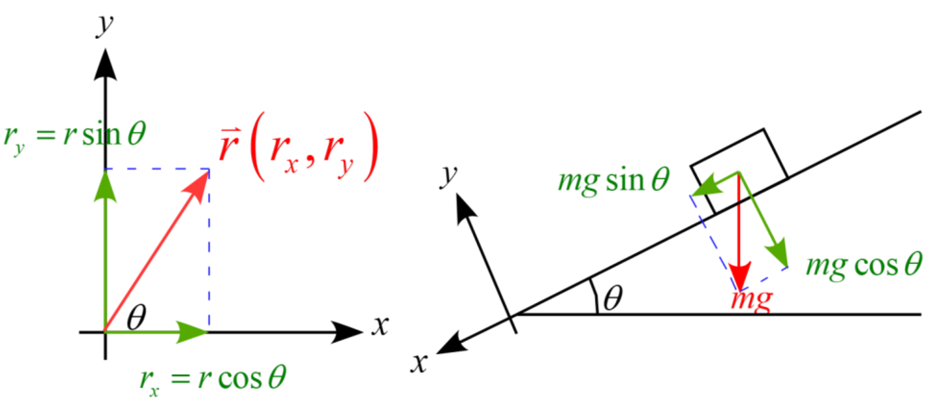
ベクトルの和の基本は平行四辺形を形成することです。2つのベクトルが作る平行四辺形の作図となります。
ベクトルの分解は対角線上にあるベクトルが作る平行四辺形は無数に考えることができます。

ベクトル

ベクトルの分解

速度ベクトルの分解
力の分解
変位の分解

ベクトルを分解して考えるケースは多い



ベクトルの分解の例を考えてみましょう。

ベクトルの分解は無限に作ることができるが、意味のある形にしないと使うことができない。
多くは、軸に沿って分解することになります。

左の例について
位置ベクトルを $\vec{r} = (r_x, r_y)$ としたとき、x 軸, y 軸に沿って分解した成分 r_x, r_y は
x 軸と $\vec{r}$ のなす角 θ を用いて表すと、

$$r_x = |\vec{r}|\cos\theta = r\cos\theta$$

$$r_y = |\vec{r}|\sin\theta = r\sin\theta$$

となる。

ここで、注意したいのは
「ベクトルを扱う場合には表記に注意する」ことです。

ベクトル(向き+大きさ)とスカラー(大きさ)の区別をしっかりとしないといけません。

ベクトル ・・・ $\vec{r}$ (文字上に矢印)

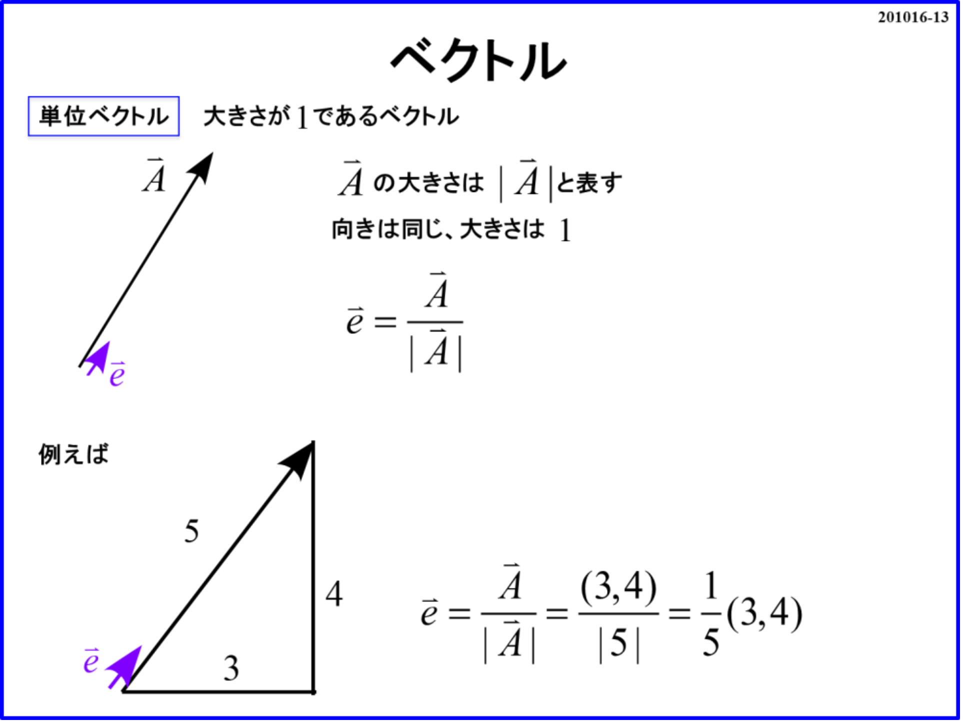
$\boldsymbol{r}$ (ボールド体)

スカラー ・・・ $|\vec{r}|$ (絶対値 Vertical bar の記号を使う)

r (単に文字だけで記述する。ボールド体にはしない)

作図の注意
x, y 軸に沿った分解なので、分解元、この例の場合 $\vec{r}$ や mg の矢印が対角線になるように長方形を作ることになるが、この時、どのベクトルを分解したのかが判るように補助線も描いておきましょう。

斜面の角度の移動についてはこちら http://tree-of-physics-hs.jp/incline-theta を参考に確認しておいて下さい。



続いて「単位ベクトル」について復習しておきましょう。

「単位ベクトル」とは「大きさが1であるベクトル」となります。

例えば、図の $\vec{A}$ の大きさを $|\vec{A}|$ と表すと、単位ベクトル $\vec{e}$ は

$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|}$$

と、自分自身の大きさで割れば単位ベクトルを表すことができます。

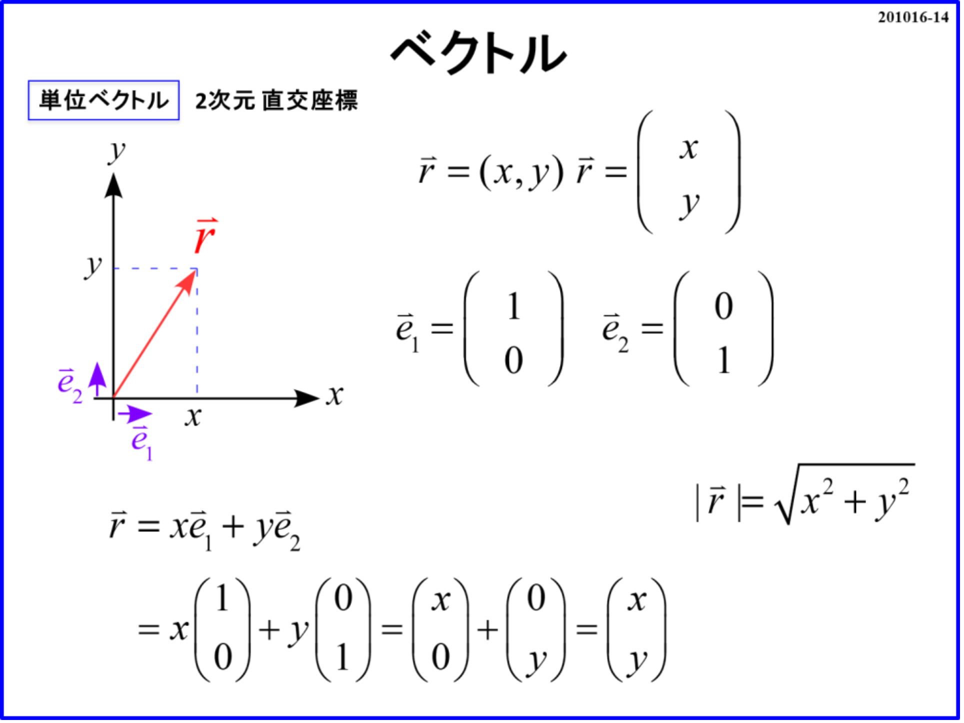
$\vec{A} = (3, 4)$ の場合は

$$|\vec{A}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

であるので

$$\vec{e} = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{(3,4)}{5} = \frac{1}{5}(3,4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$$

となります。



単位ベクトルを x, y 軸で考えてみよう。

ベクトル成分の表記は縦、横どちらでもOKです。 $\vec{r}=(x,y)=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

単位ベクトルは大きさが1のベクトルなので
x 軸方向の単位ベクトル $\overrightarrow{e_1}$ は

$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されます。

$\boldsymbol{y}$ 軸方向の単位ベクトル $\overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}$ は

$$\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されます。

ここで、$\vec{\boldsymbol{r}}$ は

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$$

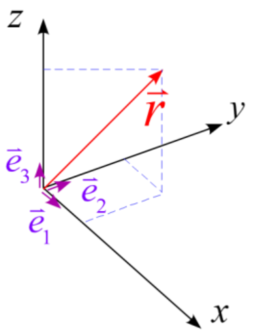
と表されるので

$$\vec{r} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表され、最初の形になることが確認できます。

ベクトル

単位ベクトル　3次元 直交座標



$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

これを3次元空間に拡張すると、

x, y, z 軸方向の単位ベクトル $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$ は

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表されます。

$\vec{\boldsymbol{r}}$ は

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

と表されるので

$$\vec{r} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表され、最初の形になることが確認できます。

ここでは $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ 軸方向の単位ベクトルを $\overrightarrow{\boldsymbol{e_1}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_2}}, \overrightarrow{\boldsymbol{e_3}}$ と記述したが、
他にも $\vec{\boldsymbol{i}}, \vec{\boldsymbol{j}}, \vec{\boldsymbol{k}}$ などの表し方があります。

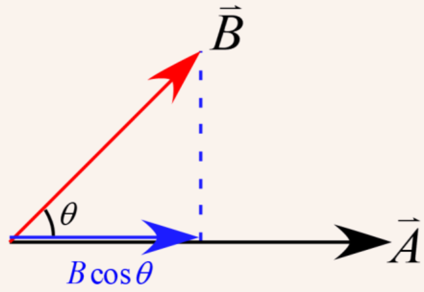
201016-16

ベクトル～内積

ベクトルの内積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



これを3次元の直交座標系を考える

ベクトルの成分を

$$\vec{A}=\left(A_x,A_y,A_z\right)\quad\vec{B}=\left(B_x,B_y,B_z\right)$$

とし、それぞれの単位ベクトルを $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ とすると

ベクトルの掛け算 (積) について復習をしよう。

ベクトルの掛け算には内積と外積がある。
それぞれ表すものや計算方法が異なります。自力で計算ができるようにしましょう。

まずは内積から
ベクトル $\vec{A}$ とベクトル $\vec{B}$ のなす角が θ である時、ベクトルの内積は $\vec{A}\cdot\vec{B}$ と表し、
(ドット)

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

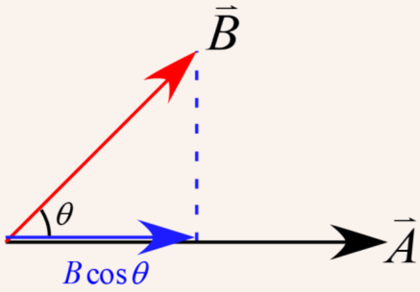
と定義されます。
$|\vec{B}|\cos\theta$の部分は $\vec{B}$ を $\vec{A}$ へ射影した値となっています

ベクトル～内積

ベクトルの内積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$$



これを3次元の直交座標系を考える

ベクトルの成分を

$$\vec{A}=\left(A_x,A_y,A_z\right)\quad\vec{B}=\left(B_x,B_y,B_z\right)$$

とし、それぞれの単位ベクトルを $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ とすると

成分で考えて計算してみよう。

2つのベクトルを $\vec{A}=\left(A_x,A_y,A_z\right),\vec{B}=\left(B_x,B_y,B_z\right)$とし、単位ベクトル $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ を用いて表すと

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

と記述できます。この時の内積は

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)$$

と計算します。それぞれの項を順に掛けていくことになります。

それぞれの項について
例えば、

$$A_x\vec{i}\cdot B_x\vec{i}=A_xB_x\vec{i}\cdot\vec{i}$$

と計算できます。ここで $\vec{\boldsymbol{i}}\cdot\vec{\boldsymbol{i}}$ は

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=|\vec{i}||\vec{i}|\cos\theta=1\cdot 1\cdot\cos 0=1$$

となります。
$\vec{\boldsymbol{i}}$ は単位ベクトルなので $|\vec{\boldsymbol{i}}|=\mathbf{1}$であり、自分自身との内積なので
なす角 $\boldsymbol{\theta}$ はゼロより $\cos\mathbf{0}=\mathbf{1}$ となります。

一方、他の単位ベクトルとの内積の計算は

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=|\vec{i}||\vec{j}|\cos\theta=1\cdot 1\cdot\cos 90^\circ=1\cdot 1\cdot 0=0$$

となります。
他の単位ベクトル同士のなす角 $\boldsymbol{\theta}$ は $\mathbf{90}^\circ$ なので $\cos 90^\circ=0$ となります。
従って

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

となります。

ベクトル～内積

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1$$

が成立するので

$$\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z}$$

となる

任意の2元

$$A=\left(A_1,A_2,\cdots A_n\right)$$

$$B=\left(B_1,B_2,\cdots B_n\right)$$

に対し

$$A\cdot B=\sum_{i=1}^{n}A_iB_i$$

それぞれの成分どうしをかけたものの和

結果としては

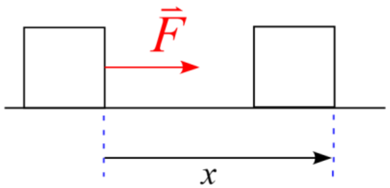
$$\vec{A}\cdot\vec{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z$$

となり、それぞれの同じ成分同士を掛けた値の和で計算ができることになります。

ベクトル～内積

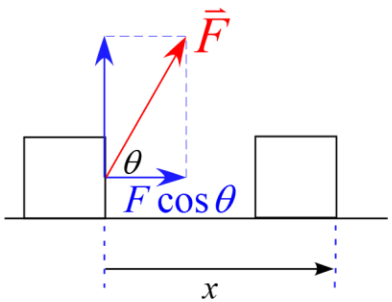
力学で何に使うのか？

仕事を考えるときに使う



仕事＝力×移動距離

$$W = F \times x$$



$$\begin{aligned} W &= F\cos\theta \times x \\ &= Fx\cos\theta \end{aligned}$$

このベクトルの内積は物理で何に使うのか？

という問いに対する例の一つとして力学での「仕事」を考えるときに利用します。

「仕事」は「力がどれくらいの距離に作用したか」を表す物理量で、
「力」と「移動距離」の積で表します。

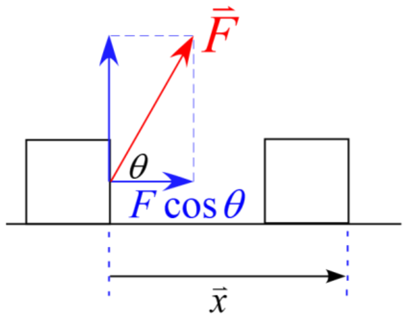
上の図のように移動方向 $\vec{x}$ と作用する力 $\vec{F}$ の向きが一致する場合、
単に「力×距離」で計算することになります。
一方、下の図のように移動方向 $\vec{x}$ と作用する力 $\vec{F}$ の向きが一致しない場合、
仕事として考える力は「移動方向の成分のみ」となります。
従って、力 $\vec{F}$ の x 成分「$F\cos\theta$」と移動距離 x の積となります。

ベクトル～内積

一般化したい

力も変位もベクトルだから
ベクトルを用いて表したい

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$
$$= |\vec{F}||\vec{x}|\cos\theta$$



力と変位が平行の場合は

$$\cos 0 = 1$$

なので $W = |\vec{F}||\vec{x}|$

しかし、前述のように場合分けするのではなく、一つの式で表すことを考えると、
つまり「一般化」することを考えると、仕事 W は力 $\vec{F}$ と変位 $\vec{x}$ の内積で表すことができ、

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$

と記述します。
この内積は

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x} = |\vec{F}||\vec{x}|\cos\theta = \underbrace{|\vec{F}|\cos\theta}_{\vec{F}\text{ の }x\text{ 成分}}\cdot\underbrace{|\vec{x}|}_{\text{距離}}$$

となります。
力 $\vec{F}$ と変位 $\vec{x}$ のなす角 θ が 0 の場合 $\cos 0 = 1$ となるので $W = |\vec{F}||\vec{x}|$ となります。

さらに、力 $\vec{\boldsymbol{F}} = \left(\boldsymbol{F_x}, \boldsymbol{F_y}\right)$ とし変位 $\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ と表したとすると

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = F_x x + F_y y$$

と計算できます。
ここで、前出の例の条件を適用すると
力は $\boldsymbol{F_x} = \boldsymbol{F}\cos\boldsymbol{\theta}$, $\boldsymbol{F_y} = \sin\boldsymbol{\theta}$ であり、変位は $\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$ であるから

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x} = F_x x + F_y y = F\cos\theta \cdot x + F\sin\theta \cdot 0 = Fx\cos\theta$$

となり、成分で考えても前述の結果と一致することが確認できます。

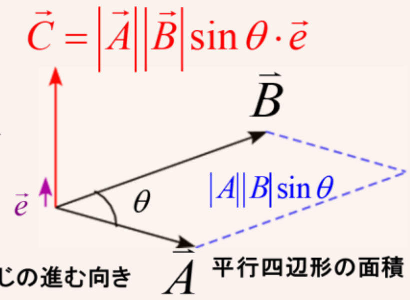
ベクトル～外積

ベクトルの外積

$$\vec{A}\times\vec{B}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta\cdot\vec{e}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$$



内積のときと同様に成分で考えてみると

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

$$\vec{B}=B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}$$

ベクトルの外積については高校数学では学習していないと思うので新しい内容となります。

ベクトル $\vec{A}$ とベクトル $\vec{B}$ がなす角 θ である時、ベクトルの外積は $\vec{A}\times\vec{B}$ と表し

(クロス)

$$\vec{A}\times\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta\cdot\vec{e}$$

と定義されます。
まず、「ベクトルの外積の結果はベクトル」になります。
「内積の結果はスカラー」であることと異なる点です。

この外積の結果のベクトル $\vec{e}$ は $\vec{A}$ と垂直かつ $\vec{B}$ とも垂直なベクトルとなっています。

さらになす角 θ は $\vec{A}$ を起点として反時計回りの方向が正と設定されています。
即ち、「外積は掛ける順番が入れ替わると正負が異なる」ことに注意したい。

つまり、

内積: $\vec{A}\cdot\vec{B}=\vec{B}\cdot\vec{A}$

外積: $\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A}$

となります。

外積の大きさは

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta$$

で表されます。
何故そう表されるのかについては、
後日、レポート課題の一つとして掲示するのでチャレンジしてみて下さい。

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)\times\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)$$
$$=$$

ここで単位ベクトルに対して

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=\vec{0}$$
$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$$

が成立するので

内積の場合と同様に成分で考えてみると

$$\vec{A}\times\vec{B}=\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)\times\left(B_x\vec{i}+B_y\vec{j}+B_z\vec{k}\right)$$
$$=A_x\vec{i}\times B_x\vec{i}+A_x\vec{i}\times B_y\vec{j}+\cdots$$

と、順にそれぞれの項を順に掛けていくことになります。
実際の計算は各自で1回はやってみて下さい。
自分の手を動かすことは大事です。

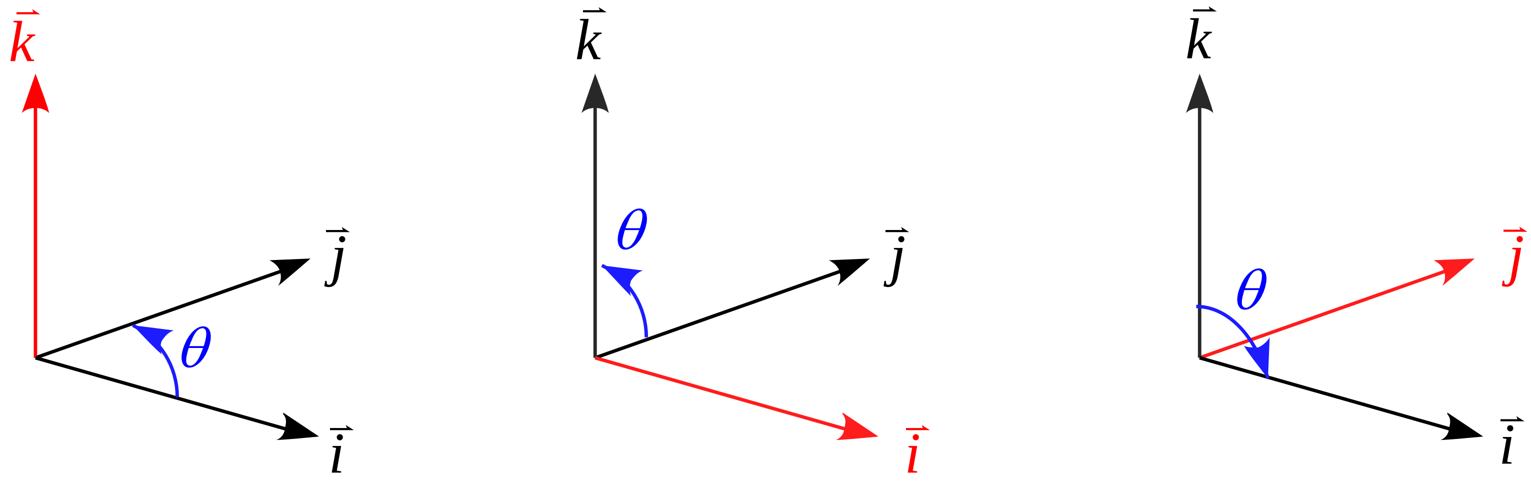
それぞれの単位ベクトルの外積の計算について
まずは自分自身同士はなす角 θ が 0 になるので、
例えば、

$$|\vec{i}\times\vec{i}\,|=|\,\vec{i}\,||\,\vec{i}\,|\sin\theta=1\cdot 1\cdot\sin 0=0$$

となります。
従って、大きさが 0 であるベクトルなので

$$\vec{i}\times\vec{i}\ =\vec{0}$$

となります。他の単位ベクトルも同様な計算となります。
異なる単位ベクトルの場合は向きに注意する必要があります。



$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}\qquad\qquad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}\qquad\qquad \vec{k}\times\vec{i}\ =\vec{j}$$

ベクトル～外積

となるので、ベクトルの外積は

$$\vec{A}\times\vec{B}$$
$$=\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\vec{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\vec{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\vec{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{pmatrix}A_yB_z-A_zB_y\\A_zB_x-A_xB_z\\A_xB_y-A_yB_x\end{pmatrix}$$

となる

回転運動(角運動量・力のモーメント)

電磁気学

などで使う

成分を計算した結果は上記のようになります。
この結果は覚えなくてもOKです。
テストではこの結果をヒントとして与えるので心配は要らないです。

ベクトルの外積は力学の「回転運動」で登場します。
「力のモーメント」、「角運動量」などで使います。
電磁気学でも多く利用します。

新しい数学の部分になるので、まずは慣れましょう。

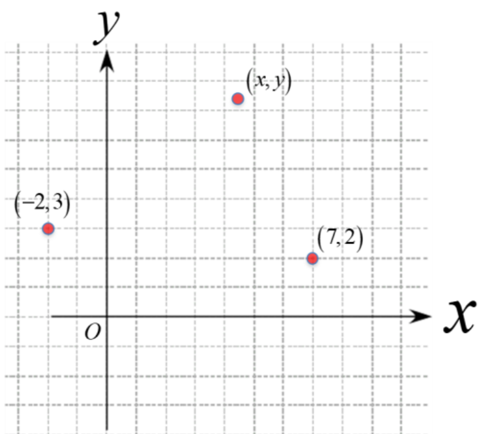
201016-24

ベクトル～座標系

空間内の位置を特定するための座標系は3数の要素で構成される
1.基準点 O(原点)
2.適当な尺度で標識を目盛った1組の座標軸　(x, y – 2次元)
3.原点及び座標軸に対して空間内の点をどのように表記するかという約束

座標系
・デカルト座標系 (直角座標系)
・極座標系

例 (2次元)
直角座標系

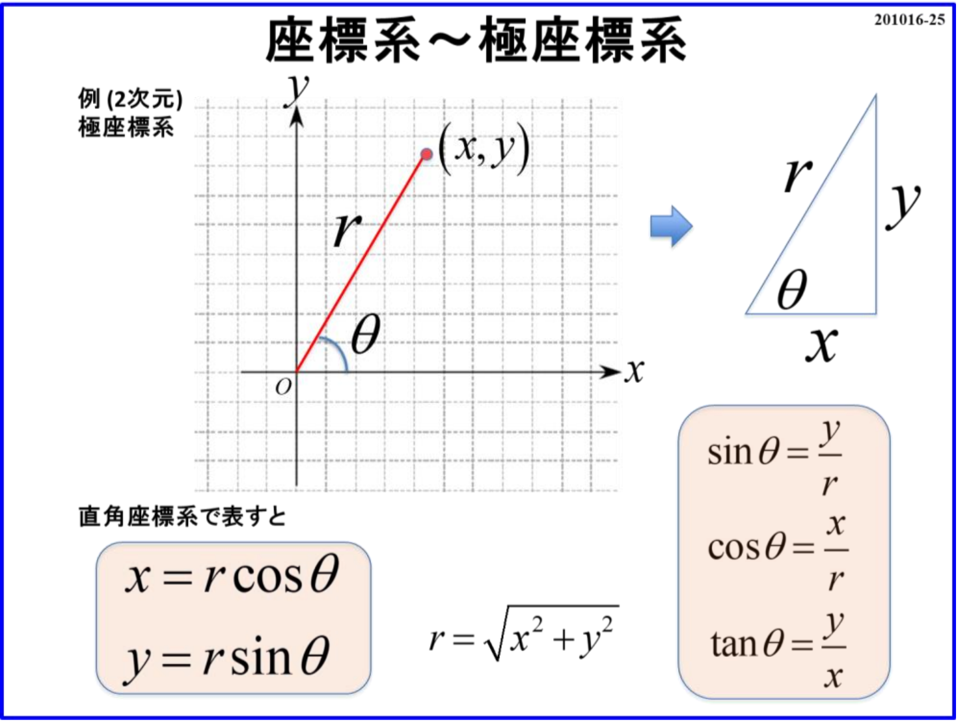


座標系について確認しておきましょう。
座標は位置を決める上で重要な概念です。

座標系の要素は
1. 基準点
2. 軸と目盛
3. 表記のルール

となります。

座標系でよく知られているのは「直角座標系」でしょう。
「極座標系」も物理では活用します。



ここでは2次元の極座標について取り扱います

極座標(2次元)は原点からの長さ r と x 軸とのなす角 θ を用いて

$$(r, \theta)$$

と表します。
これを直角座標系で表すと、

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\sin\theta$$

と表されます。

また、

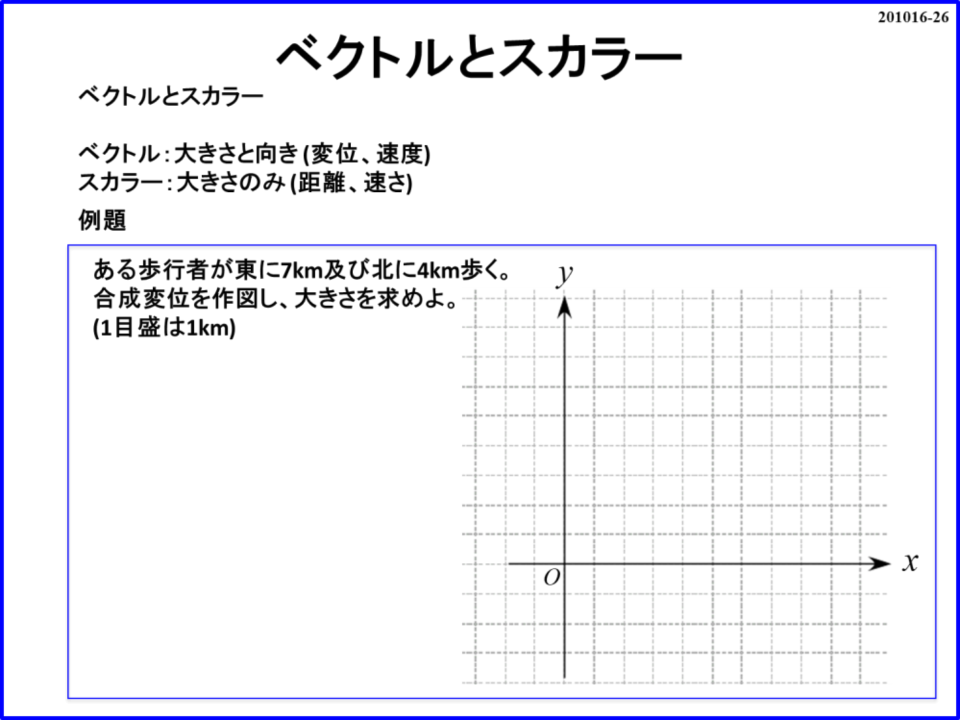
$$r = \sqrt{\left(r\cos\theta\right)^2 + \left(r\sin\theta\right)^2}$$

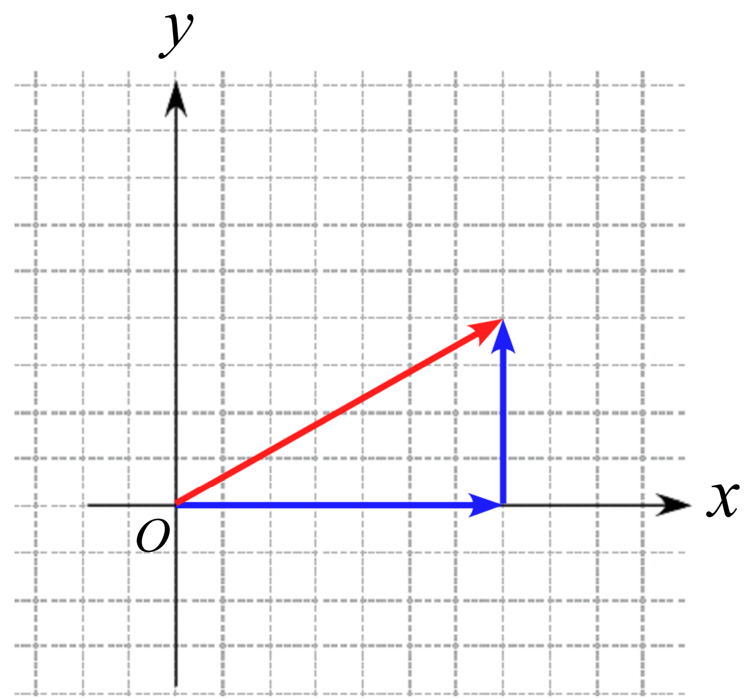
$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)}$$

$$= r$$

となり、結果が一致することが確認できます。





「ベクトルの表記」で述べたように、
物理では**ベクトルとスカラーをしっかり分けて考える**必要があります。

ベクトル：大きさ＋向き ・・・ 変位, 速度 など
スカラー：大きさのみ ・・・ 距離, 速さ など

となります。

例題の計算は

$$|r| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65}\ \mathrm{km}$$

となります。**単位がある例題は単位まで記述する**こと。