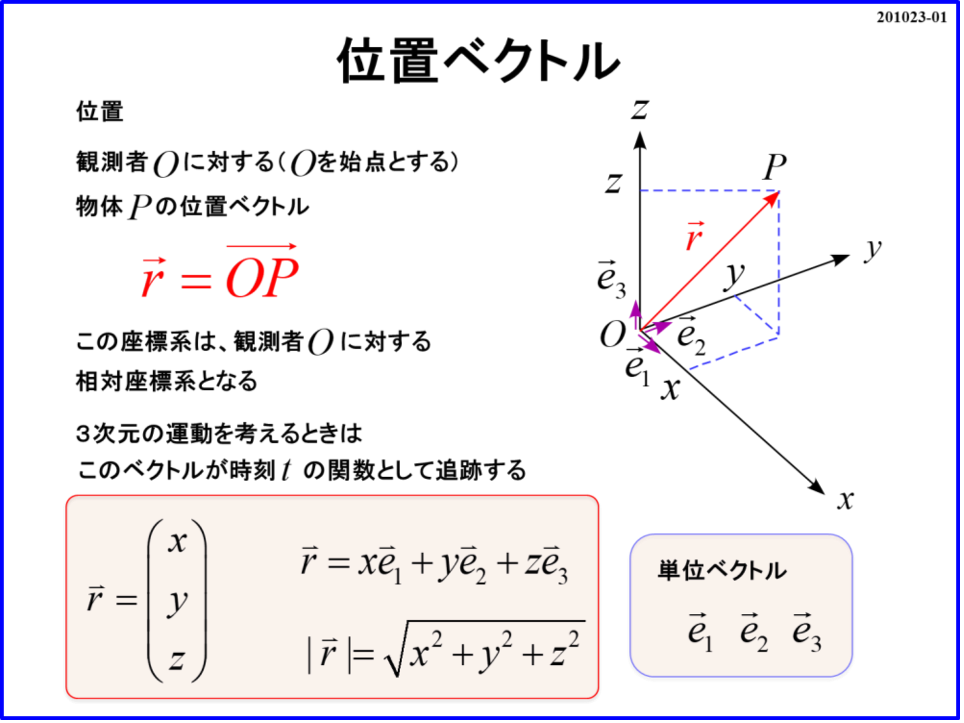
2020講義ノート
一般物理学 (力学)
理学部・生物学科
解説 ver.



さて、それでは実際に物理での利用について説明していきます。
最初のスライドで話したように、物理は「物(モノ)」の「理(コトワリ)」の学問です。
その「物」がどこに在るのかを表す方法が「位置ベクトル」になります。

「物体」がどこに在るかを表すには、まず「観測者」が必要になります。
この「観測者」が居る点を「原点」に取ると、「物体」のある位置 P を位置ベクトルで表すと

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

となります。
実は、原点(観測者)の位置はモデルによって自分で決めることになります。

点 P の座標を $P(x,y,z)$ とし、x,y,z 軸の単位ベクトルを $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ とすると

$$\vec{r}=\overrightarrow{OP}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$$

と表すことができます。

201023-02

位置ベクトル～単位ベクトル

単位ベクトル

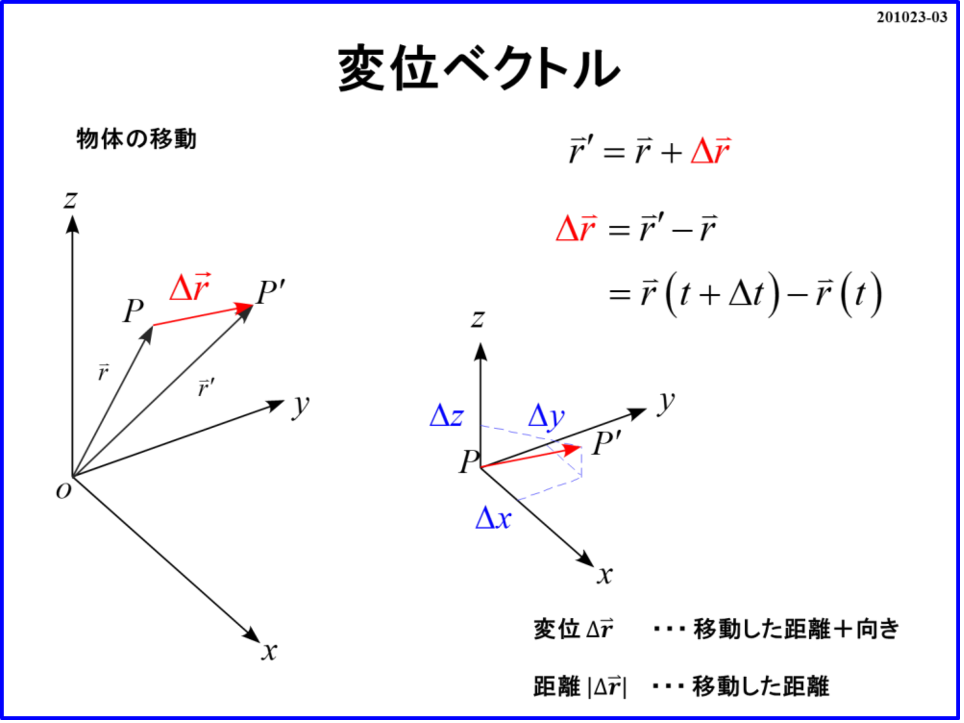
$$\vec{e}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\vec{e}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\qquad\vec{e}_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

なので

$$\vec{r}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2+z\vec{e}_3$$

$$\vec{r}=x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

**x,y,z 軸の単位ベクトルを $\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3}$ は
201016-15 で説明したものと同様になります。**



物体がある時刻 t で点 P に居て、時刻 $t + \Delta t$ で点 P' に居たとする。
この時、時間 Δt の間に物体が点 P から点 P' に移動したと考え、
この移動を「点 P から点 P' へ変位した」と言います。

変位 $\Delta\vec{r}$ と距離 $|\Delta\vec{r}|$ は似ている部分もあるが、
扱いや意味が異なる部分もあるので注意が必要になります。

左図で、$\triangle OPP'$ に着目すると

$$\vec{r}' = \vec{r} + \Delta\vec{r}$$

となります。

従って、変位 $\Delta\vec{r}$ は

$$\Delta\vec{r} = \vec{r} - \vec{r}'$$

と表され、位置ベクトルが時間 t の関数として表すと

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}\left(t+\Delta t\right) - \vec{r}'\left(t\right)$$

となります。
右の図は点 P から点 P' の部分を取り出した図になります。

$$\Delta\vec{r} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta z \end{pmatrix}$$

と表され、それぞれの成分ごとに扱うことができます。

これはとても重要なことで

$$\boxed{x' = x + \Delta x}$$

直線運動

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + \Delta x \\ y' &= y + \Delta y \end{aligned}}$$

平面運動

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x + \Delta x \\ y' &= y + \Delta y \\ z' &= z + \Delta z \end{aligned}}$$

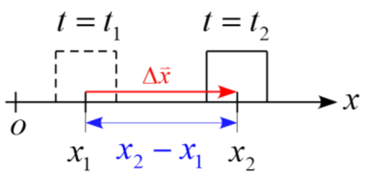
立体的な運動

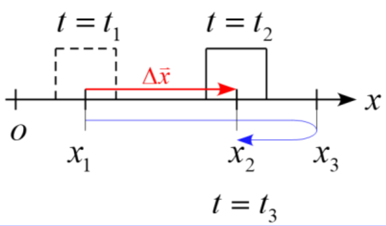
と運動の種類によって成分を設定し、
それぞれの軸に沿って考えればよいということになります。

変位ベクトル

変位 $\Delta\vec{r}$　・・・移動した距離＋向き

距離 $|\Delta\vec{r}|$　・・・移動した距離





一般的には「変位 $\Delta\vec{r}$ はベクトル量」で「移動した距離＋向き」で表され、
「距離はスカラー量」で「移動した距離の大きさのみ」で表されます。
図の上側は x 軸上の運動を考えたもので

変位　　：$\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$

移動距離：$|\Delta\vec{x}|=|x_2-x_1|$

となります。

一方、下側の図では

変位　　：$\Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1$

移動距離：$\Delta x = |x_3 - x_1| + |x_3 - x_2|$

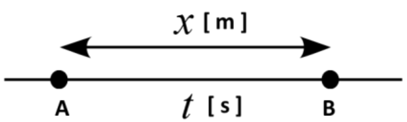
となるので注意が必要になります。

速度・加速度～速さ

物理では・・・時間変化が重要

例えば
物が動く・・・ 速さ、速度 加速度 が知りたい

平均の速さ： 目的地まで「どれくらいの距離」で、「どれくらいの時間」がかかったか
「平均するとどの程度の速さでず～っと走り続けたのと同じか」



平均の速さ

$$\overline{v} = \frac{x}{t} \quad [\mathrm{m/s}]$$

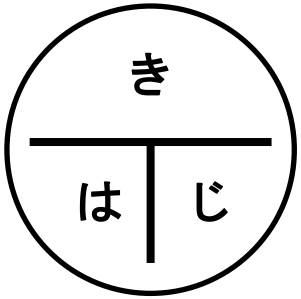
前のページでは変位について説明しました。
この変位が「時間あたりどれくらいであるか？」というものを表した量が「速度」になります。

さて、物理では**「時間変化」が重要**になります。
例えば、「物体」が動いたとしたとき、ある時刻での「速さ、速度、加速度」などを
知りたくなる訳です。

それでは、まずは「速さ」について説明していきましょう。
小学校の算数や中学校の数学で扱っていた「速さの問題」の記憶を思い出してください。

図のように、直線上に点 A と点 B の2点があります。この間の距離を x とします。

この時の平均の速さ$\overline{v}$は
こんな感じの図で覚えたかもしれません。



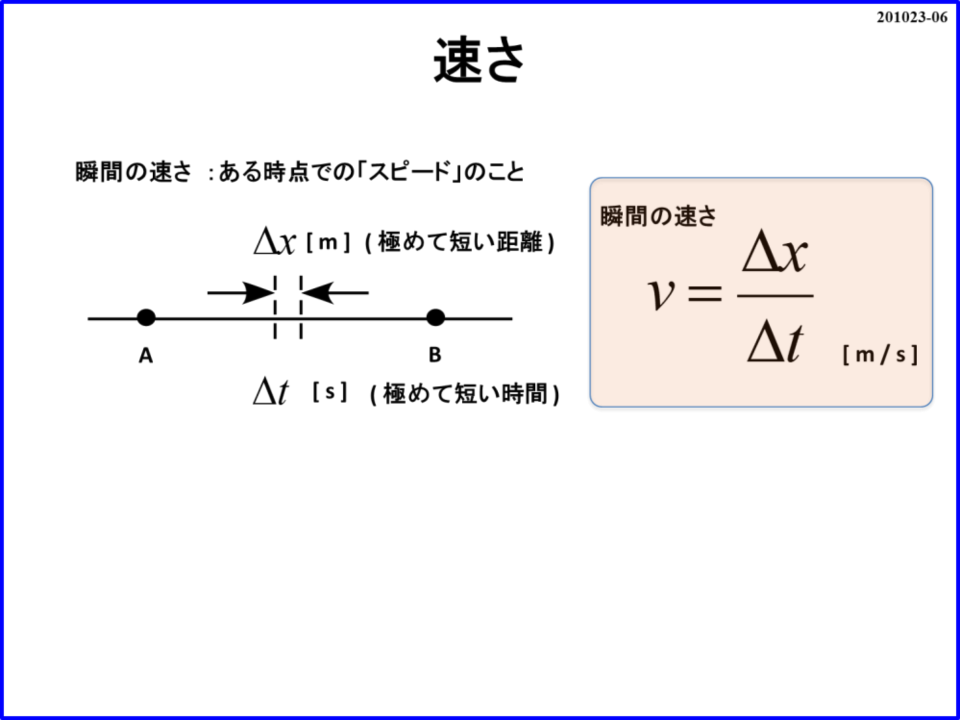
式で表すと

$$\overline{v}=\frac{x}{t}$$

$$\overline{v}$$

bar
平均を表す
ベクトルの矢印とは異なります

となります。
この「平均の速さ」というのは2点の間「速さが一定とは限らない」けど
「平均として考えるとどうなるか？」ということになります。



点 AB 間の「平均の速さ」に対して「ある瞬間での速さ」を表した場合、
点 A から点 B までの間のある点を取り出して、そこから極めて短い時間 Δt s で
極めて短い距離 Δx m 動いたとすると瞬間の速さ v は

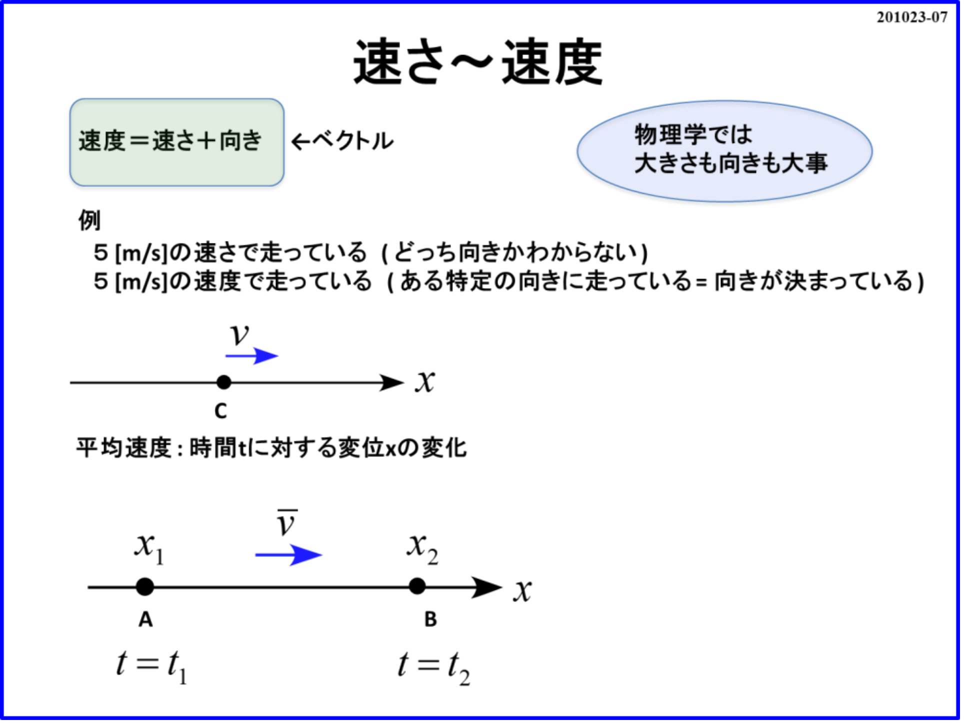
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \mathrm{m/s}$$

と表すことになります。

大前提として、「速さ(速度)は直接測れない」という量であることを認識する必要があります。

例えば、長さは「ものさし」をあてれば測れますし、時間も「時計」などで測れます。
しかし、「速さ」は「直接測る量」ではなく計算によって「算出される量」となります。

車のスピードメーターやスポーツの球速を表示するスピードガンなどがありますが、
これは装置の内部で Δt と Δx を測定し、計算した値を表示していることになります。



続いて「速度」について説明していきます。
これまで、生活していく上で「速さ」と「速度」の違いについてあまり意識しないで利用していたかもしれませんが、物理ではこの違いはしっかりと認識しておく必要があります。

速さ　：大きさのみ (スカラー)

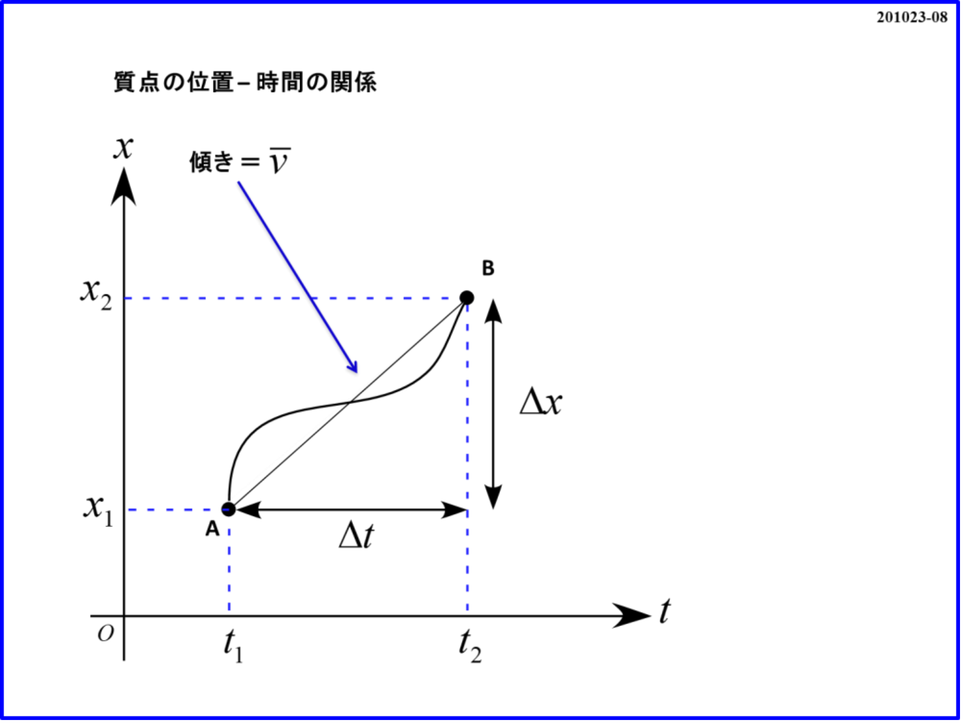
速度　：速さ＋向き (ベクトル)

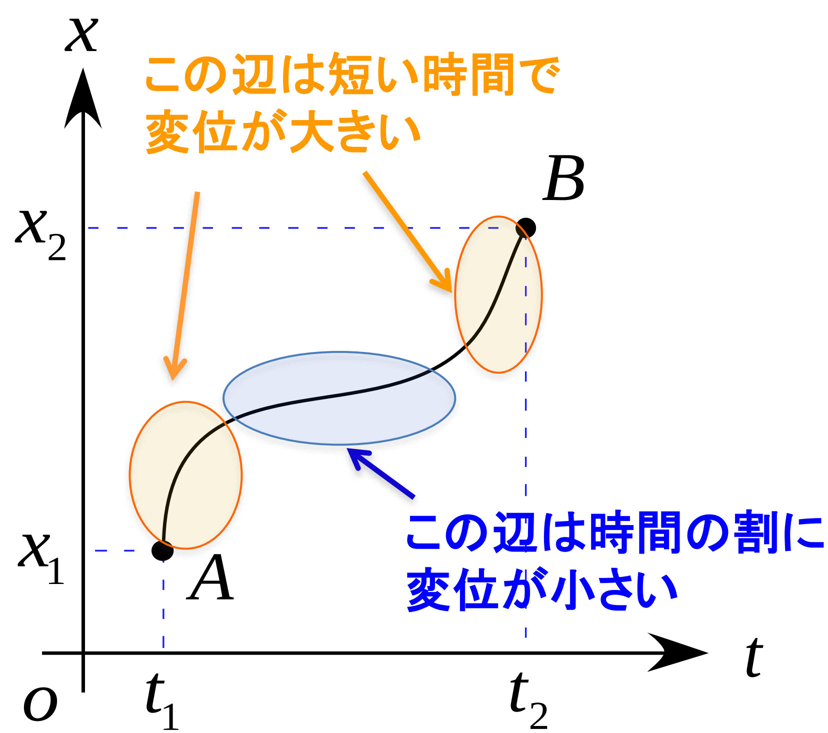
物理では「大きさ」も「向き」も大事です。
例にあるように、「速さ」と記述されていたら「向きは不明」であり、「速度」と記述されていたら「向きは決まっている」と解釈します。

それでは「速さ」の時と同様に「平均の値」から考えてみましょう。

話を単純にするために一次元の直線運動 (x 軸上)のモデルとして考えるとします。

右側を x 軸の正と設定します。
時刻 t_1 で点 A の位置 x_1 にいて、時刻 t_2 で点 B の位置 x_2 であったとします。





このモデルの運動について $x-t$ グラフで表すと図のようになります。
横軸が時間 t で縦軸が位置 x となります。

時刻 t_1 で x_1 の位置に、時刻 t_2 で x_2 の位置にいます。
この2点を結ぶ線は曲線で表しています。

図では、スタート時と終点前では短い時間で変位が大きく、
中央部分では時間の割に変位が小さいことが見て取れます。

平均速度

平均速度

$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

平均の速度 $\overline{v}$ は

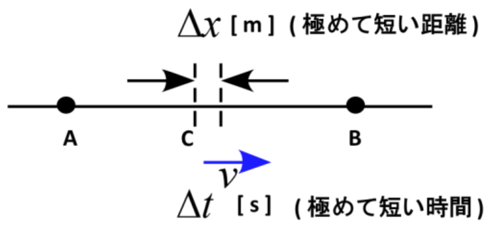
$$\overline{v}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$$

と表すことができます。
図においては、は「**スタート点と終点を結んだ直線の傾き**」ということになります。
傾きが急な部分もあり、なだらかな部分もあるが、
平均して考えると2点を結んだ直線で表すことができるということになります。

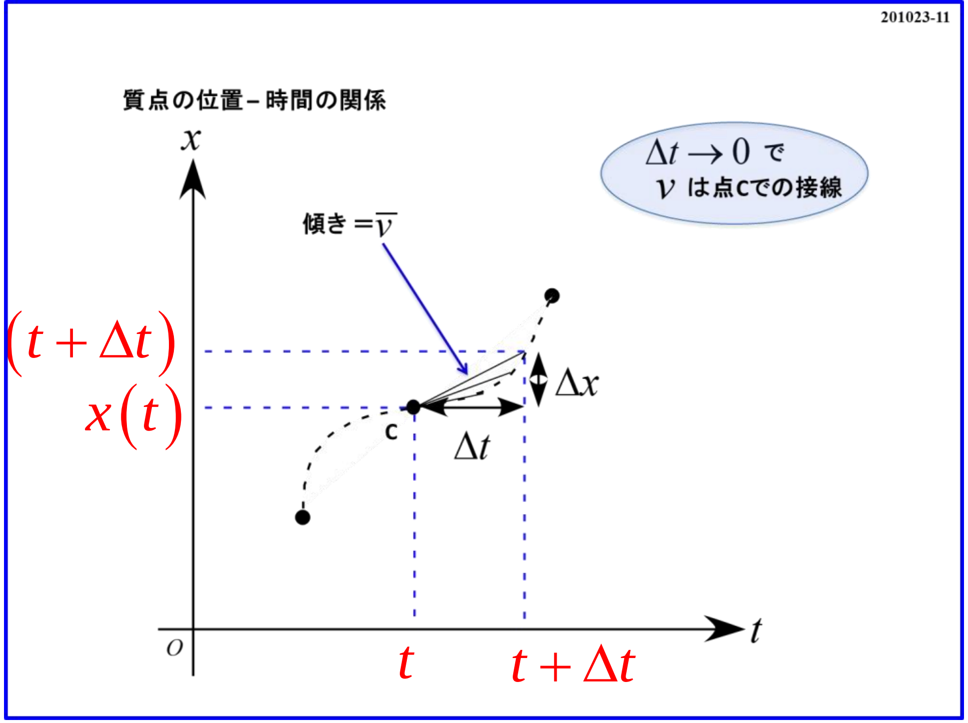
「(平均の)速度」は $x-t$ グラフの傾きとなります。
この考え方が重要です。「傾き」の概念がこの後に出てくる「微分」につながることになります。

瞬間速度

瞬間速度



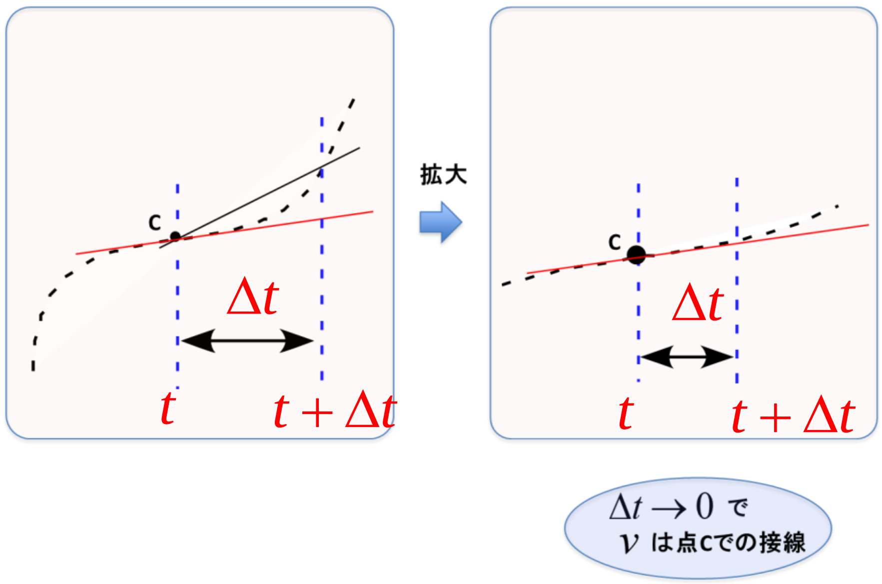
点 AB の間のある点 C から Δt s 後に Δx m 変位したとする。
これを $x-t$ グラフで表すとどうなるか考えてみよう。



図のように点 AB 間のある点 C の時刻を t とすると、
そのときの位置は $x(t)$ と表すことができます。
そこから、Δt 経ったとするとその位置は $x(t+\Delta t)$ と表すことができます。
従って、

Δt の間の平均の速度：$\overline{v}=\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

と表すことができます。
この Δt を小さくしていくことを考えます。



すると、図の赤線のようになり、ほぼ接線に近づいていくイメージになります。
つまり、点 c の瞬間の速度は **$\Delta t \to 0$ の極限**を考えることとなり

$$\text{瞬間の速度：} v = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}}$$

導関数

と表すことができます。
この式は高校数学で学習した微分の定義「導関数」そのものであることがわかります。

速度～瞬間速度

瞬間速度

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overbrace{x(t+\Delta t)-x(t)}^{\text{変位}}}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

よって、瞬間の速度は

速度： $v=\lim_{\Delta t\to 0}\dfrac{x\left(t+\Delta t\right)-x\left(t\right)}{\Delta t}=\dfrac{dx}{dt}$

と表すことができます。
従って、速度 v は変位 x を時間 t で微分することにより定義されることがわかります。

速度～例題

例題

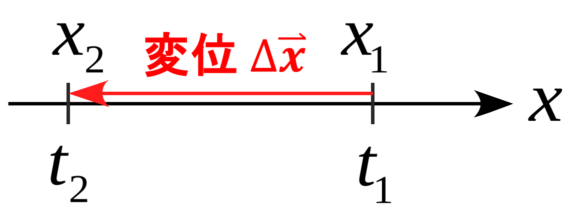
x 軸に沿って運動する質点が $t_1 = 1\ \mathrm{s}$ のとき $x_1 = 14\ \mathrm{m}$ の位置にあり、$t_2 = 3\ \mathrm{s}$ のとき $x_2 = 4\ \mathrm{m}$ の位置にある。

1. この運動における変位を求めよ。

2. この運動における平均速度を求めよ。

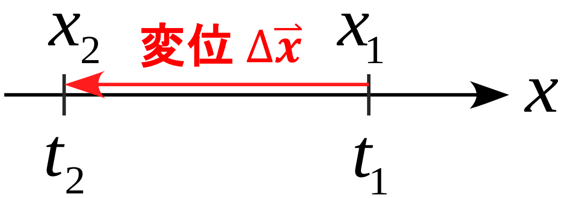
ここで、簡単な練習問題をやってみましょう。

この問題の状況を図で表してみると



となります。
文章で書かれたものを**図で視覚的に表す**ことは大事です。

変位は



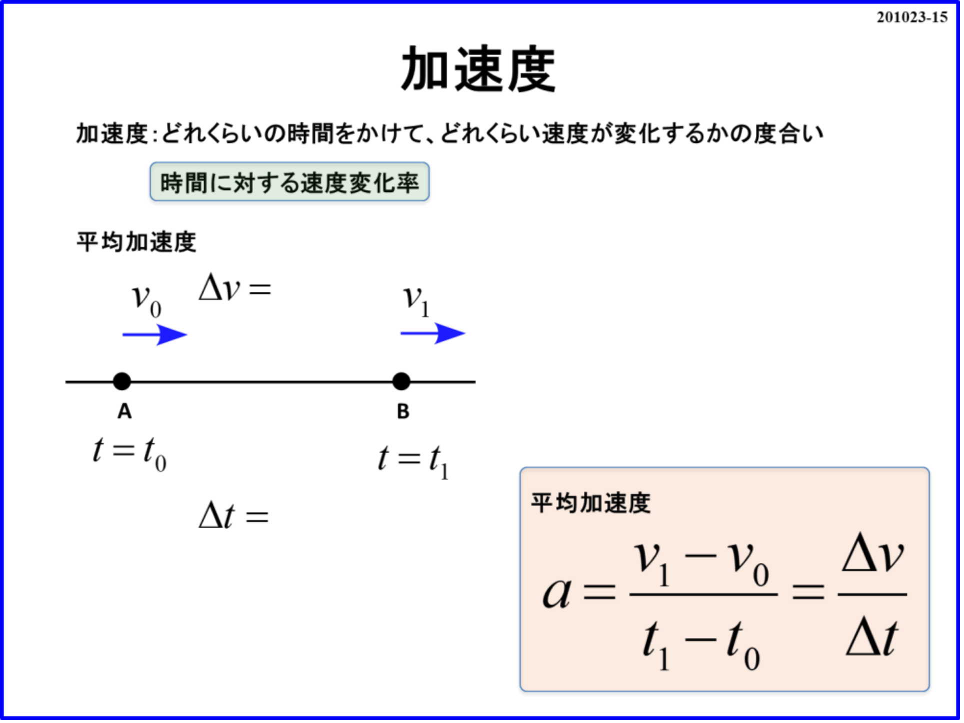
$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = x_2 - x_1 = 4 - 14 = -10 \ \mathrm{m}$$

となります。
変位 Δx がマイナスは逆向きを意味しています。

平均の速度 $\overline{v}$ は

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{-10}{3-1} = -5 \ \ \mathrm{m/s}$$

となります。
単位が与えられている問題は答えにも単位を忘れずに！



続いて加速度について説明していきます。

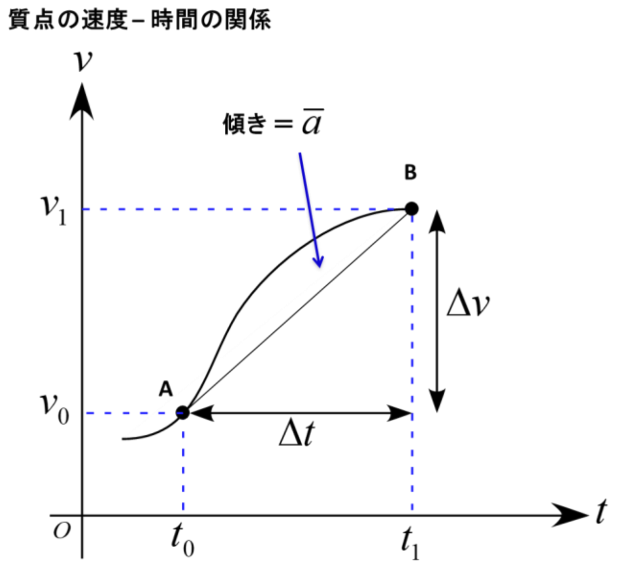
物体が運動中に速度が速くなったり、遅くなったりしたとします。
この**速度の変化の度合いについて表す**物理量が「加速度」になります。
加速度は「**速度の時間変化率**」とも言えます。

例を見てみましょう。
点 A を時刻 t_0、速度 v_0 で通過し、点 B を時刻 t_1 、速度 v_1 で通過したとします。

時間変化　：$\Delta t = t_1 - t_0$

速度変化　：$\Delta v = v_1 - v_0$

と表すことができます。

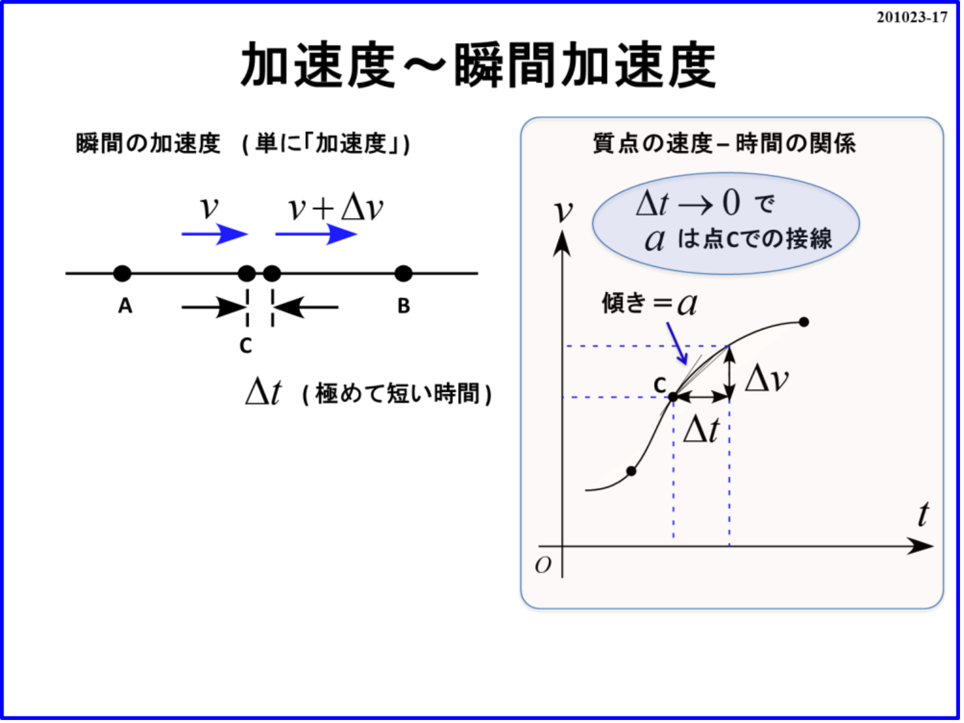


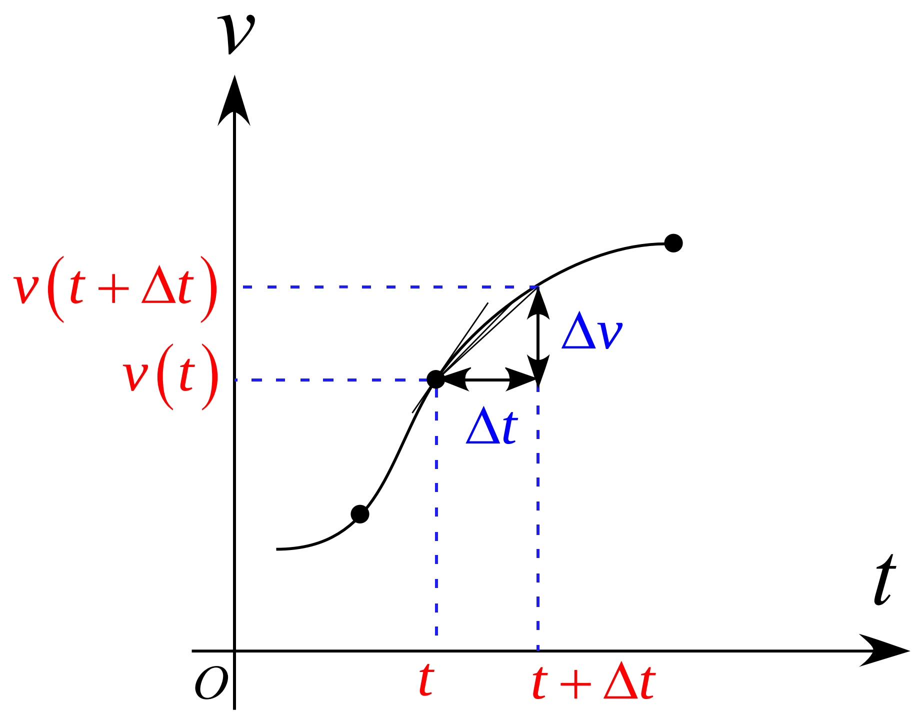
これをグラフで表すと図のようになります。

よって「速度の変化率」の平均 $\overline{a}$ は

$$\Delta\overline{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0}$$

と表すことができます。

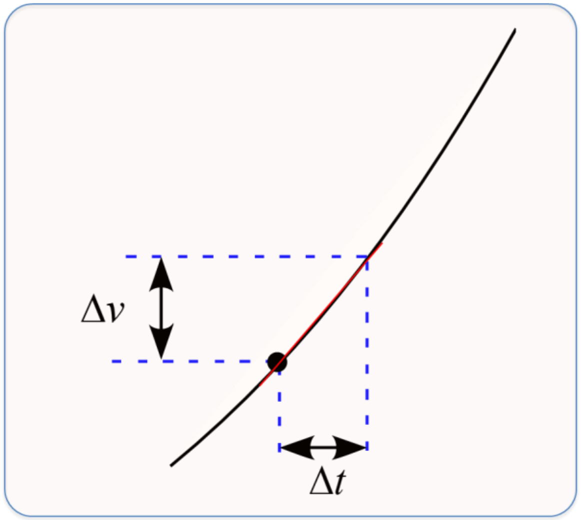




さらに、点 AB 間のある点 C を考え、そこから Δt 経った場合を考えます。
この間の平均の加速度 $\bar{a}$ は

$$\Delta t \text{ の間の平均の加速度}: \bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

と表すことができます。
この Δt を小さくしていくので速度の場合と同様に考えることになります。



拡大すると図のように Δt を小さくするとだんだん直線に近づいていきます。
従って、瞬間の加速度 a は **$\Delta t \to 0$ の極限**を考えることとなり

瞬間の加速度： $$a = \boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t}}$$

導関数

と表すことができます。
これも、速度の場合と同様に導関数となっていることが確認できます。

瞬間加速度

瞬間加速度

速度変化

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\boxed{(v+\Delta v)-v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

v は t の関数であると考えると

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}$$

2回微分する

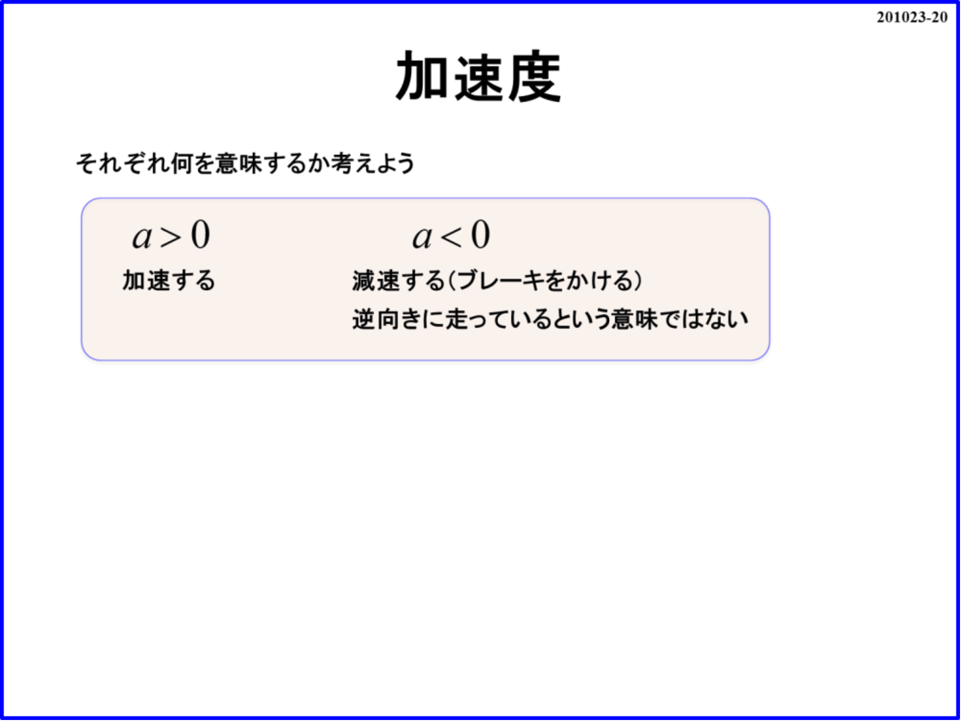
従って、

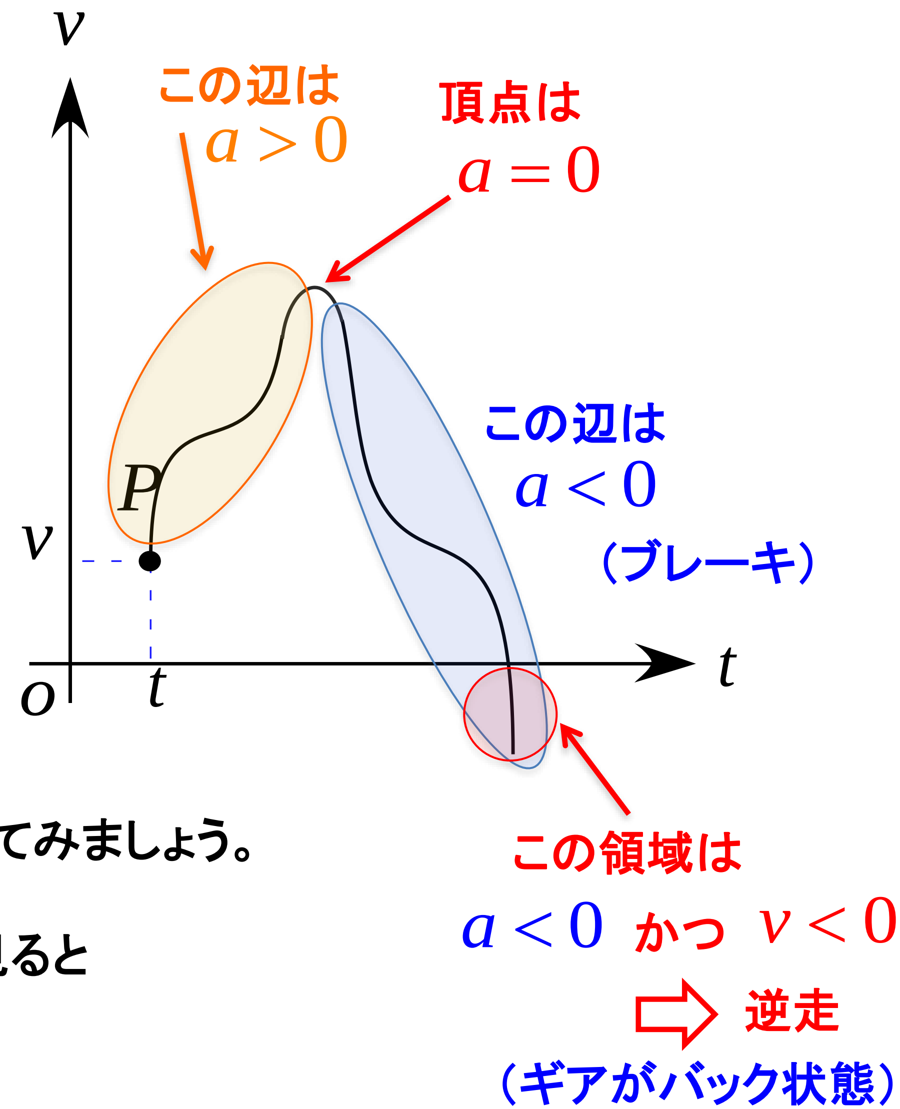
$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v\left(t+\Delta t\right)-v\left(t\right)}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

と定義され、速度 $v=\frac{dx}{dt}$ を用いて表すと

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

となり、変位 x を2回時間 t で微分すると加速度 a になることを表しています。





「加速度が負の状態」とはどのような常態か考えてみましょう。

加速度を考えるには $v-t$ グラフの振る舞いを見ると
全体像が見えて来ます。
加速度は $v-t$ グラフの傾きなので、
傾きに着目すればよいことになります。

注意点は $a<0$ であっても逆走とはすぐに言えないことです。

加速度～例題

例題

x 軸に沿って運動する質点が $v(t)=5+10t$ m/s に従って運動する。
この質点は $t=0$ s における位置は 20 m である。

1. 加速度を時間 t の関数として表せ。

2. $t=0$ における質点の速度を求めよ。

3. 位置を t の関数として表せ。

文章で書かれた問題は条件を書き出すとよいです。

$$v(t)=5+10t \quad \mathrm{m/s}$$
$$x(0)=20 \quad \mathrm{m}$$

1. 加速度の定義 $a=\frac{dv}{dt}$ より

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(5+10t)=10 \quad \mathrm{m/s^2}$$

となります。

2. $t = 0$ を代入すると

$$v(0) = 5 + 10 \cdot 0 = 5 \ {}^{\mathrm{m}}\!/_{\mathrm{s}}$$

となります。

3. 速度の定義 $v = \frac{dx}{dt}$ より

$$\frac{dx}{dt} = v(t) = 5 + 10t$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int (5 + 10t) dt$$

$$\int dx = \int (5 + 10t) dt$$

$$x = 5t + 5t^2 + C$$

となります。ここで初期条件 $x(0) = 20$ より

$$x(0) = 5 \cdot 0 + 5 \cdot 0^2 + C = 20$$

$$C = 20$$

従って、

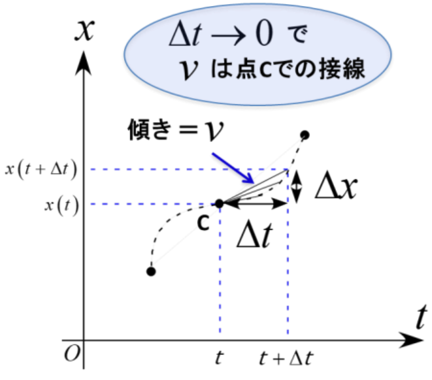
$$x(t) = 5t + 5t^2 + 20 \ \ \mathrm{m}$$

となります。
積分は不定積分となるので、
積分定数を忘れないようにしましょう。

速度 ～ まとめ

速度

質点の位置－時間の関係



変位の時間変化率

$x-t$ グラフの傾き = 速度

傾き$=\dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$ ⇨ $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$ 極限

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{dx}{dt}$$

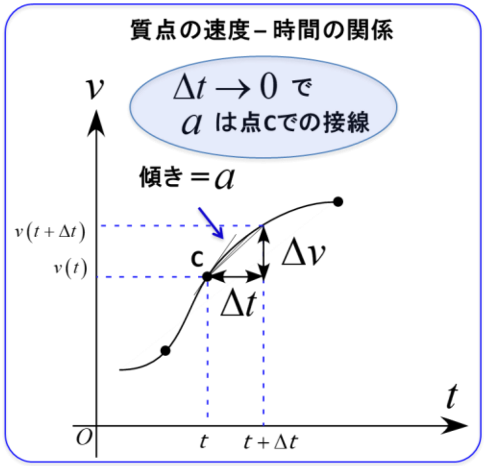
変位 x を時間 t で微分したもの

「速度」は「**変位の時間変化率**」であり、「 **x を t で微分**」した量である。

「速度」は **$x-t$ グラフの傾き**である。

加速度 ～ まとめ

加速度



速度の時間変化率

$v-t$ グラフの傾き＝加速度

傾き$=\dfrac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$ ⇨ $\displaystyle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t}$

$\Delta t \to 0$ 極限

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}$$

速度 v を時間 t で微分したもの

$$a=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$$

「加速度」は「**速度の時間変化率**」であり、「 **v を t で微分**」した量である。

「加速度」は **$v-t$ グラフの傾き**である。

「加速度」は「 **v を t で微分**」した量であるので、「 **x の2階微分**」した量である。

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度を3次元で表すと

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = \left(v_x, v_y, v_z\right)$$

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dy}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dz}{dt}\vec{e}_3$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right) = \left(a_x, a_y, a_z\right)$$

$$\vec{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_3$$

と表すことができる

ベクトル～速度 / 加速度

速度、加速度の定義もベクトルで考えると

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$ 変位ベクトルの時間変化率

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$ 速度ベクトルの時間変化率

となる

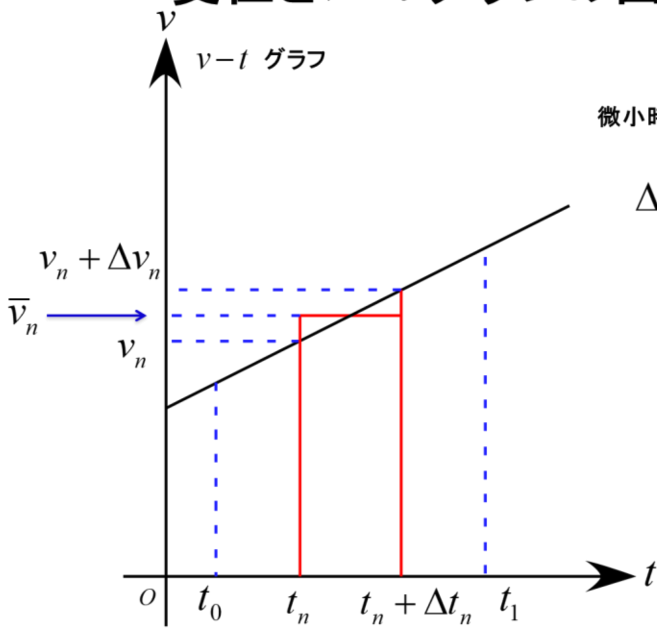
速度と加速度を3次元空間に拡張し、一般化したものである。

「速度 $\vec{v}$」は「変位ベクトル $d\vec{r}$ の時間変化率」であり、「 $\vec{r}$ を t で微分」した量である。

「加速度 $\vec{a}$」は「速度ベクトル $\vec{v}$ の時間変化率」であり、「 $\vec{v}$ を t で微分」した量である。

（参考）　201023-26

変位と$v-t$グラフの面積



微小時間Δt_nにおける変位は

$$\Delta x_n = \bar{v}_n \cdot \Delta t_n$$

25-27のスライドは参考なので
理解ができなくても大丈夫です

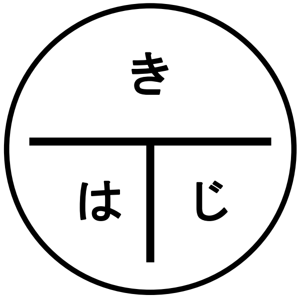
$v-t$ グラフにおいて、囲まれた面積がどうなっているかについて考えてみましょう。

時刻 t_0 から時刻 t_1 と直線で囲まれた面積を考える上で、
ある時刻 t_n と Δt_n だけ経ったの部分が作る短冊をに着目します。
時刻 t_n の速度を v_n とし、時刻 $t_n+\Delta t_n$ の速度を $v_n+\Delta v_n$ とし、
その平均の速度を $\bar{v}_n$ と表すとします。
このとき、短冊の面積 S_n は

$$S_n = \bar{v} \cdot \Delta t_n$$

と表されます。

この式をよく見てみると、



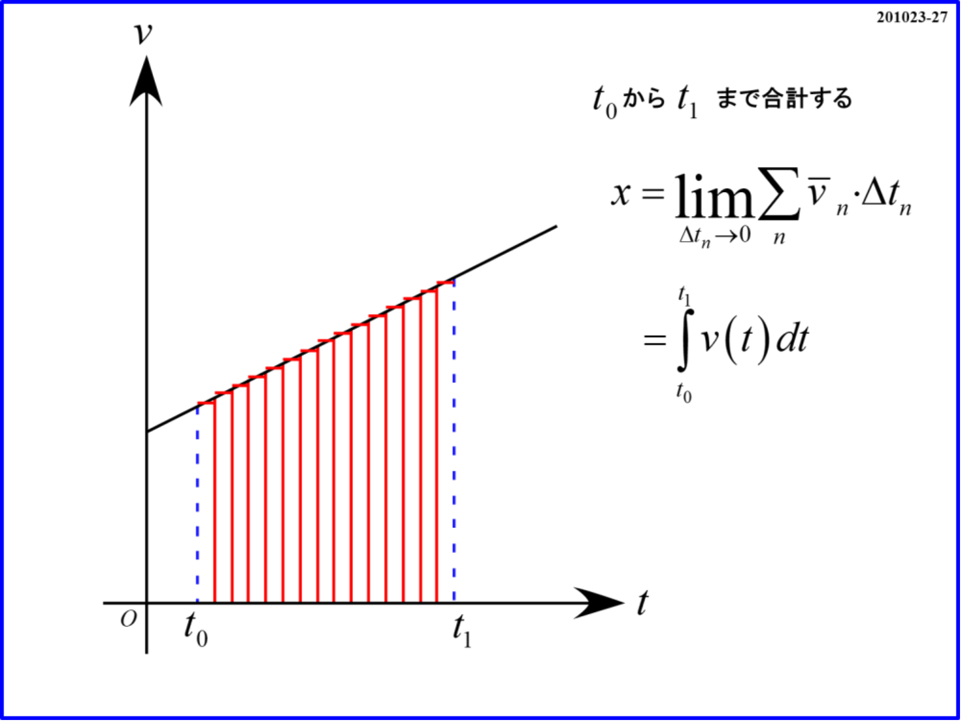
$$S_n = \underbrace{\overline{v}}_{\text{速さ}} \cdot \underbrace{\Delta t_n}_{\text{時間}}$$

「速さ $\times$ 時間」となっているので、
これは時間 Δt_n の間に移動した距離を表していることがわかります。

従って、微小時間 Δt_n における変位 Δx_n は

$$\Delta x_n = \overline{v} \cdot \Delta t_n$$

と表すことができます。



これを時刻 t_0 から時刻 t_1 まで短冊をつくると図のようなイメージになります。
これを時刻 t_0 から時刻 t_1 まで足し合わせると全体の変位 x となり

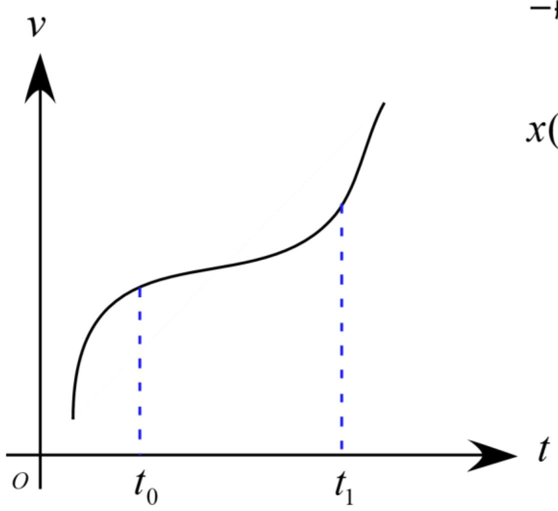
$$x = \sum_n \bar{v} \cdot \Delta t_n$$

と表されます。
実際の計算は $\Delta t_n \to 0$ の極限を考えることになるので

$$x = \lim_{\Delta t_n \to 0} \sum_n \bar{v} \cdot \Delta t_n = \int_{t_0}^{t_1} v(t)\,dt$$

となります。

$v-t$ グラフ



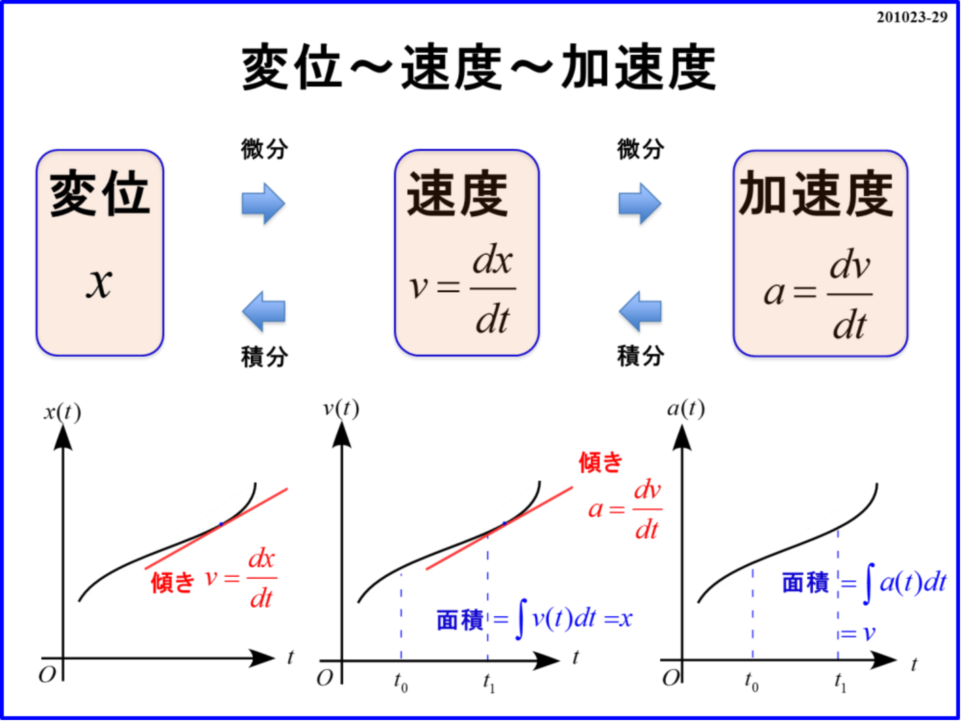
一般的に

$$x(t)=\int_{t_0}^{t_1} v(t)dt$$

従って、一般的に

$$x=\int_{t_0}^{t_1} v\left(t\right)dt$$

となります。
これは、「**速度 v を t で積分すれば変位 x になる**」ことを意味しています。



これまでの関係を図で表したものになります。

「変位」「速度」「加速度」の関係をしっかりと身に着けましょう。