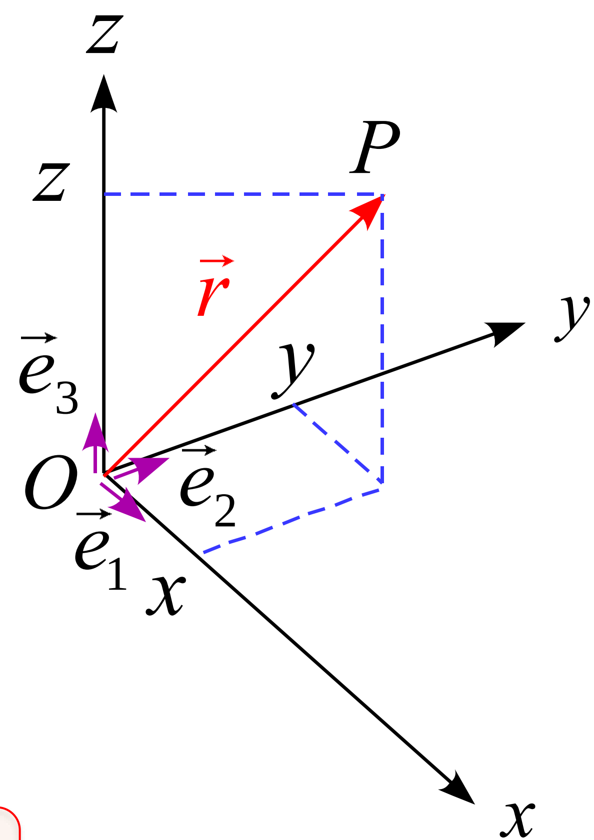
位置ベクトル

位置

観測者 O に対する（O を始点とする）

物体 P の位置ベクトル

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$



この座標系は、観測者 O に対する

相対座標系となる

3次元の運動を考えるときは

このベクトルが時刻 t の関数として追跡する

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 \quad \vec{e}_2 \quad \vec{e}_3$$

位置ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

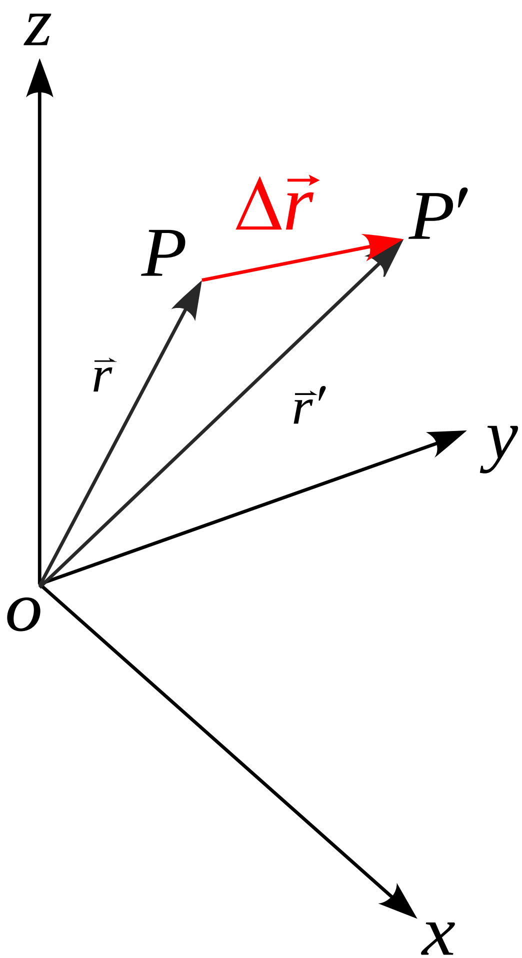
なので

$$\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3$$

$$\vec{r} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

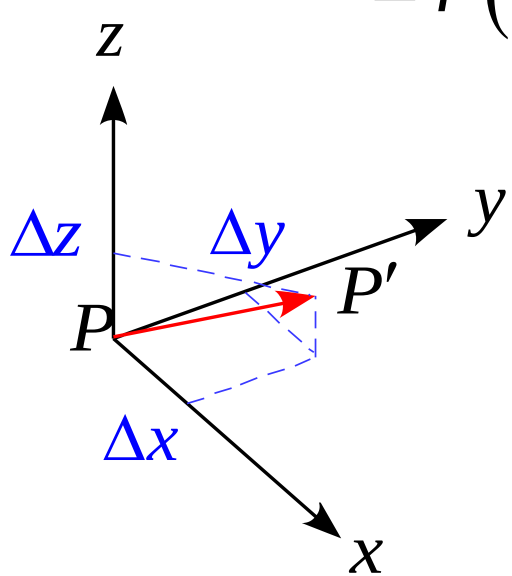
変位ベクトル

物体の移動



$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{r} &= \vec{r}' - \vec{r} \\ &= \vec{r}\left(t + \Delta t\right) - \vec{r}\left(t\right)\end{aligned}$$



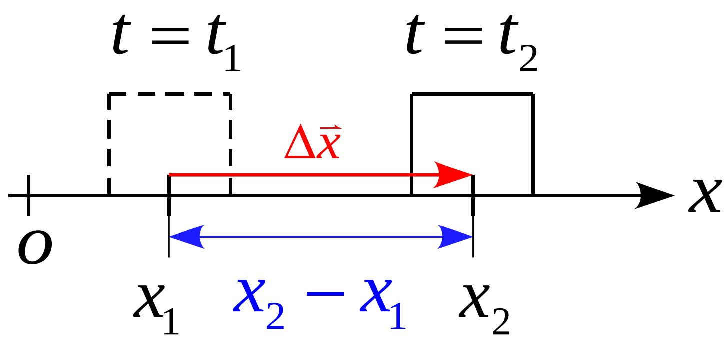
変位 $\Delta\vec{r}$ ・・・移動した距離＋向き

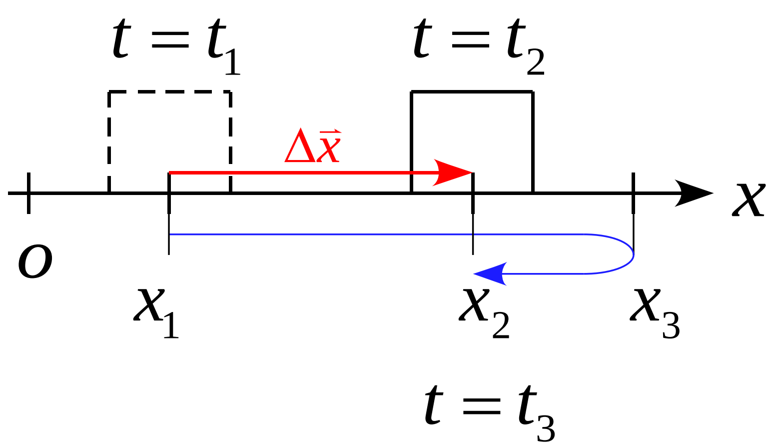
距離 $|\Delta\vec{r}|$ ・・・移動した距離

変位ベクトル

変位 $\Delta\vec{r}$　・・・ 移動した距離＋向き

距離 $|\Delta\vec{r}|$　・・・ 移動した距離





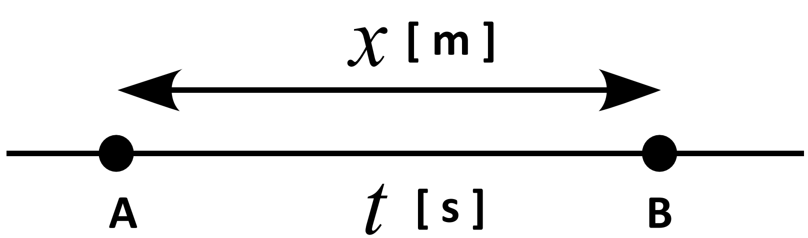
速度・加速度～速さ

物理では・・・**時間変化が重要**

例えば

物が動く・・・ **速さ、速度 加速度** が知りたい

平均の速さ:　目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか
「平均するとどの程度の速さでず～っと走り続けたのと同じか」



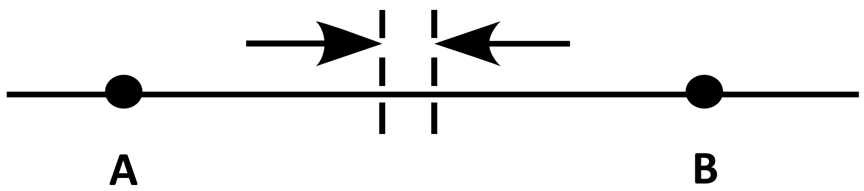
平均の速さ

$$\bar{v} = \frac{x}{t} \quad [\,\mathrm{m/s}\,]$$

速さ

瞬間の速さ　:ある時点での「スピード」のこと

Δx [m] (極めて短い距離)



Δt [s] (極めて短い時間)

瞬間の速さ

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad [\,\mathrm{m/s}\,]$$

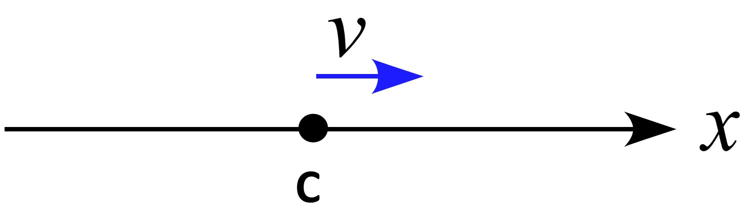
速さ～速度

速度＝速さ＋向き　←ベクトル

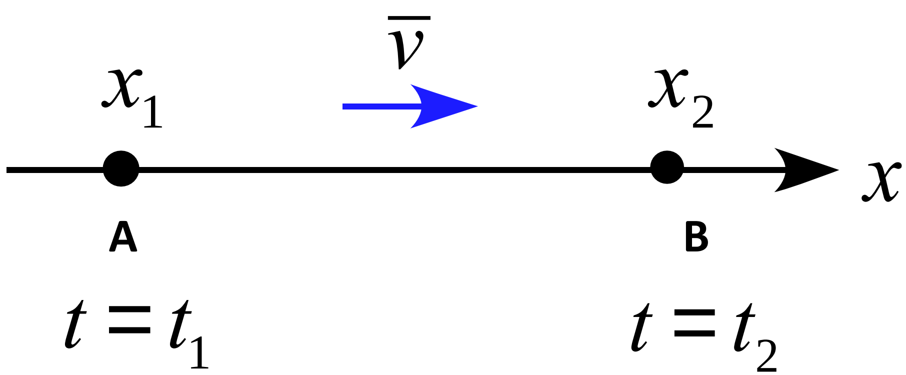
物理学では
大きさも向きも大事

例

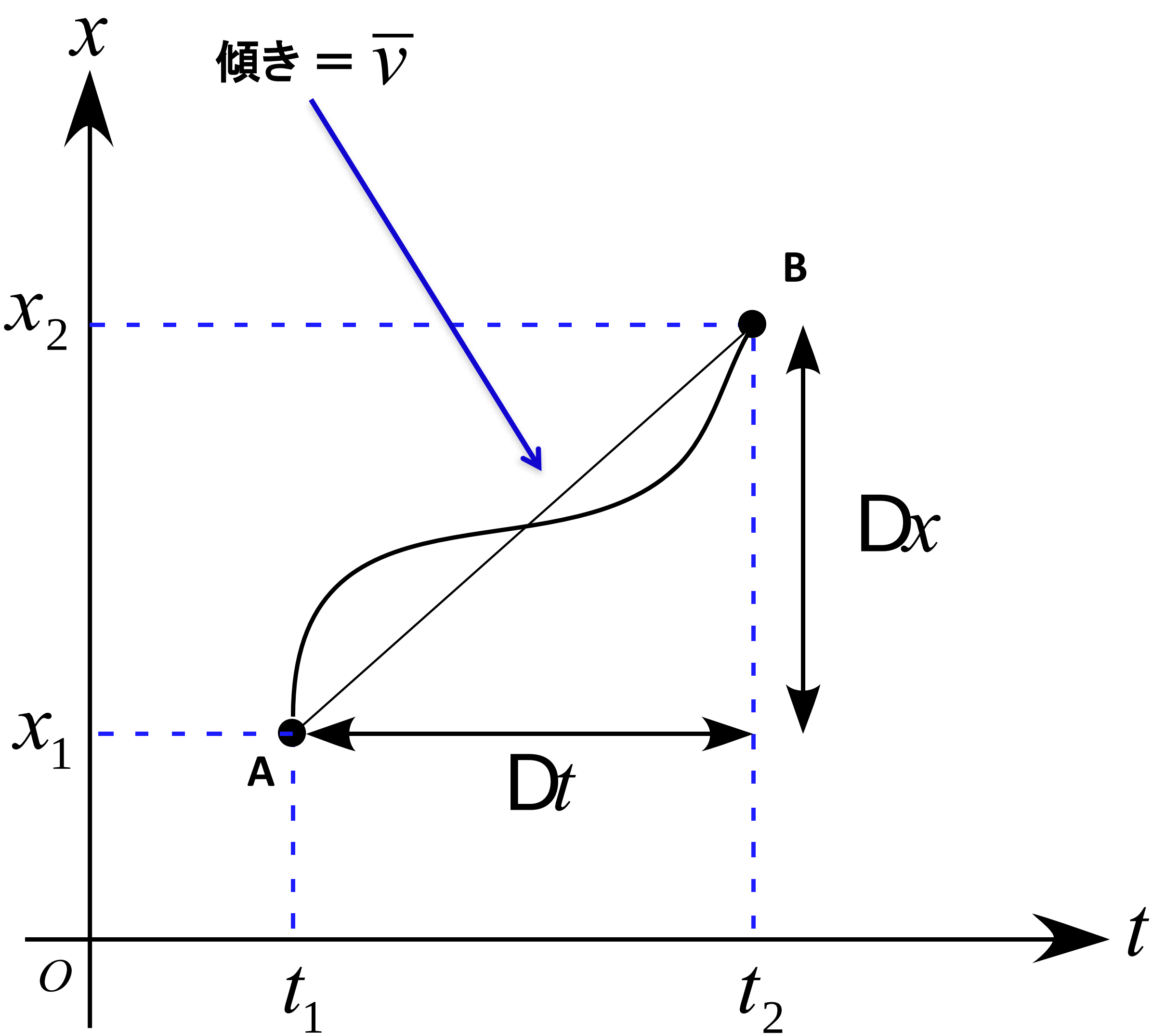
５ [m/s]の速さで走っている（どっち向きかわからない）
５ [m/s]の速度で走っている（ある特定の向きに走っている = 向きが決まっている）



平均速度：時間tに対する変位xの変化



質点の位置 – 時間の関係



平均速度

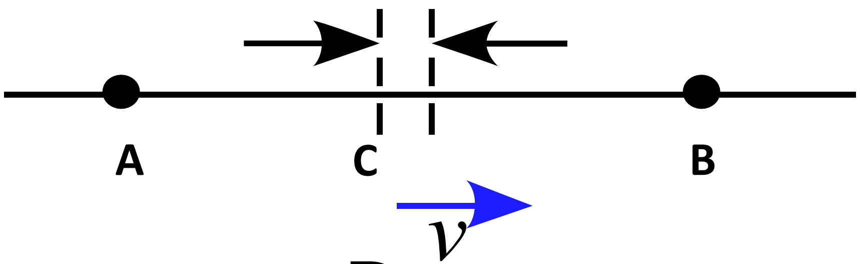
平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

瞬間速度

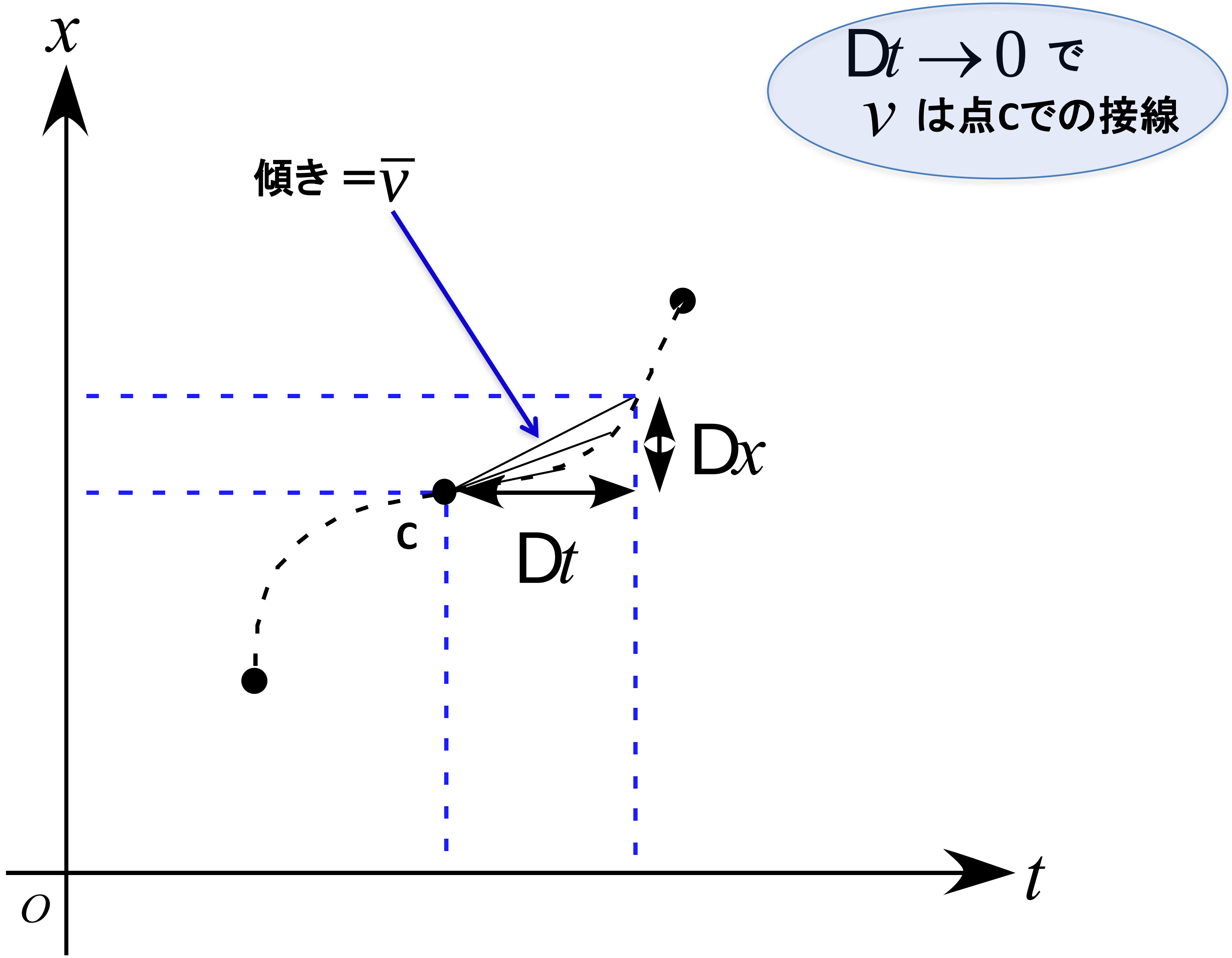
瞬間速度

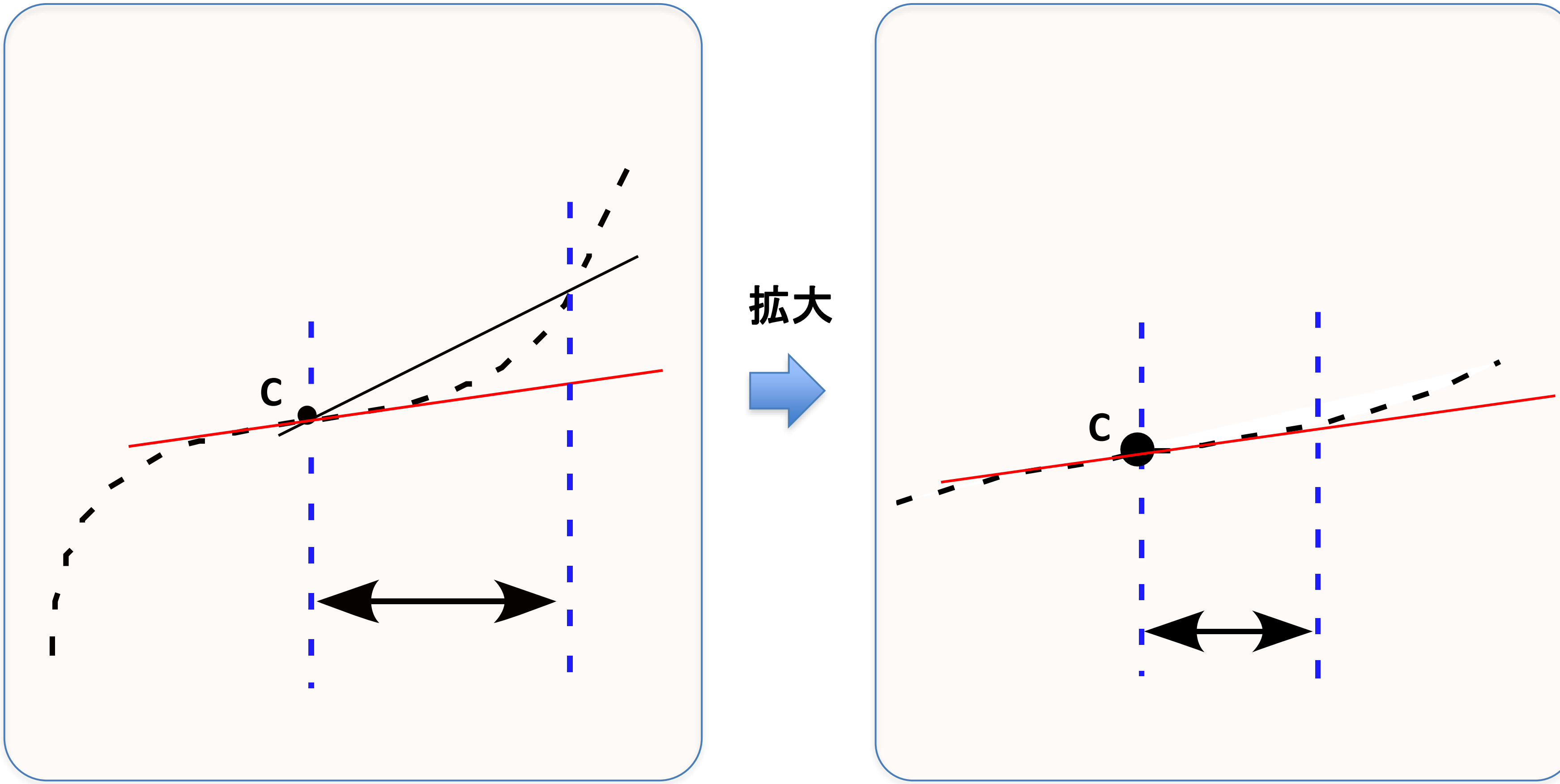
Dx [m] (極めて短い距離)



Dt [s] (極めて短い時間)

質点の位置－時間の関係





$Dt \to 0$ で
v は点Cでの接線

速度～瞬間速度

瞬間速度

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overbrace{\boxed{x(t + \Delta t) - x(t)}}^{\text{変位}}}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点が $t_1 = 1\ \mathrm{s}$ のとき $x_1 = 14\ \mathrm{m}$ の位置にあり、$t_2 = 3\ \mathrm{s}$ のとき $x_2 = 4\ \mathrm{m}$ の位置にある。

1. この運動における変位を求めよ。

2. この運動における平均速度を求めよ。

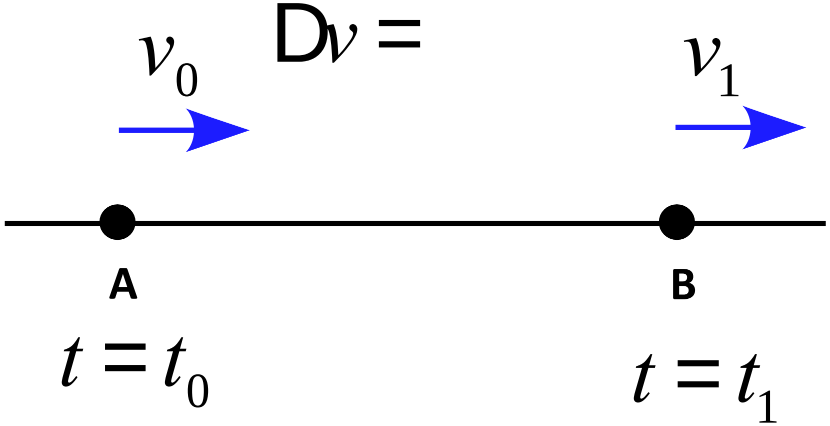
加速度

加速度：どれくらいの時間をかけて、どれくらい速度が変化するかの度合い

時間に対する速度変化率

平均加速度

$\Delta v =$

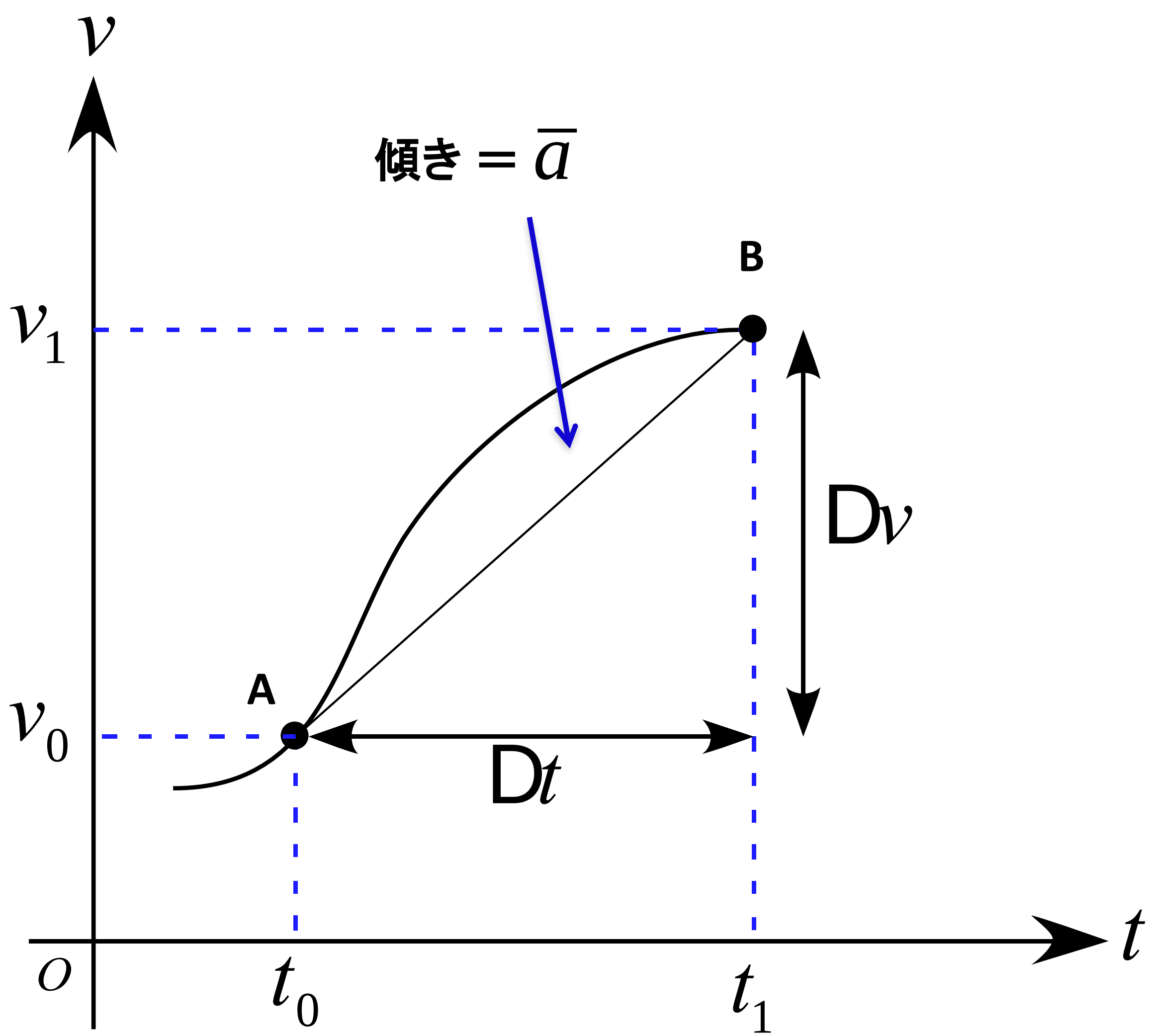


$\Delta t =$

平均加速度

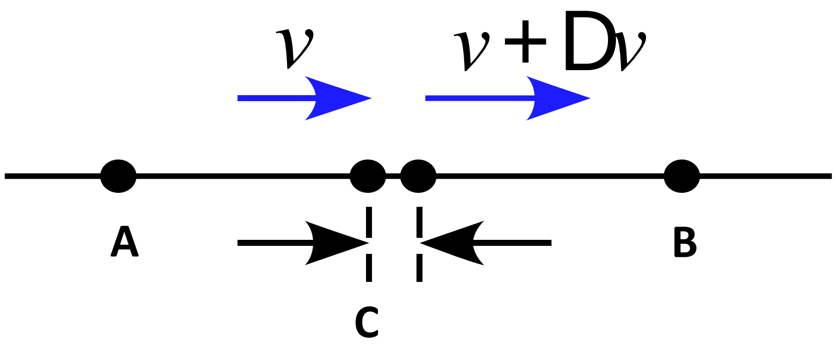
$$a = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

質点の速度 – 時間の関係



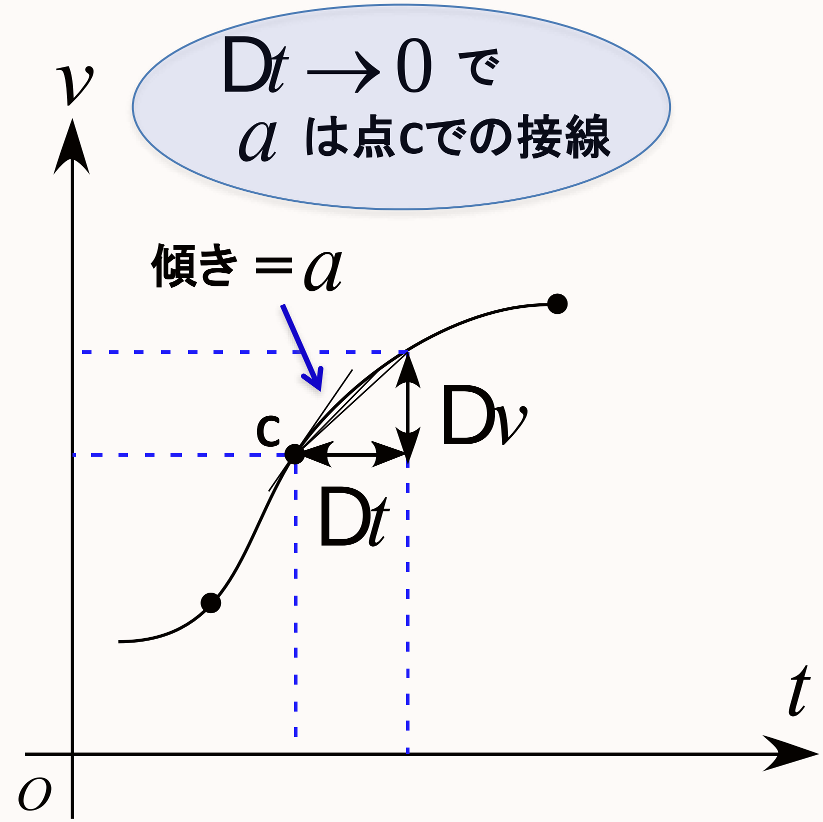
加速度～瞬間加速度

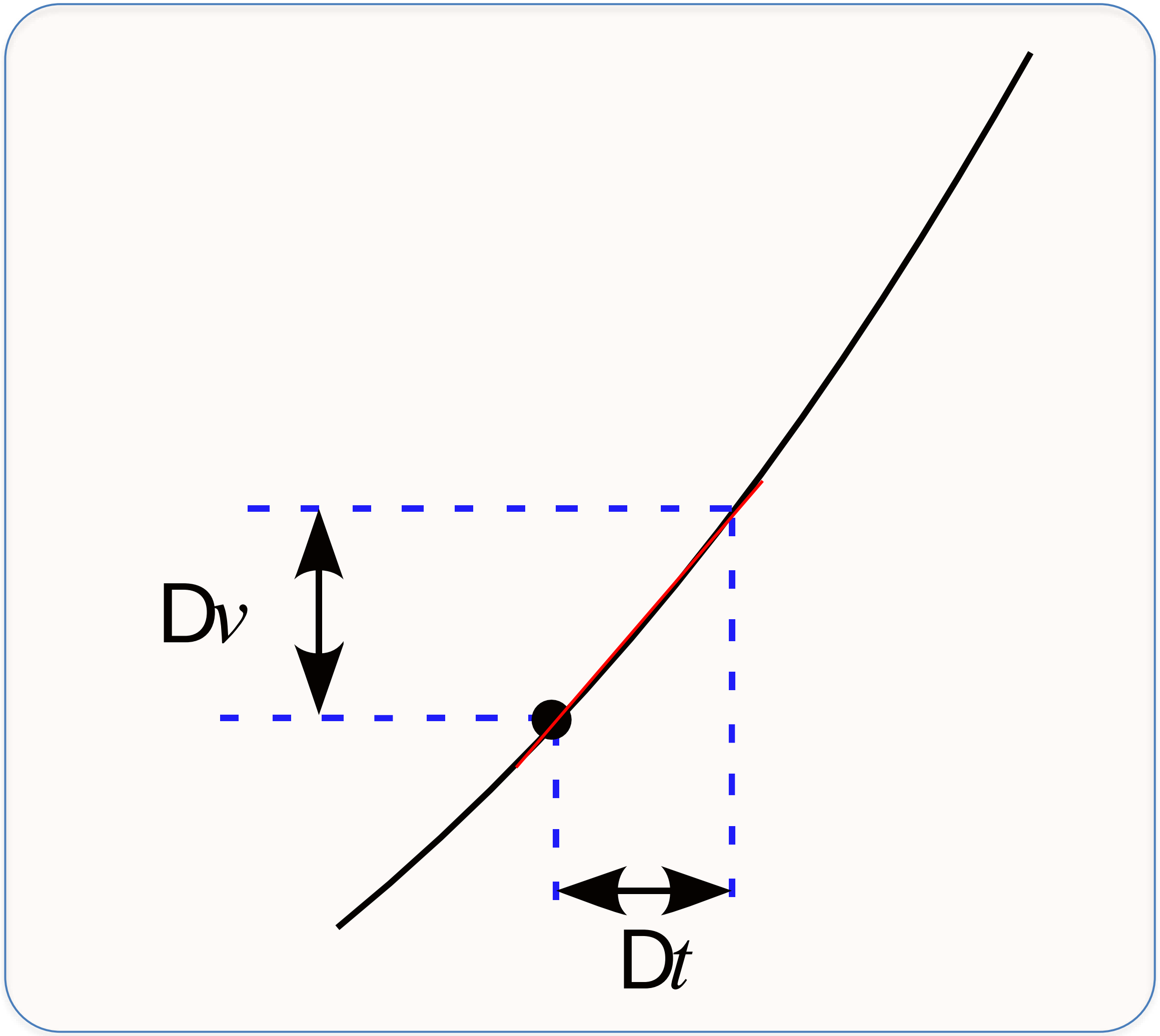
瞬間の加速度　(単に「加速度」)



Dt **(極めて短い時間)**

質点の速度－時間の関係




Dv
Dt

瞬間加速度

瞬間加速度

速度変化

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boxed{(v + \Delta v) - v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}$$

v は t の関数であると考えると

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

2回微分する

加速度

それぞれ何を意味するか考えよう

$a > 0$

加速する

$a < 0$

減速する（ブレーキをかける）

逆向きに走っているという意味ではない

加速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点が $v(t) = 5 + 10t$ m/s に従って運動する。
この質点は $t = 0$ s における位置は 20 m である。

1. 加速度を時間 t の関数として表せ。

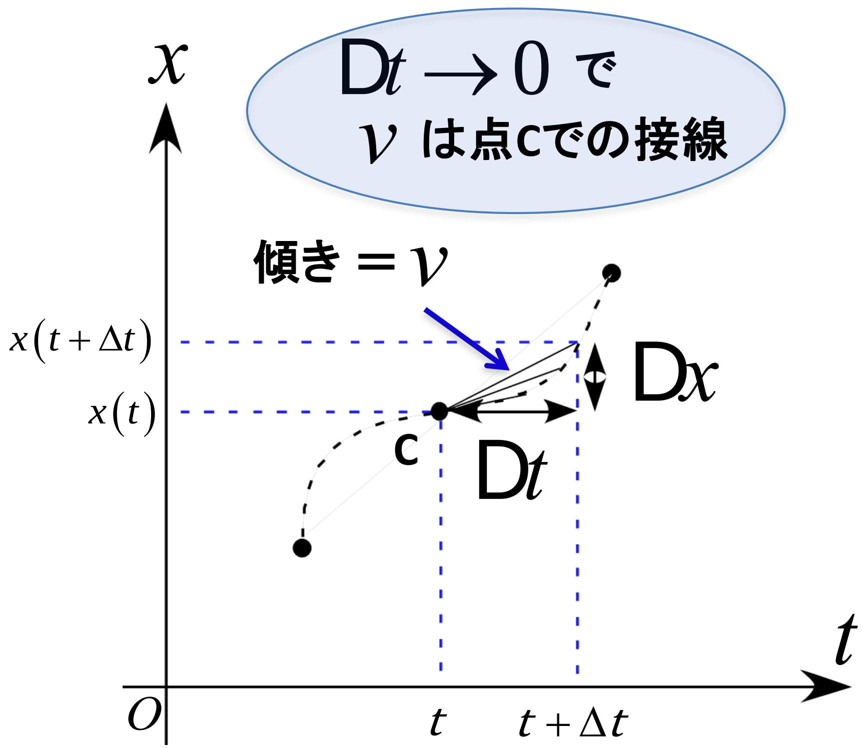
2. $t = 0$ における質点の速度を求めよ。

3. 位置を t の関数として表せ。

速度 ～ まとめ

速度

質点の位置 – 時間の関係



変位の時間変化率

$x - t$ グラフの傾き = 速度

傾き= $\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ ⇨ $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$ 極限

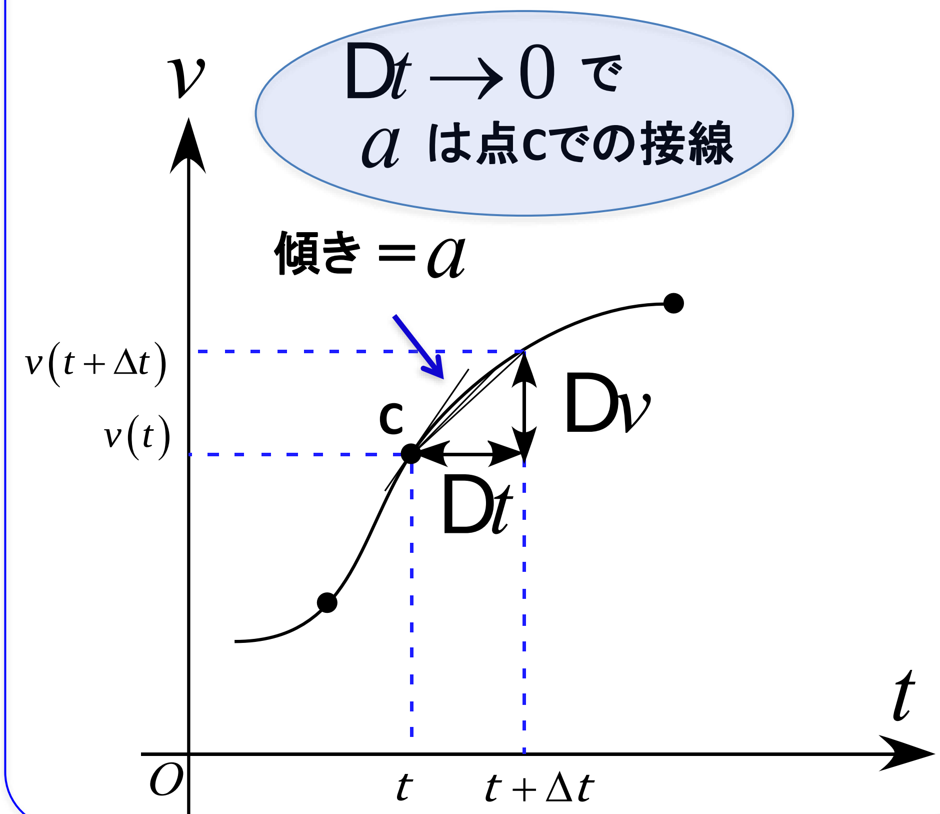
$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

変位 x を時間 t で微分したもの

加速度 ～ まとめ

加速度

質点の速度－時間の関係



速度の時間変化率

$v-t$ グラフの傾き = 加速度

傾き= $\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$ ⇨ $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$ 極限

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

速度 v を時間 t で微分したもの

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = \left(v_x, v_y, v_z \right)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right) = \left(a_x, a_y, a_z \right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_3$$

と表すことができる

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

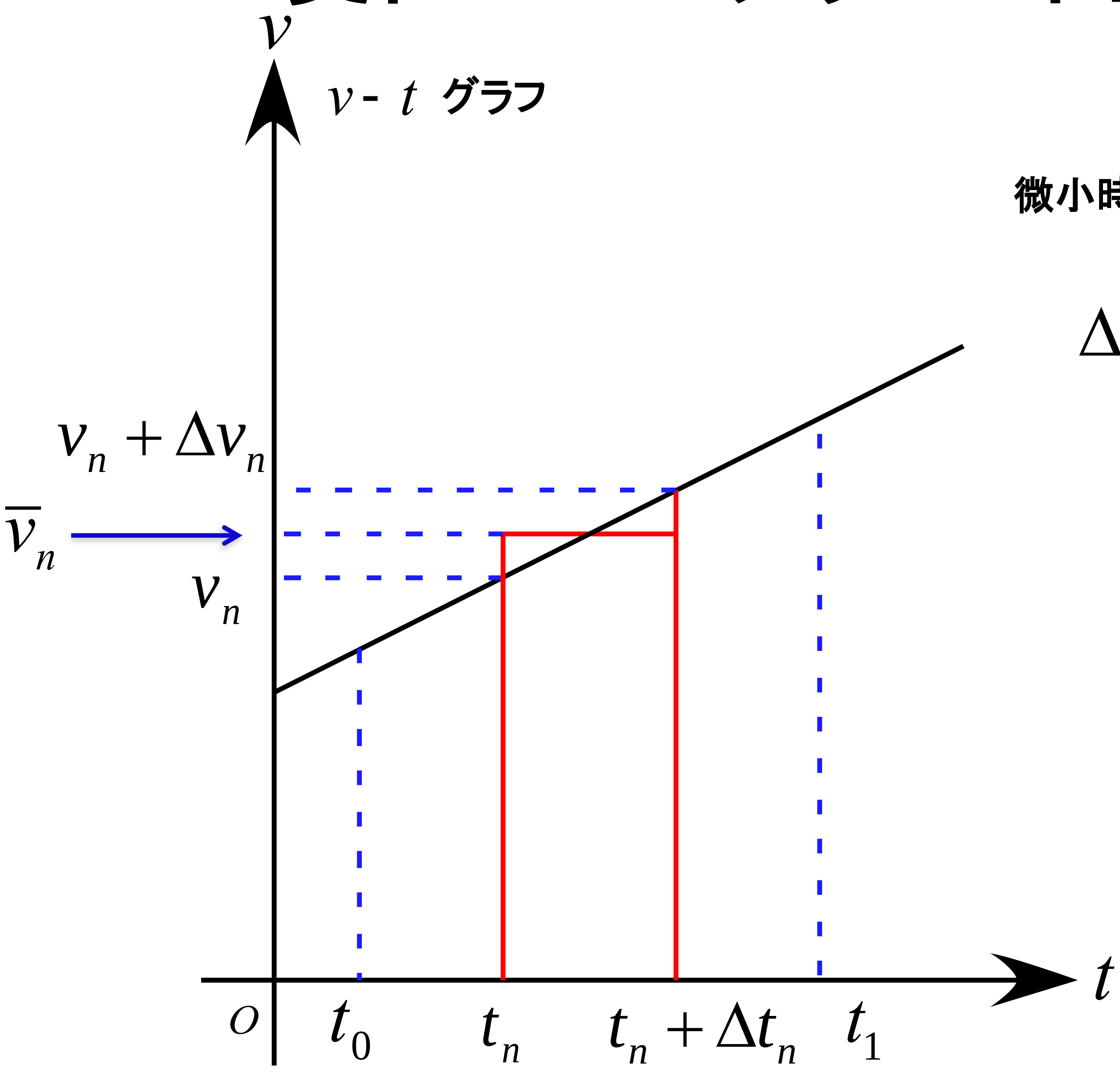
変位ベクトルの時間変化率

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

速度ベクトルの時間変化率

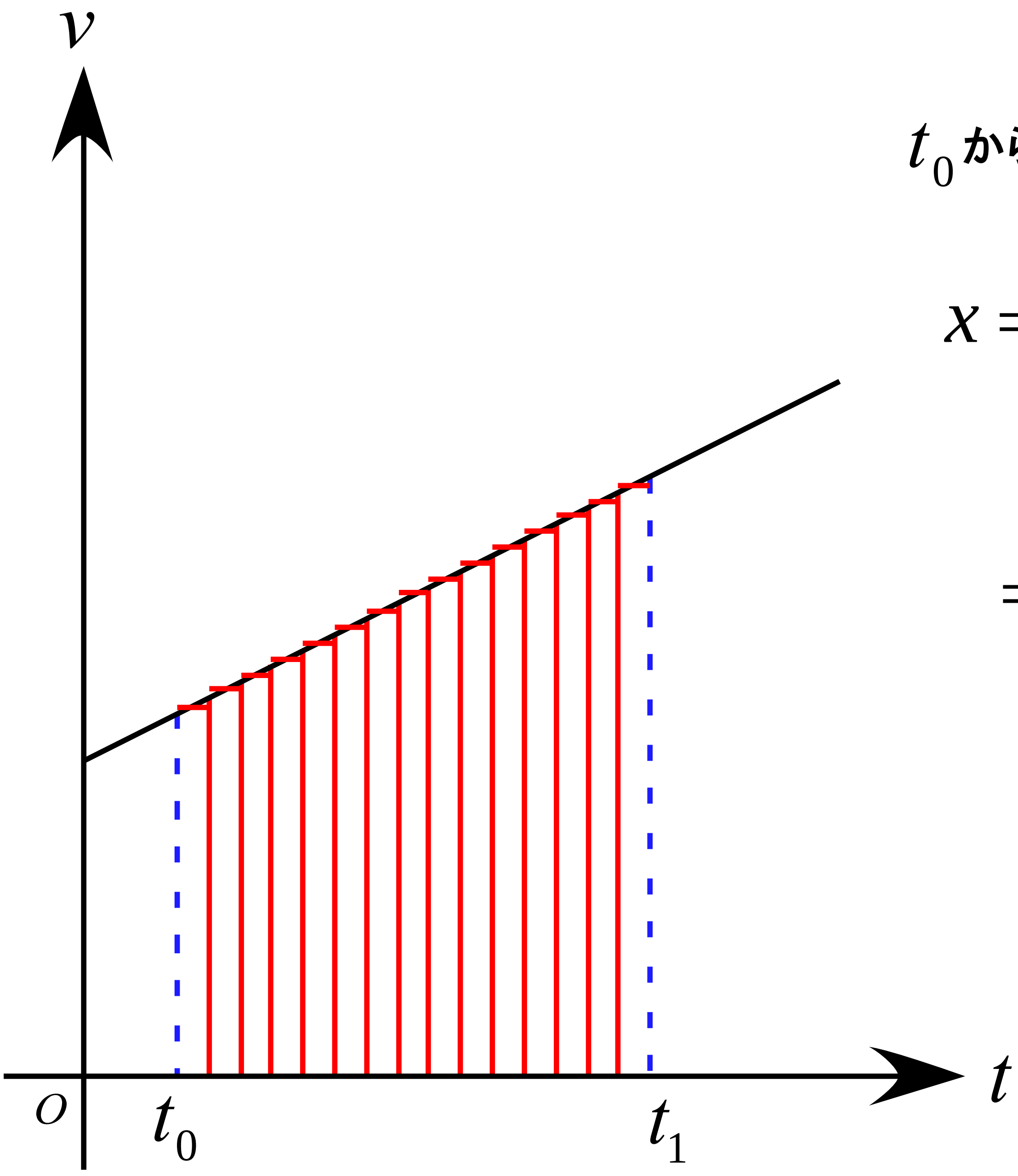
となる

変位とv- tグラフの面積



微小時間 $\mathrm{D}t_n$ における変位は

$$\Delta x_n = \overline{v}_n \cdot \Delta t_n$$

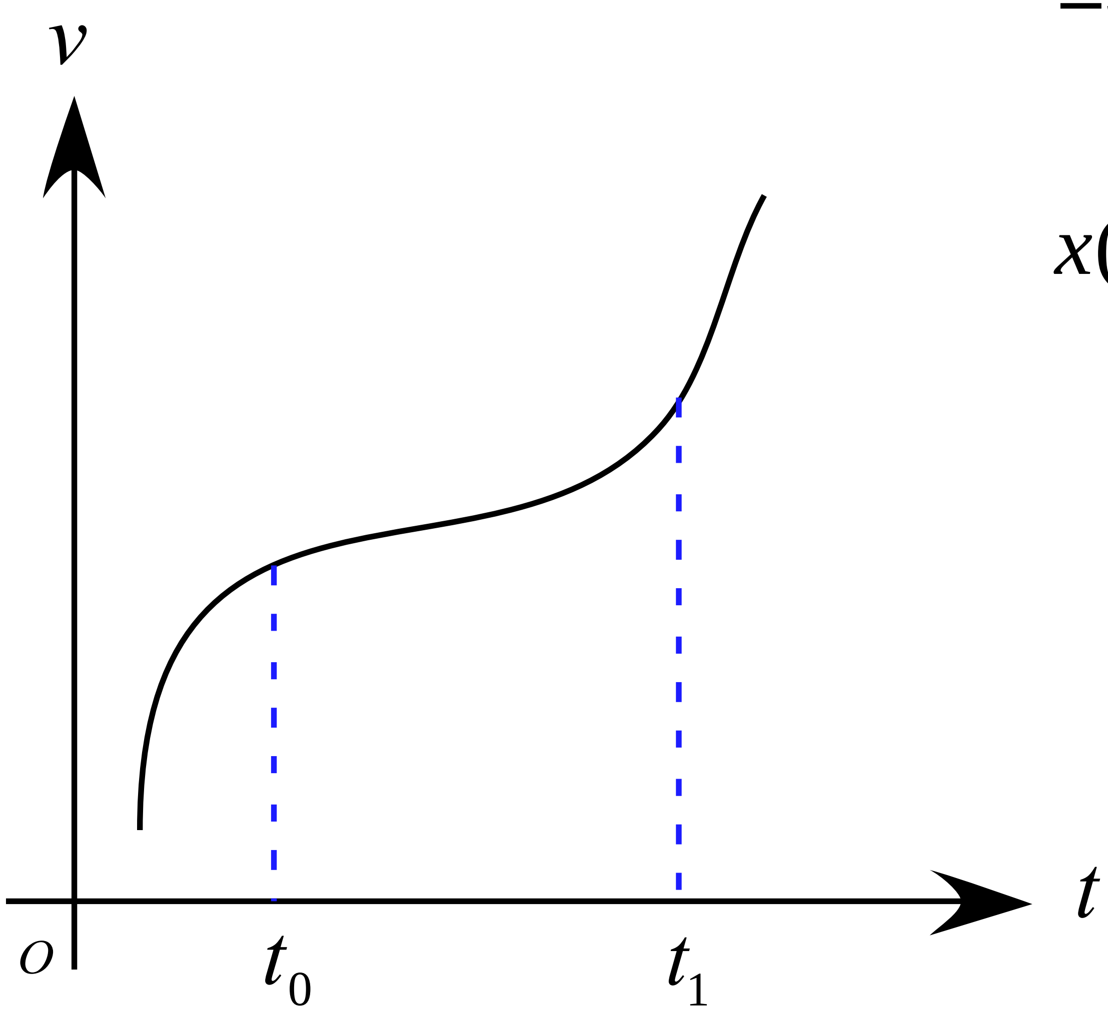


t_0 から t_1 まで合計する

$$x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n \bar{v}_n \cdot \Delta t_n$$

$$= \int_{t_0}^{t_1} v(t)\, dt$$

v - t グラフ



一般的に

$$x(t) = \int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

変位〜速度〜加速度

変位	微分 →	**速度**	微分 →	**加速度**
x	← 積分	$v=\dfrac{dx}{dt}$	← 積分	$a=\dfrac{dv}{dt}$