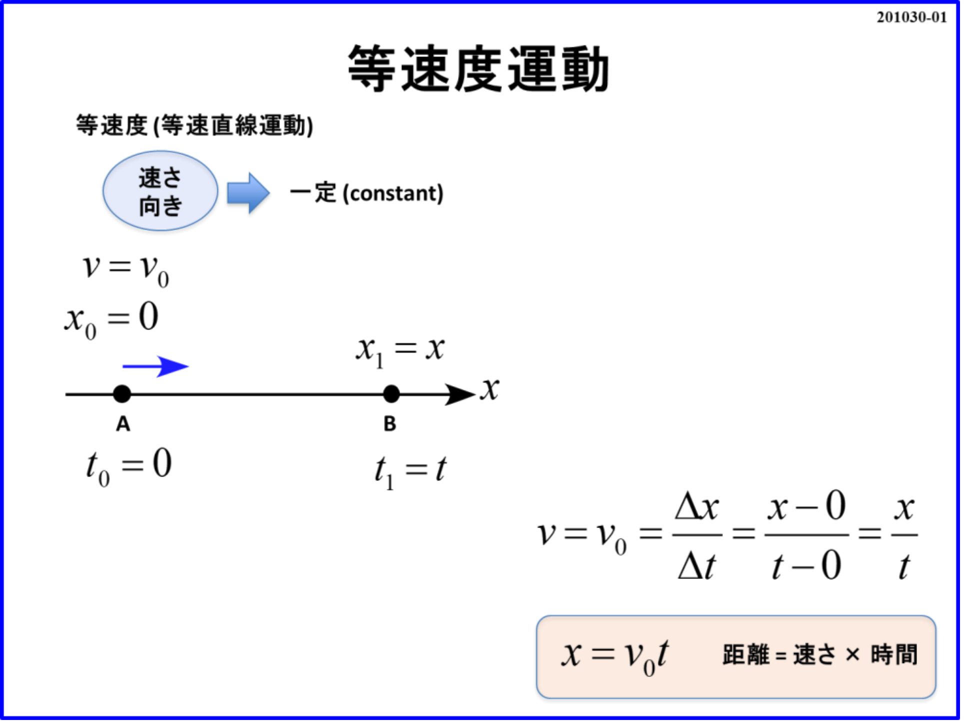
2020講義ノート
一般物理学 (力学)
理学部・生物学科
解説 ver.



それでは実際の運動モデルについて考えて行きましょう。
複雑なモデルの話をする前に、まずは簡単な例を扱います。

1つ目は「等速度運動」です。文字通り、「等速度」である運動になります。
「速度が等しい」ということは「速度」、即ち「速さと向き」が「等しい」という意味になります。
当たり前のことですが、「向きが等しい」ということは「直線運動」ということになりますよね？
よって、「等速度運動」のことを別名で「等速直線運動」と呼ぶこともあります。

さて、直線運動が x 軸上であるとし、点 A で時刻 $t_0 = 0$, 位置 $x_0 = 0$, 速度 v_0 とし、
点 B で時刻 $t_1 = t$, 位置 $x_1 = x$, 速度 v_0 とします。

ここで速度の定義 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{t}}$ (1次元)より

$$v = v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

と表されます。

今回のモデルは「等速度」なので「瞬間の速度 $\boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{d\boldsymbol{t}}$ 」も「平均の速度 $\overline{\boldsymbol{v}} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta \boldsymbol{t}}$ 」も同じ値になるので「微分の $\boldsymbol{d}$ 」を「区間の Δ 」に書き換えてもOKになります。

話を戻すと、速度 $\boldsymbol{v}$ は

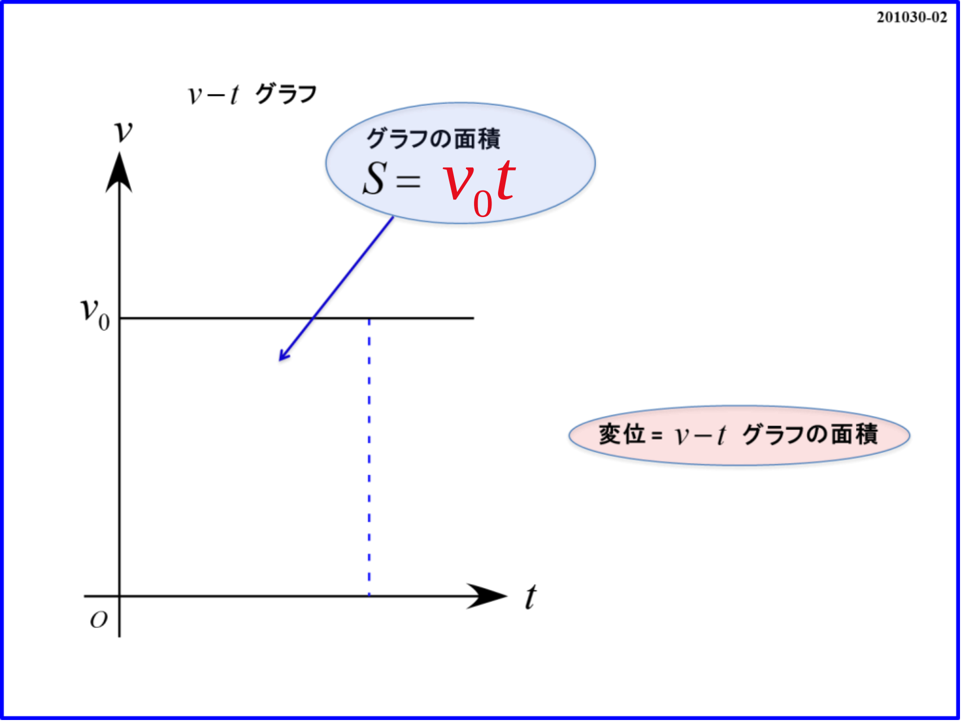
$$v = v_0 = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{x - 0}{t - 0} = \frac{x}{t}$$

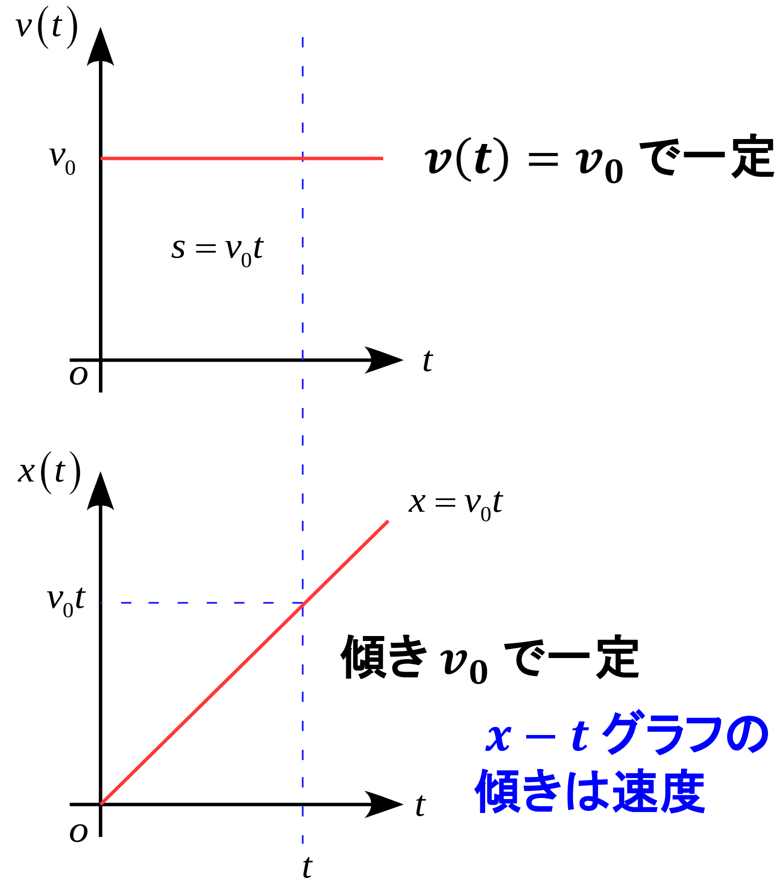
となります。

よって

$$v_0 = \frac{x}{t} \quad \Longleftrightarrow \quad x = v_0 t$$

と表すことができます。





ここで $x-t$ グラフと $v-t$ グラフについて
考えてみましょう。

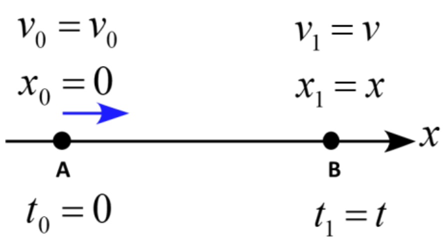
$v-t$ グラフでは速度 v_0 で一定になります。(上図)
$x-t$ グラフでは変位 x が直線的($x=v_0t$)に増えていく図になります。(下図)

この様に、グラフからも数式からも201023-29のスライドと同様の結果となることが
確認できます。

等加速度運動

等加速度

一定の加速度で直線運動



$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0} = \frac{v - v_0}{t}$$

$$\boxed{v = v_0 + at}$$

続いてのモデルは「等加速度運動」です。
このモデルも典型的なモデルになります。

「等加速度運動」は文字通り「加速度」が「等しい」運動になります。

図のように x 軸上の運動とし、点 A で時刻 $t_0 = 0$, 位置 $x_0 = 0$, 速度 $v_0 = v_0$ とし、
点 B で時刻 $t_1 = t$, 位置 $x_1 = x$, 速度 $v_1 = v$ とします。
ここで加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

と表されます。

このモデルは「等加速度」なので「瞬間の加速度 $a=\frac{dv}{dt}$ 」も「平均の加速度 $\overline{a}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ 」も同じ値になるので「微分の d 」を「区間の Δ 」に書き換えてもOKになります。

この考え方は前のモデルの「速度」に関する場合と同様になります。

よって

$$a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{v_1-v_0}{t_1-t_0}=\frac{v-v_0}{t-0}=\frac{v-v_0}{t}$$

となります。

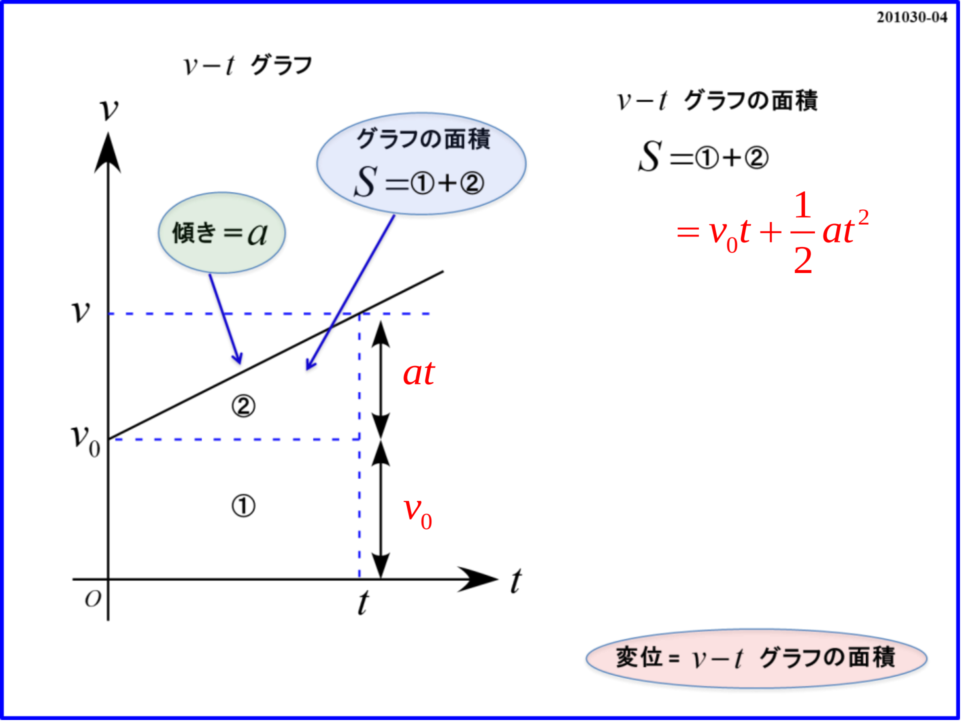
式変形すると

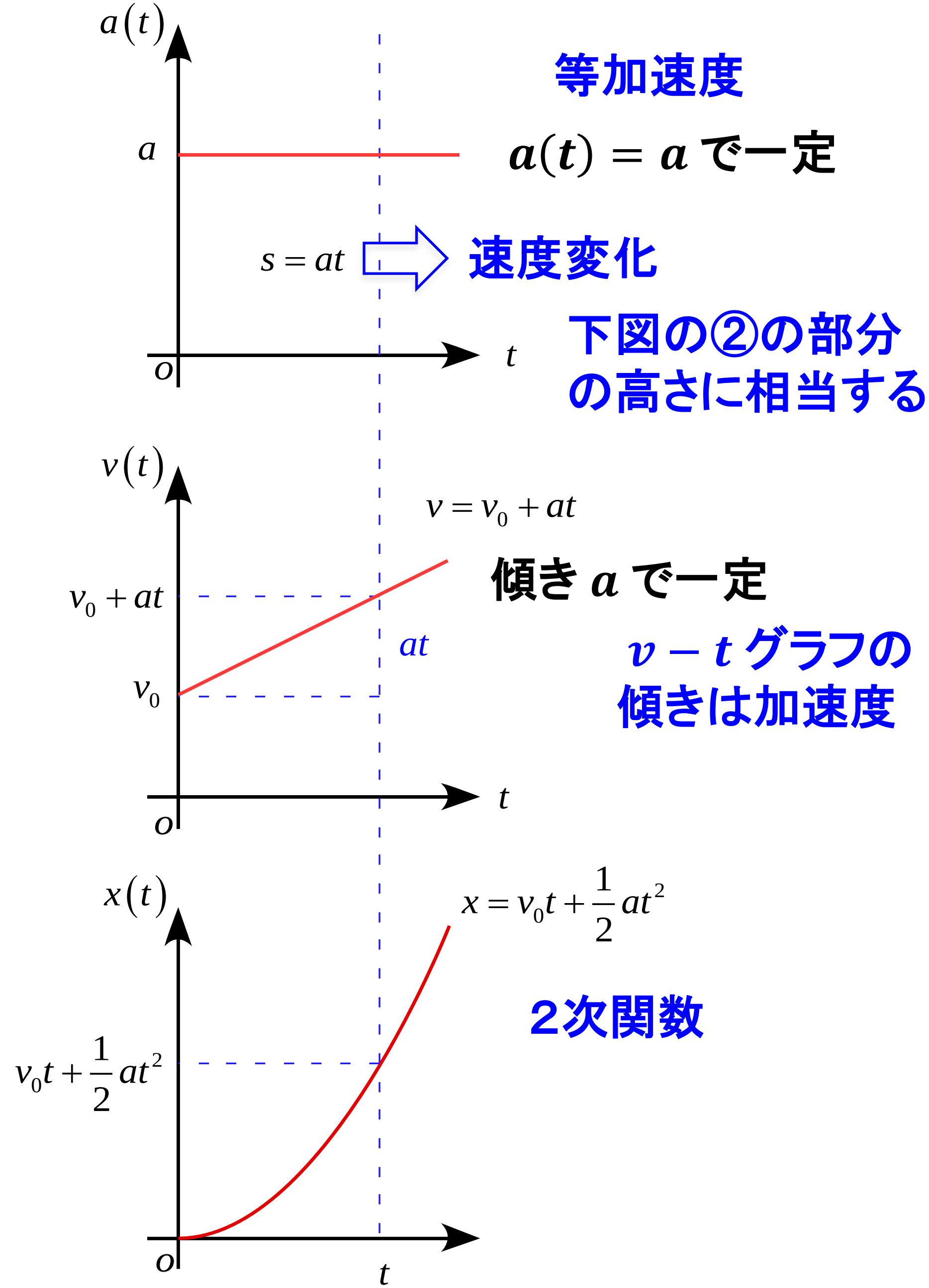
$$a=\frac{v-v_0}{t}$$

$$at=v-v_0$$

$$v=v_0+at$$

と表すことができます。





ここでグラフについて考えてみましょう。
描くグラフは $x-t, v-t, a-t$ のグラフにです。

$a-t$ グラフにおいて囲まれた部分の面積は
時刻 0 から時刻 t までの間に速度 v が
変化した量の総量になります。

これは $v-t$ グラフの三角形の高さ部分に
相当します。$v-t$ グラフでは初速度 v_0 で
そこから増加していることになります。

つまり、

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = a$$

の両辺を t で積分すると

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int a dt$$

$$\int dv = \int a dt$$

$$v = at + C$$

となります。
初期条件は初速度 $v(0) = v_0$ なので

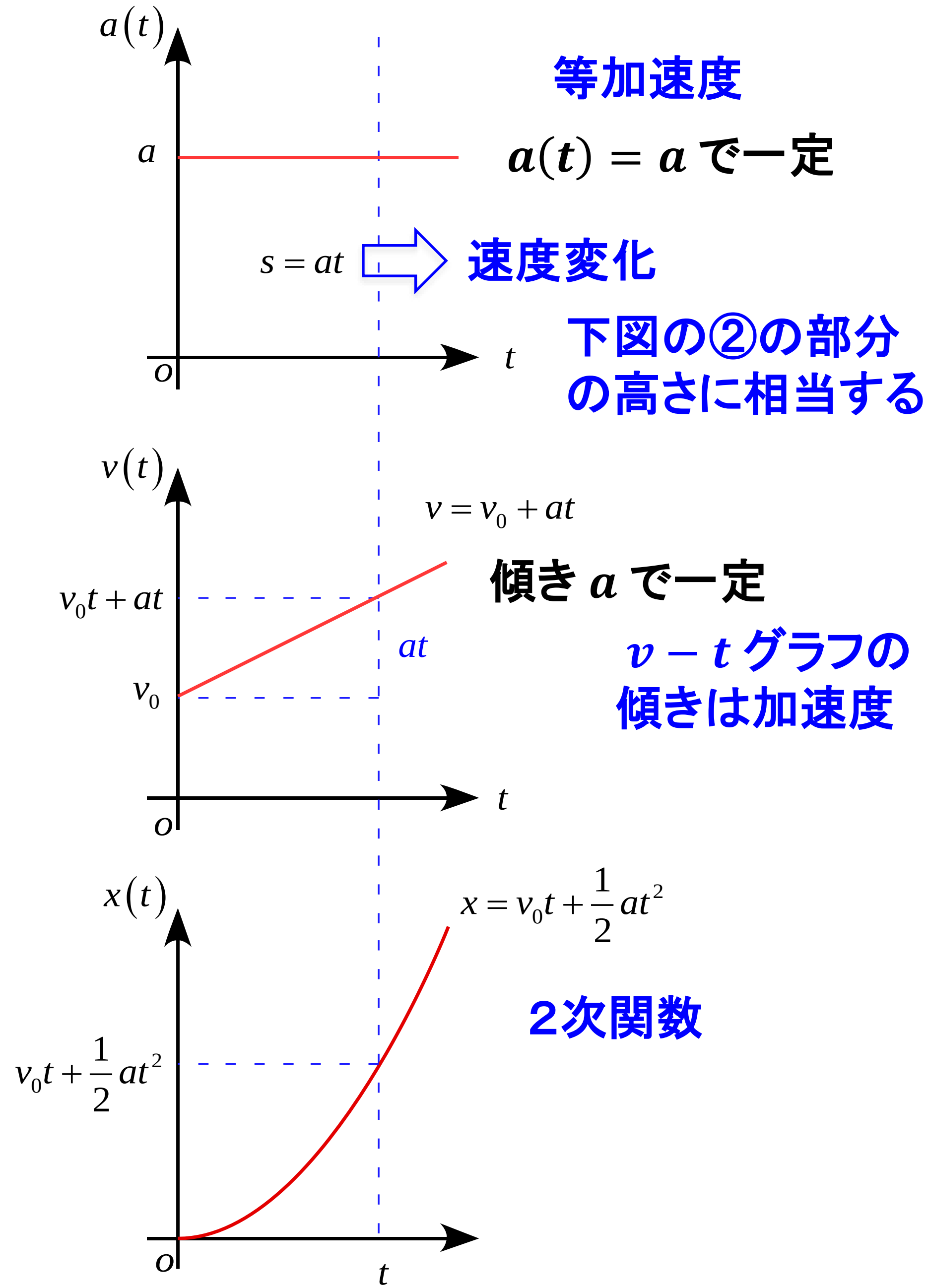
$$v(0) = a \cdot 0 + C = v_0$$

$$C = v_0$$

従って

$$v(t) = v_0 + at$$

となります。



この式をみると、傾き a で切片 v_0 の1次関数であることがわかります。
$x-t$ グラフで囲まれた面積は長方形と三角形の和で、

$$s = v_0 t + \frac{1}{2} t \cdot at$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2} at^2$$

となります。
速度の場合と同様に速度 v を時間 t で積分の計算をすると

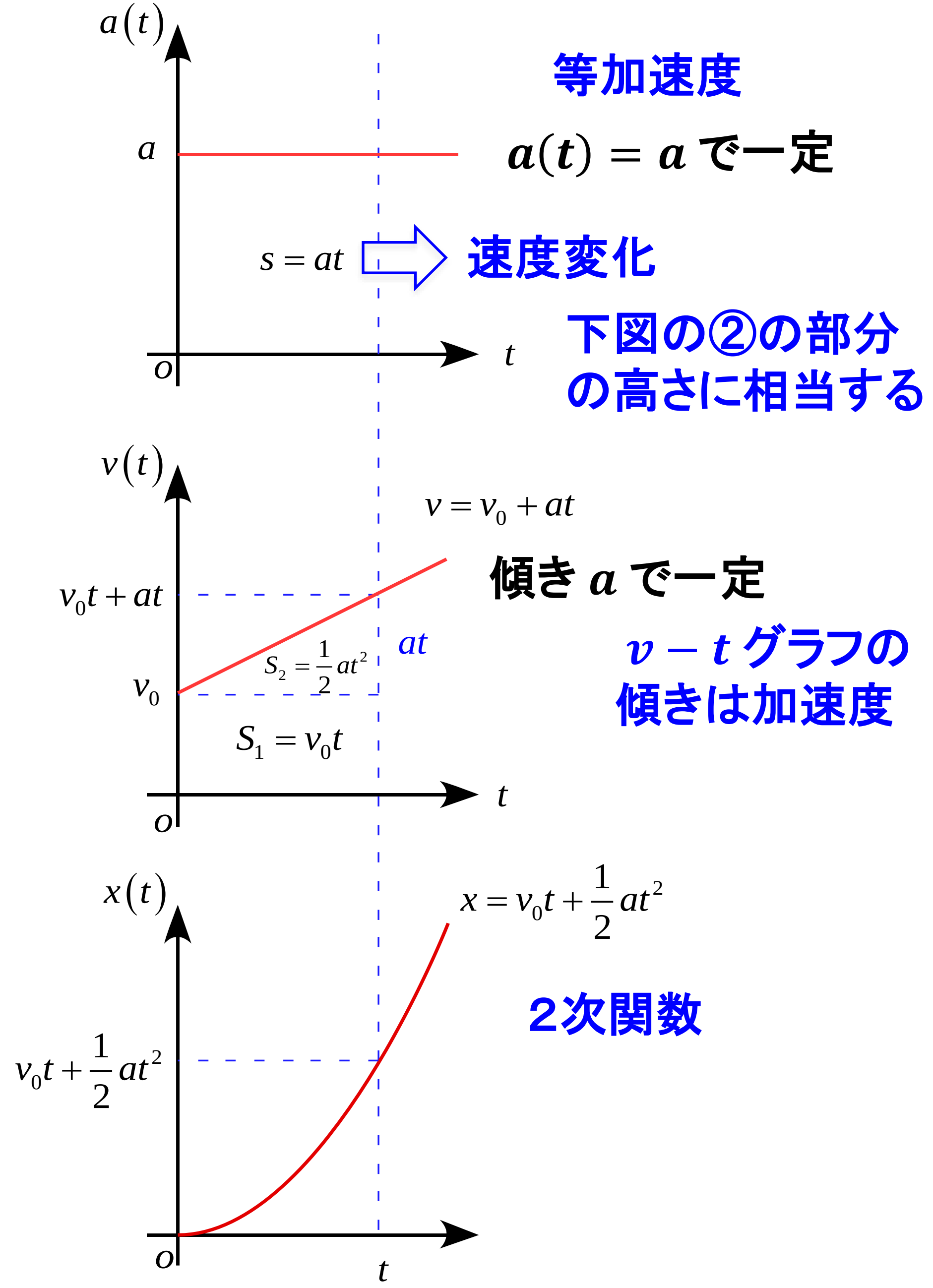
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = v_0 + at$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int (v_0 + at) dt$$

$$\int dx = \int (v_0 + at) dt$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2 + C'$$

となります。



初期条件 $x(0)=0$ より

$$x(0) = v_0 \cdot 0 + \frac{1}{2} a \cdot 0^2 + C' = 0$$

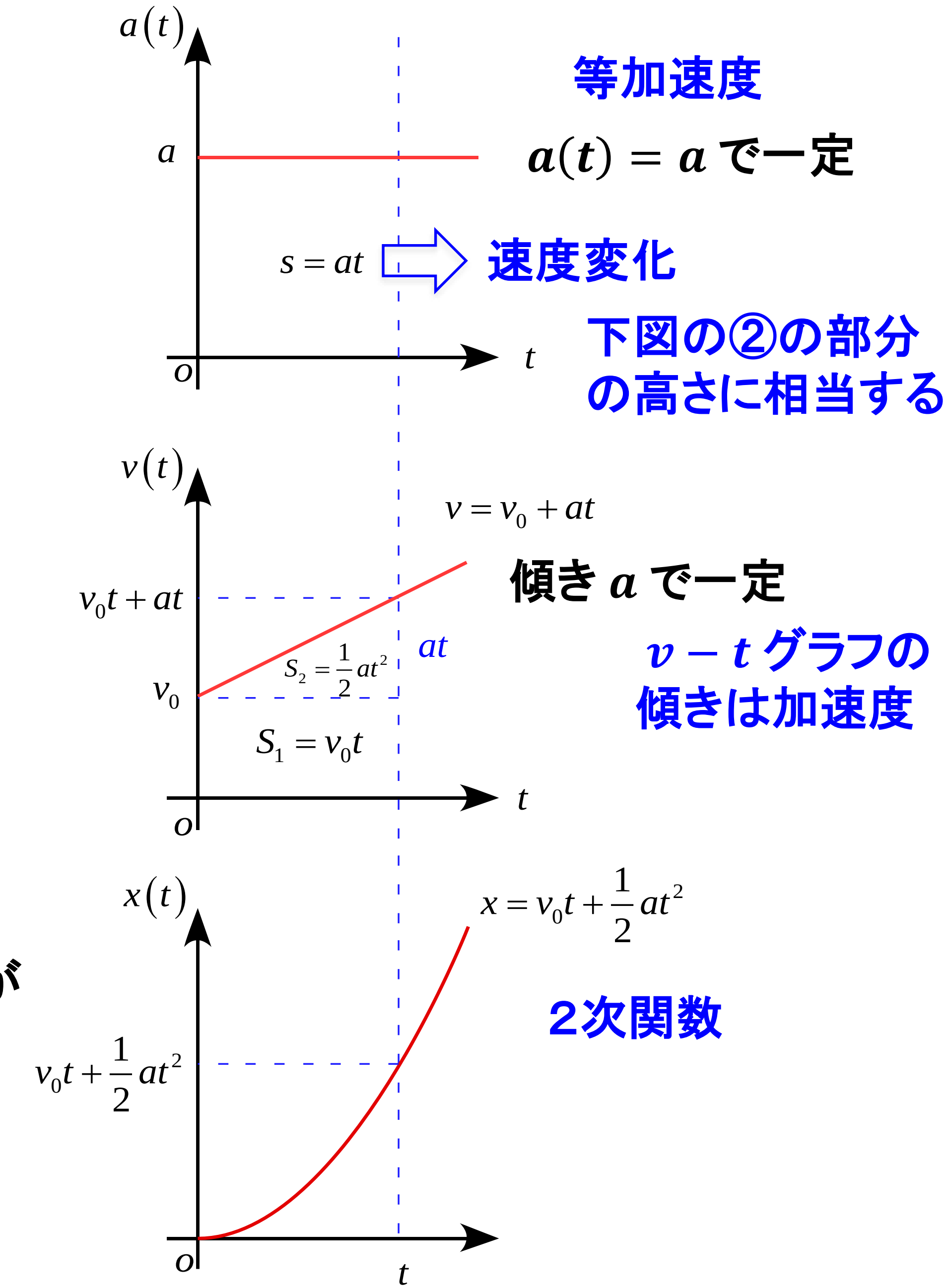
$$C' = 0$$

となります。
従って

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

となります。
この関数は2次関数であり、$x-t$ グラフも
２次曲線となります。

この様に、グラフからも数式から一致することが
確認できます。



等加速度運動

$$v = v_0 + at$$
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

t を消去

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

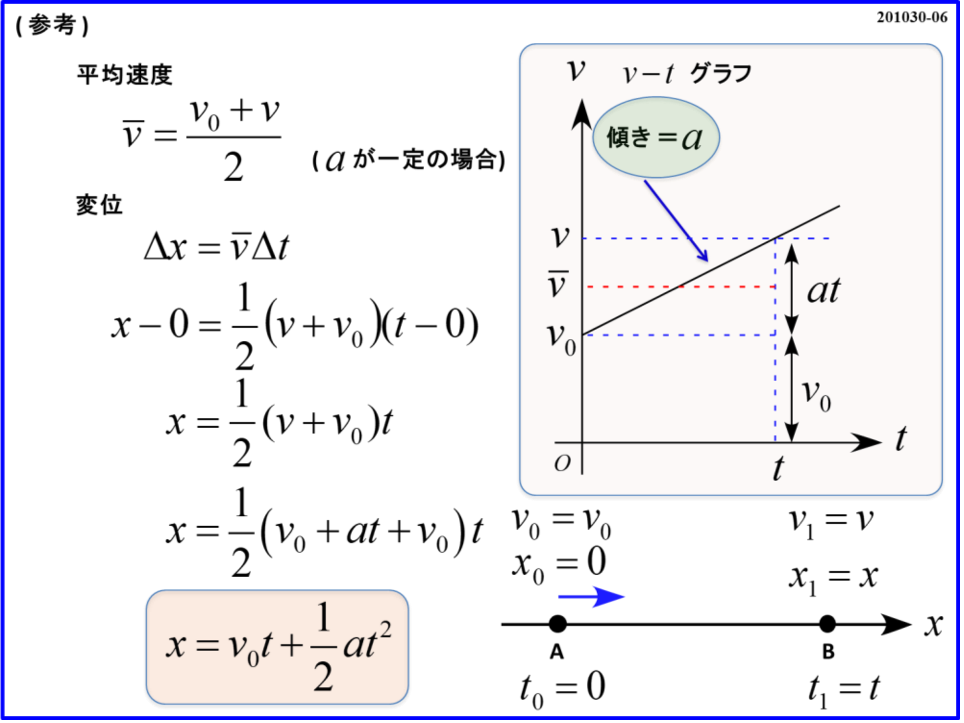
「等加速度運動」の速度 v と変位 x の式

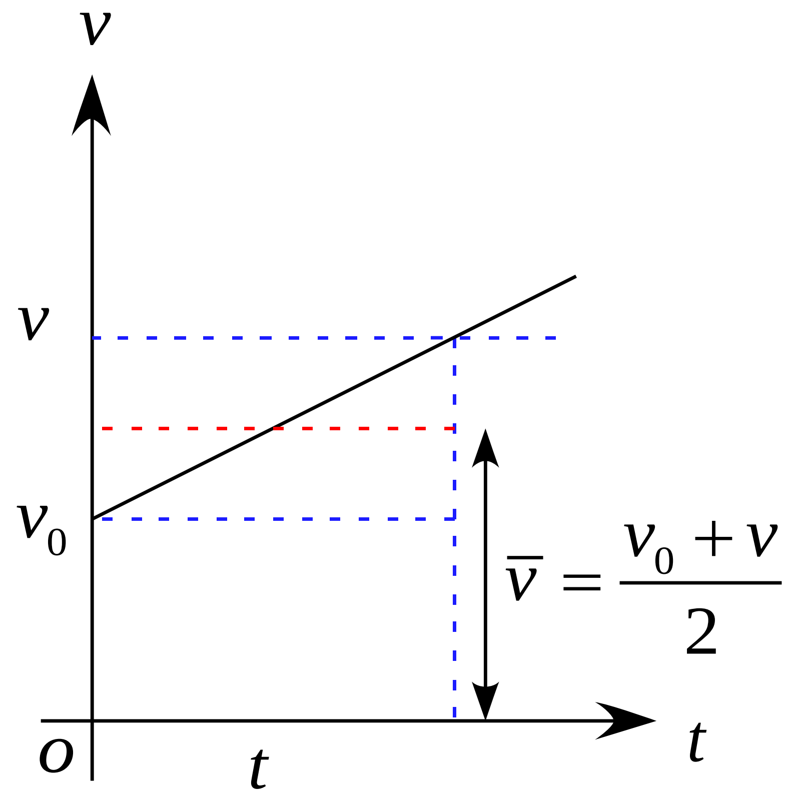
$$v = v_0 + at \qquad x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

から式変形すると、

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

という式が導出できます。この式変形はレポート課題の1つとして後で提示します。
この式は別に覚えなくてもOKです。
覚えるよりも「どのようにしてこの式が導かれたのか？」を理解することが重要になります。





このスライドは参考扱いとします。

平均速度 $\overline{v}$ を考え、長方形の面積から

$$S=\overline{v}t$$

とし、変位 x を算出します。

ある時刻 t の速度 v とスタート時の初速度 v_0 の間に平均の速度 $\overline{v}$ があると考え、

$$\overline{v}=\frac{v_0+v}{2}$$

と表すことができます。

速度の定義 $v = \frac{dx}{dt}$ (1次元)より平均の速度 $\overline{v}$ は

$$\overline{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

と表され

$$\Delta x = \overline{v} \cdot \Delta t$$

と表すことができます。
よって

$$\Delta x = \overline{v} \cdot \Delta t$$

$$x_1 - x_0 = \overline{v} \cdot \left(t_1 - t_0 \right)$$

$$x - 0 = \frac{v_0 + v}{2} \cdot \left(t - 0 \right)$$

$$x = \frac{1}{2} \left(v_0 + v \right) t$$

ここで $\boldsymbol{v = v_0 + at}$ を代入すると

$$x = \frac{1}{2}\left(v_0 + v_0 + at\right)t$$

$$= \frac{1}{2}\left(2v_0 + at\right)t$$

$$= v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

となり、前のスライドの結果の面積 $\boldsymbol{S}$ と一致することが確認できます。

等加速度運動

例題

等加速度運動の速度と変位の式

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

から、

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

を導け。

この例題は後のレポート課題の問題の一つとして扱うのでここでは解答しません。
ちょっと計算すれば導けるはずです。各自でやってみて下さい。

例題

等速度運動と等加速度運動の変位、速度、加速度を定義式から導け。
(但し、初期条件は $t = 0$ で $x = 0, v = v_0$ とする。)

等速度運動 : $v(t) = v_0$

等加速度運動 : $a(t) = a_0$

等速度運動 $v(t) = v_0$ について

加速度 $a(t)$ は

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0) = 0$$

となります。
速度 $v(t)$ は等速度運動の条件より

$$v(t) = v_0$$

となります。

変位 $x(t)$ は速度の定義 $v=\frac{dx}{dt}$ (1次元)より

$$\frac{dx}{dt}=v=v_0$$

両辺を t で積分すると

$$\int\frac{dx}{dt}dt=\int v_0 dt$$

$$\int dx=\int v_0 dt$$

$$x=v_0 t+C$$

となります。
ここで初期条件 $x(t)=0$ より

$$x(t)=v_0\cdot 0+C=0$$

$$C=0$$

となるので

$$x(t)=v_0 t$$

となります。

等加速度運動 $a(t)=a_0$ について

加速度 $a(t)$ は等加速度運動の条件より

$$a(t)=a_0$$

となります。
速度 $v(t)$ は加速度の定義 $a=\frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$a(t)=\frac{dv}{dt}=a_0$$

両辺を t で積分すると

$$\int\frac{dv}{dt}dt=\int a_0 dt$$

$$\int dv=\int a_0 dt$$

$$v=a_0 t+C$$

となります。
ここで初期条件 $\boldsymbol{v}(\mathbf{0})=\boldsymbol{v}_{\mathbf{0}}$ より

$$v(0)=a_0\cdot 0+C=v_0$$

$$C=v_0$$

よって、

$$v(t)=v_0+a_0t$$

となります。
変位 $\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t})$ は速度の定義 $\boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}}$ (1次元)より

$$\frac{dx}{dt}=v=v_0+a_0t$$

両辺を $\boldsymbol{t}$ で積分すると

$$\int\frac{dx}{dt}dt=\int(v_0+a_0t)dt$$

$$\int dx=\int(v_0+a_0t)dt$$

$$x=v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2+C'$$

となります。
ここで初期条件 $\boldsymbol{x}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ より

$$x(0)=v_0\cdot 0+\frac{1}{2}a_0\cdot 0^2+C'=0$$

$$C'=0$$

よって

$$x(t)=v_0t+\frac{1}{2}a_0t^2$$

となります。

ここで大事な事は積分は不定積分となるため
積分定数を忘れずに処理することです・
一つ一つの計算は難しくないはずです。
手順を踏んで省略しないで計算を行うことが
重要になります。

力学小史

年代	年代	誰が	内容
B.C.	360頃	アリストテレス	重い物体は軽い物体より速く落下する
	320頃	アポロニウス	「円錐曲線論」
	300頃	ユークリッド	「原論」
	250頃	アルキメデス	てこの原理などの発見
A.C.	150頃	プトレマイオス	「アマルゲスト」(天文学の集大成)
	1543	コペルニクス	「天体の回転について」
	1581	ガリレイ	振り子の振動周期について
	1590	ガリレイ	「運動について」(落体の法則)
	1609	ケプラー	惑星の運動についての第1法則,第2法則の発見
	1619	ケプラー	惑星の運動についての第3法則を発見
	1637	デカルト	「方法序説」(解析幾何学について)
	1638	ガリレイ	「新天文学対話」
	1665	ニュートン	万有引力の発見
	1676	フック	バネに関する法則の発見
	1680	ニュートン	万有引力から惑星の軌道が楕円になることを証明
	1687	ニュートン	「プリンキピア：自然哲学の数学的原理」
	1788	ラグランジュ	「解析力学」
	1798	カヴェンディシュ	万有引力定数の測定(地球の質量の決定)
	1834	ハミルトン	正準方程式
	1905	アインシュタイン	特殊相対性理論

ここから「力学」の本題に入っていきます。
この表は力学の発展の歴史になります。
掲載されている人物の中には知っている人もいるかもしれません。

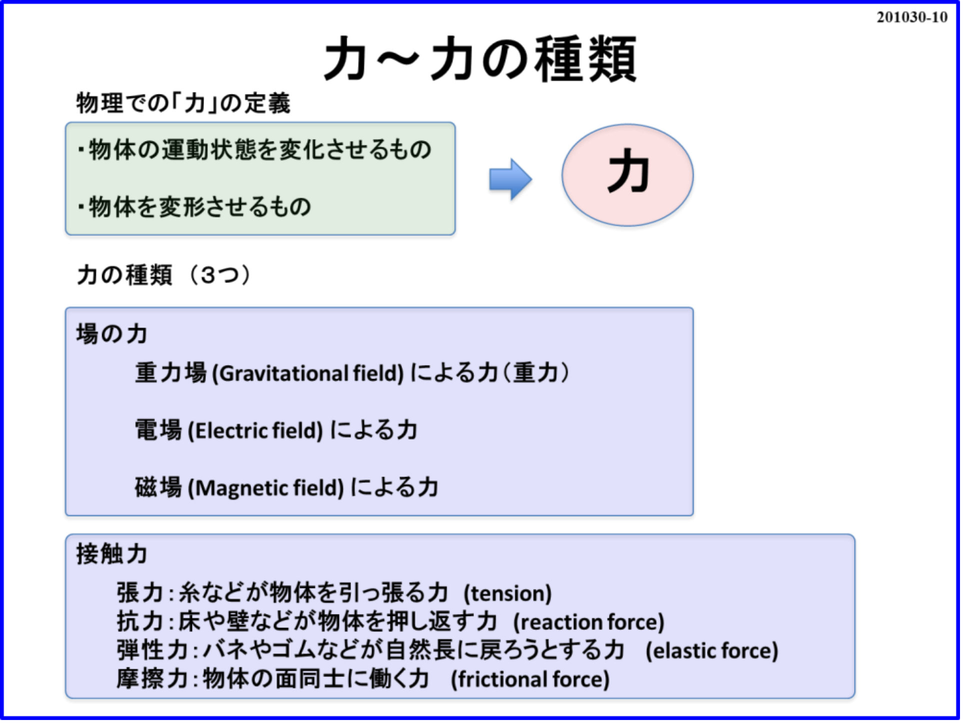
紀元前360年頃の「アリストテレス」は物体の運動について「重い物体は軽い物体より速く落下する」と考えていました。これは後に間違いと判明します。

紀元前250年頃の「アルキメデス」は「てこの原理」や「アルキメデスの原理(浴槽の逸話)」などで有名です。

1500年代になると「コペルニクス」や「ガリレイ」が登場します。

1600年代になると「ニュートン」が登場します。
力学の理解を深め、1687年に「プリンキピア」を発表します。
これが「力学の基」になっています。

その後、「ラグランジュ」の「解析力学」、「ハミルトン」の「正準方程式」と続いて
1905年に「アインシュタイン」による「特殊相対性理論」の発表となります。



力学で大事な事は「力がどうなっているか？」を考えることになります。

日常で「力」という言葉は様々な場面で使用していると思います。
物理で「力」とは2つの状態と定義します。

・物体の運動状態を変化させるもの

・物体を変形させるもの

になります。
「運動状態の変化」とは具体的に何を指すかと言えば、「速度 $\vec{v}$ の変化があるか？」ということになります。

速度 $\vec{v}$ に変化があれば「力」が作用した。
速度 $\vec{v}$ に変化がなければ「力」は作用していない。
と言えます。

2つ目の方は「物体の形を変えるもの」を「力」と呼びます。
例えば、ゴムボールを握るとボールの形が変形します。
この時、「ボールに力が作用した」と考えます。

続いて「力の種類」についてです。力の種類は大きく分けて3種類あります。

- 場の力
- 接触力
- 慣性力

の3つになります。
「場の力」とは「その空間自体が変化して作用している力」になります。
「重力場、電場、磁場」などがあります。
「重力場」は力学で多く使用され、「電場・磁場」は電磁気学でよく使用されます。
ここでは「重力場」だけ押さえておけばOKです。所謂「重力」を指しています。

「接触力」については文字通り「接触している部分から受ける力」になります。
「場の力(重力)」とは違って「接触している」ことが必要になります。
ここではいくつかの「接触状態」の例を挙げてあります。

・ 張力 ・・・「物体」に「糸」などが設置されていた場合に受ける力

・ 抗力 ・・・「物体」が触れている面から受ける力

・ 弾性力 ・・・「物体」に「ばね・ゴム」などが設置されていた場合に受ける力
「変形したバネやゴム」が元の状態に戻ろうとする力で「復元力」とも呼ばれる

・ 摩擦力 ・・・「摩擦力」は「面から受ける抗力」の一部になります。

慣性力

質量が慣性をもつために現れる見かけの力
（電車の急発進）

物体に働く力を探す

場の力→接触力→慣性力 ← この順番で、どういう状態かを考える

1. 場の力はあるか？ （ 重力 ）

2. 接触力はあるか？

— 何かに接触しているか？
— それによって力が働いているか？

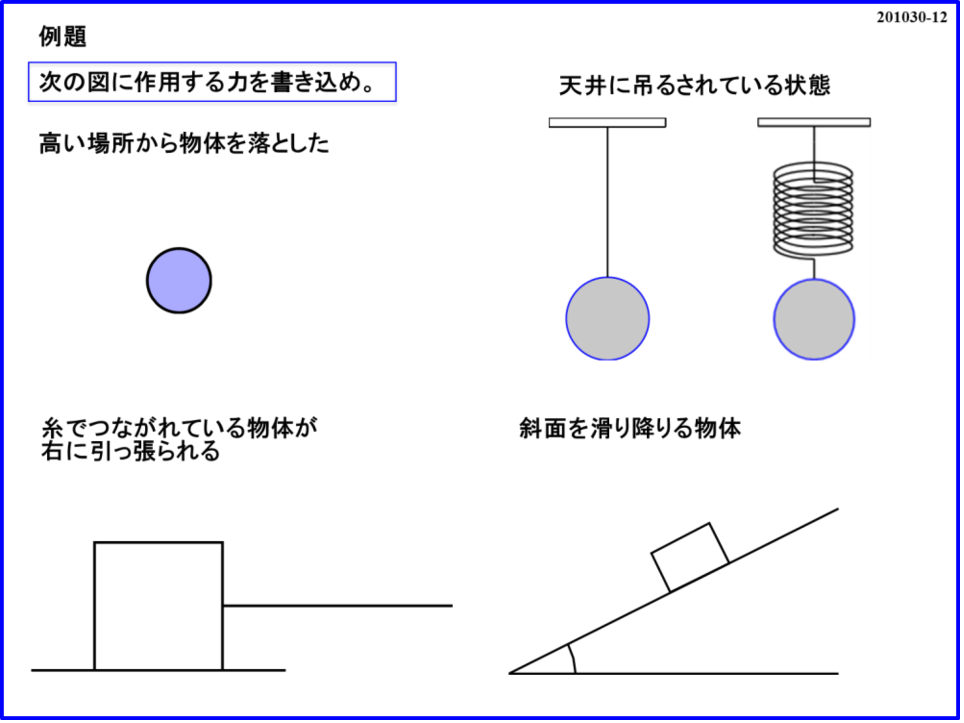
3. 慣性力はあるか？

最後に「慣性力」についてです。
まず、「慣性」とは何かというと、「物体がそのままの状態を維持しようとすること」を指します。
詳しくは後で扱いますが、具体例は「電車の急発進」などがあります。
「電車が急発進」したとき、「進行方向と逆向きに力を受けた」と感じるものです。
皆さんも経験があるかと思います。あの力が「慣性力」になります。

今後、力学のモデルを考える場合、着目している物体に作用する力を探すことから始める
ことになります。この時、力を探す順番は

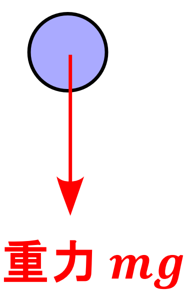
「場の力」→「接触力」→「慣性力」

の順になります。
この順で力を探していけば探し漏れが無く済みます。



それでは実際に手順に従って力を書き込んでみましょう。

・高い場所から物体を落とした場合

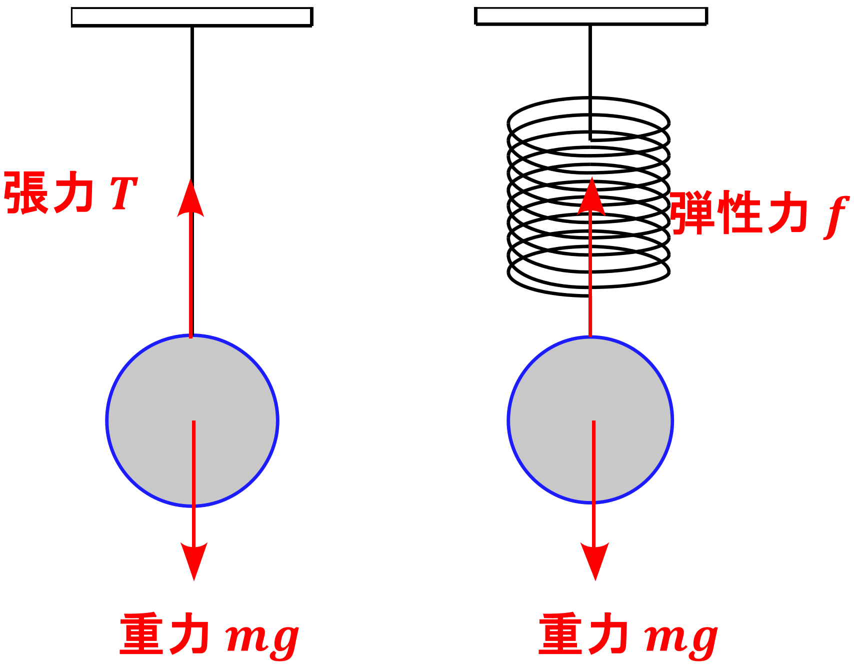


まずは「場の力」である「重力」を書き込みます。
重力の大きさは「 mg 」となります。この理由については後のスライドで説明するので
とりあえず「 mg 」として扱って下さい。
続いて「接触力」についてですが、物体のまわりで接触している物はありません。
強いて言うのであれば「空気」に触れていることになる訳ですが、特に断りがない場合は
無視することができます。

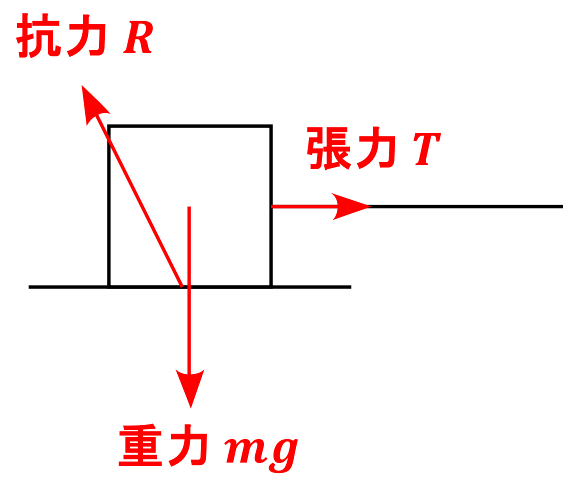
「空気」の「抵抗力」を考える場合はそのことが記述されています。
最後に「慣性力」についてですが、これは何か乗り物等に乗った状態で移動している場合に作用することになります。この例では「慣性力」は無いことになります。

・天井に吊るされている状態の場合

まずは「場の力」である「重力」を書き込みます。
続いて「接触力」は物体の上部で糸と接触しているので、糸の「張力 T 」が作用しています。
最後に「慣性力」は無いことになります。

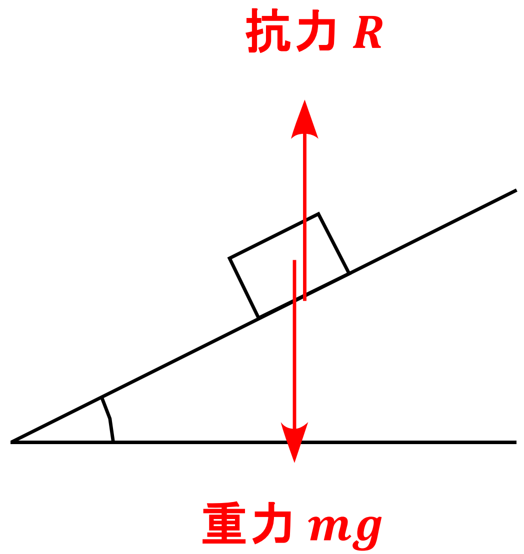


・糸でつながれている物体が右に引っ張られるの場合



まずは「場の力」である「重力」を書き込みます。
続いて「接触力」は物体の右側で糸と接触しているので、糸の「張力 T 」が作用しています。
また、物体と床が接しているので「抗力 R 」が作用します。
最後に「慣性力」は無いことになります。

・斜面を滑り下りる物体の場合



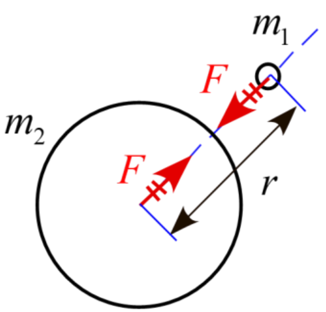
まずは「場の力」である「重力」を書き込みます。
続いて「接触力」は斜面と物体が接しているので「抗力 R 」が作用します。
最後に「慣性力」は無いことになります。

注)
この2つの例題では「軸と力の向き」あるいは「進行方向と力の向き」が一致しないものが含まれています。
モデル図を描いた後、運動方程式を建てる場合は成分の分解を行う必要が出てきます。

万有引力の法則

「質量をもつ2つの物体間には、それぞれの質量に比例し、それら2つの物体間の距離の2乗に反比例する引力が、2つの物体を結ぶ直線方向に働く」

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = 6.673\times10^{-11}\ [\mathrm{Nm^2/kg^2}]$$



さて、前のスライドで出てきた「重力」について説明します。

先に結論から言うと、「重力」は「万有引力」に由来しています。
ニュートンが発見した「万有引力の法則」は「2つの物体の間に作用する力」について記述したものになります。
「リンゴが落ちるのを見て万有引力を思いついた」なんて逸話が知られています。
もう少し細かく言うと、「リンゴは下に落ちるのに何故、月は落ちないのか？」という疑問を突き詰めたら行き着いた結果という逸話です。
しかし、本当の所はわかりません。弟子が後から話を作ったという説を押します。

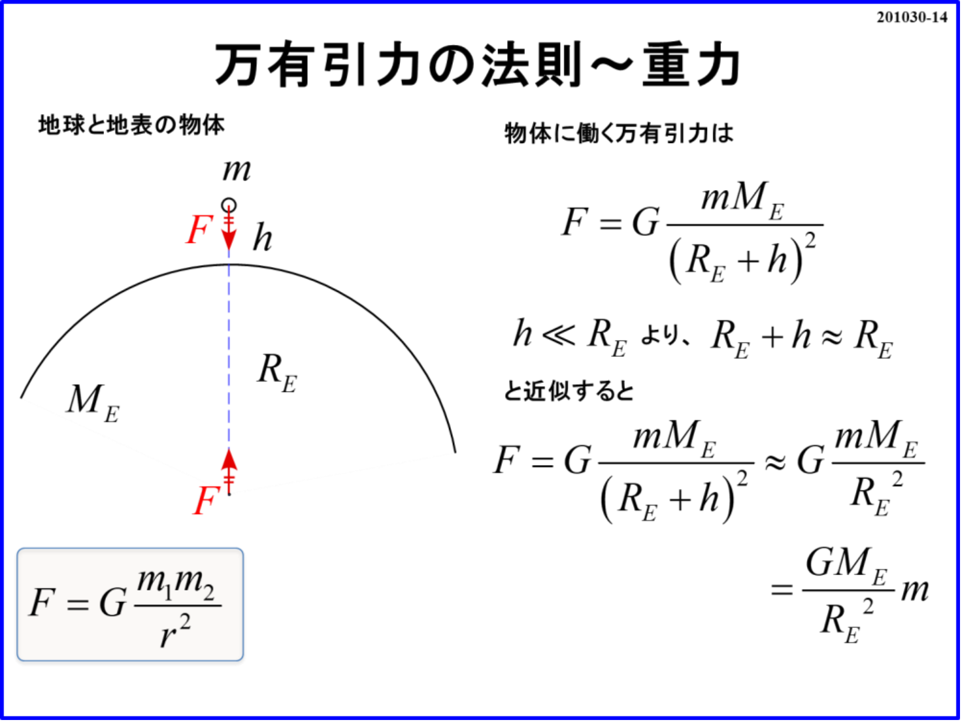
さて、話を戻すと、万有引力は2つの物体の間に作用し、

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

と表されます。

・2つの質量 m_1, m_2 に比例する
・2つの物体の距離 r の2乗に反比例する
・2つの物体を結ぶ直線上で作用する

となります。
「引力」なのでお互いが「引き合う方向」に力が作用します。
比例定数である「 G 」は「万有引力定数」と呼ばれる値です。
この2つの力は「作用・反作用の関係」にあり、
「質量 m_1 の物体が質量 m_2 の物体を引く力」と
「質量 m_2 の物体が質量 m_1 の物体を引く力」は「大きさが同じ、向きが逆」となります。



「万有引力の法則」を踏まえて、「重力とどう考えるか」について説明していきます。

話を簡単にするため、地球の自転・公転の影響は無視するとします。
モデル図を描くと図のようになります。物体と地球の縮尺は正しくないです。
あくまでもイメージ図と思って下さい。

2つの物体、つまり「質量 M_E の地球」と「質量 m の物体」の間に作用する万有引力は

$$F = G\frac{M_E m}{(R_E + h)^2}$$

と表されます。

2物体間の距離 r は物体の地表からの高さ h とすると

$$r = R_E + h$$

と表されます。
ここで、$h \ll R_E$ より $R_E + h \approx R_E$ と近似をします。
次のスライドの例題でも取り上げますが、地球の半径は

$$R_E \approx 6.38\times10^6\ \mathrm{m}$$

となります。
$\frac{h}{R_E}$を考えると

$h_1 = 1$ m の場合 $$\frac{h_1}{R_E} = \frac{1}{6.38\times10^6} = 1.6\times10^{-7}$$

$h_2 = 10$ m の場合 $$\frac{h_2}{R_E} = \frac{10}{6.38\times10^6} = 1.6\times10^{-6}$$

$h_3 = 1000$ m の場合 $$\frac{h_3}{R_E} = \frac{1000}{6.38\times10^6} = 1.6\times10^{-4}$$

と表されます。

従って、$h \ll R_E$ の近似は $\frac{h}{R_E} \ll 1$ であれば十分利用できることになります。

ざっくり 6380 km なので h が数km程度では誤差みたいなものですよね？

従って、

$$F = G\frac{M_E m}{(R_E + h)^2} \approx G\frac{M_E m}{R_E^2}$$

$$= m \cdot \underbrace{\boxed{G\frac{M_E}{R_E^2}}}_{g} = mg$$

となります。
この青枠で囲まれた部分が「重力 mg 」の「 g 」に対応することになります。
「 G, M_E, R_E 」は定数なので「 g 」も定数になります。
「 g 」を「重力加速度」と呼び

$$g = 9.80665 \quad \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

となります。一般的には $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ で知られています。

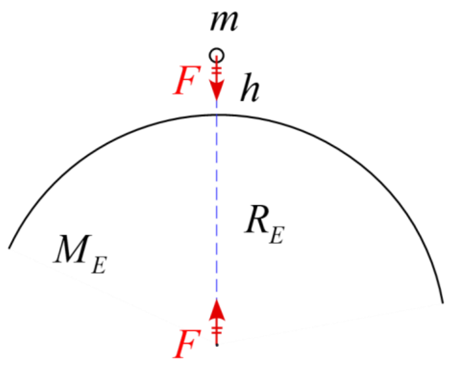
万有引力の法則～gの値

例題

以下の数値を用いて重力加速度 g の値を概算せよ。

$$R_E \approx 6.38\times10^{6}\ [\mathrm{m}] \quad M_E \approx 5.98\times10^{24}\ [\mathrm{kg}]$$

$$G = 6.673\times10^{-11}\ [\mathrm{Nm^2/kg^2}]$$



少し計算問題をやってみましょう。
単位と有効数字に気をつけて計算を行うことが大事です。

万有引力の法則より $h \ll R_E$ の近似を用いると

$$F = G\frac{M_E m}{(R_E+h)^2} \approx G\frac{M_E m}{R_E^2} = mg$$

となります。

従って重力加速度 g は

$$g = G\frac{M_E}{R_E^2}$$

$$= 6.673\times10^{-11}\times\frac{5.98\times10^{24}}{\left(6.38\times10^{6}\right)^2} \quad \frac{\mathrm{Nm^2}}{\mathrm{kg^2}} \cdot \frac{\mathrm{kg}}{(\mathrm{m})^2}$$

$$\mathrm{N}=\mathrm{kg}\,\mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

$$= 9.80349 \quad \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

$$= 9.80 \quad \mathrm{m}/\mathrm{s}^2$$

となります。
ここで有効数字は「R_E, M_E」が有効数字3桁なので結果も有効数字3桁で表します。
実際に関数電卓をたたいてやってみて下さい。

ニュートンの運動の法則

第1法則（慣性の法則）
すべての物体は、外部から作用を受けない限りその運動の状態をそのまま維持する。静止しているものはそのまま静止をし続け、ある速度で運動しているものはそのままの速度を保持して直線上を等速運動し続ける。

第2法則（ $m\vec{a} = \vec{F}$ ）
物体に外から力が作用するとき、その物体の得る加速度の大きさは、加えた力の大きさに比例し、その方向は力の向きに一致する。

第3法則（作用・反作用の法則）
2つの物体の間に作用する力は、それらを結ぶ直線上に作用し、その大きさは等しく、方向は反対向きである。

ここから「力学」の本題に入っていきます。

「力学」は「ニュートン力学」とも呼ばれます。
ニュートンが「プリンキピア」で発表し、彼が「力学」の分野を体系立てたことになります。

「力学」の世界を表す3つの法則があります。
第1法則は「慣性の法則」です。力の種類のところでも少し扱いましたね。
全ての物体には「慣性」があります。
つまり、「何か変化(具体的には速度 $\vec{v}$ の変化)がなければその状態を維持する」
という法則になります。

第2法則は「$m\vec{a}=\vec{F}$」所謂「運動方程式」です。
力学での現象はこの式で表されます。
更に、この式は「$\vec{a}=\vec{0}$」の状態、即ち、「慣性の法則」も含んでいます。

第3法則は「作用・反作用の法則」です。
2物体間の間に作用する力に関する法則になります。

それでは各法則について詳しく説明していきましょう。

慣性の法則

慣性：物体が常に現在の状態を保とうとする性質

ガリレイ以前の物理にはこのような考え方は無かった。
→さまざまな間違いを含んでいた

間違いの例

・軽いものはゆっくり落ちる →空気の摩擦力のため

・何もしなければやがて物体は止まる →床との摩擦力のため

運動状態が変化

これらの邪魔する力さえなければ、「現在の運動状態を保つ」
→物体は運動状態を変えることはない。

慣性の法則

物体に力が働かないか、働いていてもつり合っていれば

静止している物体：静止し続ける
運動している物体：等速度運動を続ける　$\vec{v}$が一定

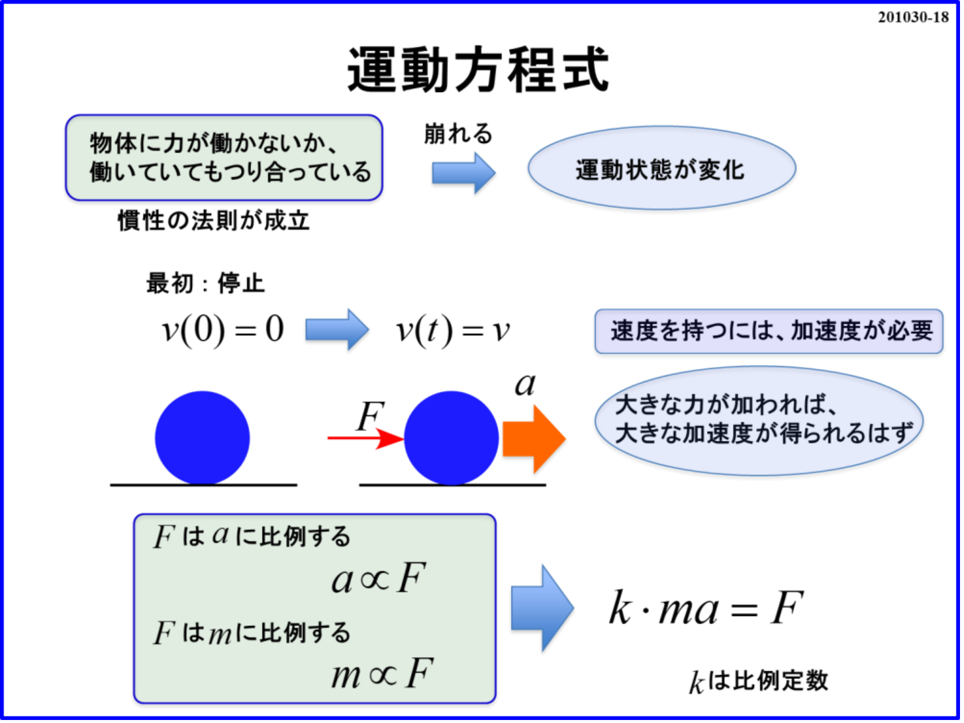
力に着目する

まずは第1法則の「慣性の法則」からです。
力学小史で登場した「ガリレイ」さんです。

この頃は結構、間違いや誤解があったのです。
例えば
・軽いものはゆっくり落ちる
・何もしなければ物体はやがて止まる
と言った間違いです。「鉄球と羽を同時に落とす」と現象としては羽の方がゆっくり落ちるでしょうし、「床の上を物体を滑らせる」とその物体はいつかは止まります。
現象をそのまま見ると一見正しいように感じられます。
つまり、物体に「何もしていない状態」だと思っていた訳です。

しかし、実際は「物体に作用している力(空気抵抗,床面との摩擦)」があった訳です。
この「作用している力」が完全に無ければ「現在の運動状態(速度 $\vec{v}$)」を保つことになります。

従って、「物体に力が働いていないか or 働いていても釣り合っているならば、
現在の運動状態を保つ」と言うことができます。
この法則では作用する力に着目することが重要です。



続いて第2法則です。
「慣性の法則」では「力が作用していない or 釣り合っている」場合について述べられています。
では、「崩れた場合どうなるか？」について記述したものが「運動方程式」になります。
「力学」の運動は全てこの式に従って行われています。

モデル図を見てみましょう。
最初、$t=0$ で物体は停止しているとします。$v(0)=0$ の状態です。
これがある時刻 t で $v(t)=v$ となったとします。
速度が 0 から v に変化したので「慣性の法則」が成立する条件が崩れたことになります。
この時、物体の速度が 0 から v に変化するには加速度が必要になります。
「大きな力が加われば大きな加速度が得られるはず」です。

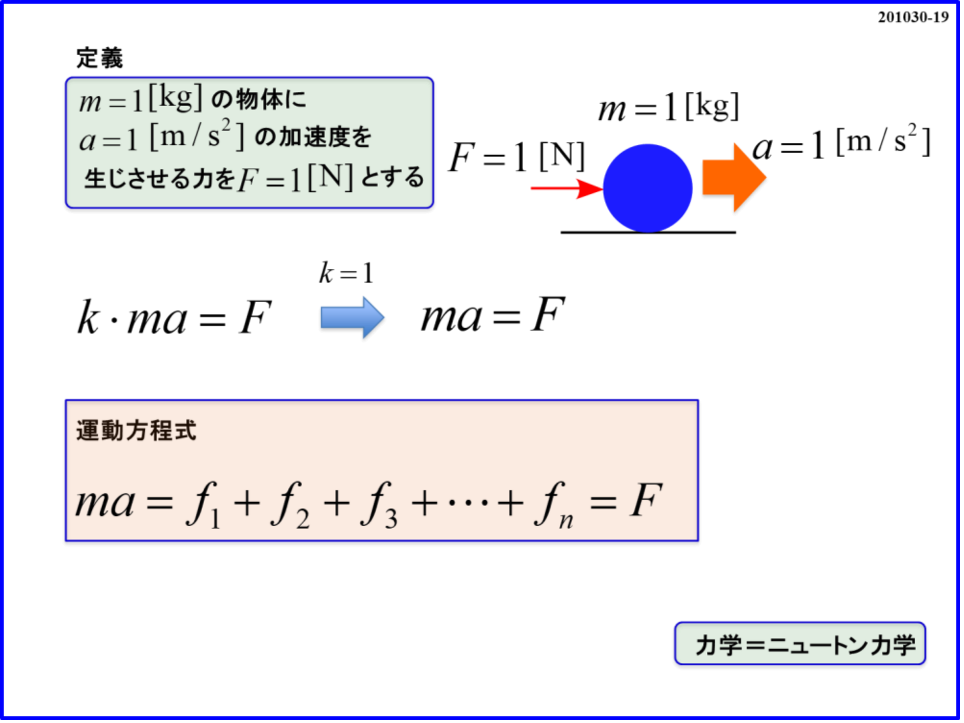
また、「質量が大きければ大きな力が必要なはず」です。
つまり、

力 F は加速度 a に比例
力 F は質量 m に比例

すると考えられます。
この2つを合わせて、比例定数を k とおくと

$$k \cdot ma = F$$

と表すことができます。



ここで、この比例定数 k を 1 とするために定義を設定します。

「**質量 m ＝ 1 kg の物体に a ＝ 1 m/s^2 の加速度を生じさせる力を F ＝ 1 N とする**」
と定義します。従って、

$$k \cdot ma = F$$

$$k \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

となるためには k ＝ 1 が等号が成立の条件になります。

よって運動方程式は

$$ma = F$$

と表すことができます。
力は「 $\boldsymbol{F}$ 」と書きましたが、作用する力は一つだけとは限りません。
作用する全ての力($\boldsymbol{F_1}, \boldsymbol{F_2}, \boldsymbol{F_3}, \cdots$)を記述する必要があります。

このモデルでは直線運動のモデルとして取り上げました。
これを3次元空間に拡張すると

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

となります。
位置ベクトルを $\vec{\boldsymbol{r}} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ とすると速度 $\vec{\boldsymbol{v}}$ は

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

となります。
さらに加速度 $\vec{\boldsymbol{a}}$ は

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt} \right)$$

$$
=\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right),\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right),\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right)\right)
$$

$$
=\left(\frac{d^2x}{dt^2},\frac{d^2y}{dt^2},\frac{d^2z}{dt^2}\right)
$$

と表されます。
従って、運動方程式 $m\vec{a}=\vec{F}$ は

$$
m\begin{pmatrix}\dfrac{dv_x}{dt}\\ \dfrac{dv_y}{dt}\\ \dfrac{dv_z}{dt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}
\qquad
m\begin{pmatrix}\dfrac{d^2x}{dt^2}\\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\\ \dfrac{d^2z}{dt^2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_x\\ F_y\\ F_z\end{pmatrix}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned} m\frac{dv_x}{dt}&=F_x\\ m\frac{dv_y}{dt}&=F_y\\ m\frac{dv_z}{dt}&=F_z\end{aligned}}
$$

と表され、各成分毎に運動方程式を立てれば良いことになります。

運動方程式

$\boxed{ma = F}$

次元解析

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML]}{[T^2]}$$

組立単位

$$\left[\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}/\mathrm{s}^2\right] = [\mathrm{N}]$$

注意）
質量と重さの違い

質量:慣性の大きさを表す量(**慣性質量**)
動きにくさの度合いを表した物理量

重さ:物体に働く重力　←**重さは力**

「力」について次元を考えると

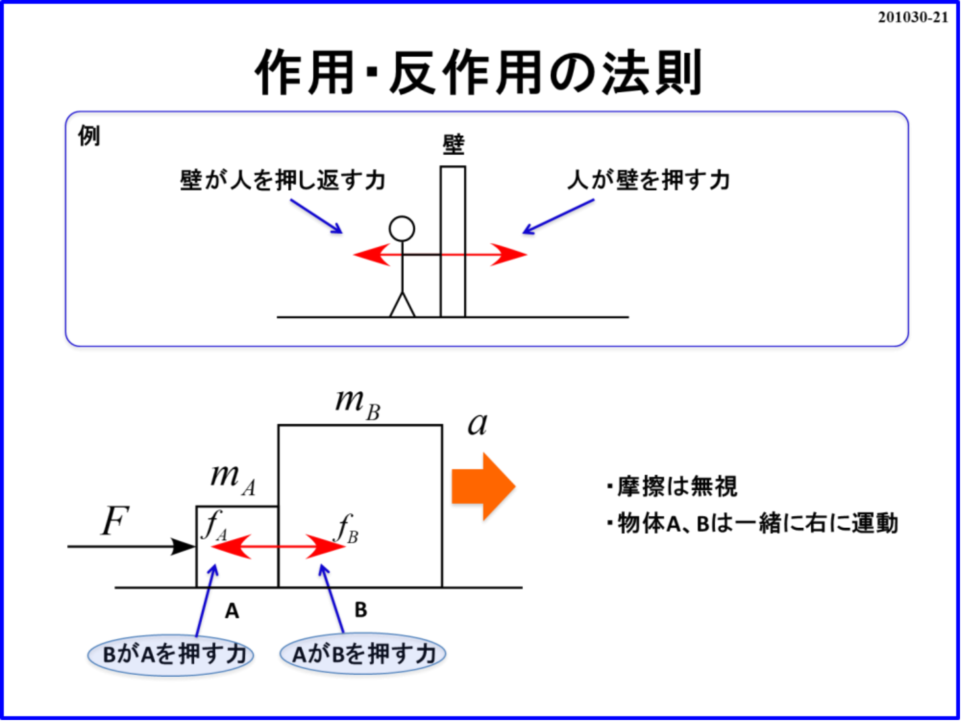
$$\underset{(m\text{ の次元})}{[M]}\underset{(\vec{a}\text{ の次元})}{\left[\frac{L}{T^2}\right]} = \left[\frac{ML}{T^2}\right]$$

となることはスライド201016-07で説明した通りになります。
力の単位は「**N (ニュートン)**」で表します。N の中身は「**N=kg m/s^2**」となります。
別に覚えなくても「質量 kg 」と「加速度 m/s^2 」の掛け算ですからすぐ導けますよね？

ここで一つ注意です。
「質量」と「重さ」について普段は気にして利用していないかもしれませんが、
物理では区別が必要になります。

「質量」とは「慣性の大きさを表す量」になります。
言い換えると「物体の動きにくさの度合いを表す量」で、これは「スカラー量」です。
それに対して「重さ」というのは「物体に働く重力」になります。これは「力」なので
「ベクトル量」となります。

従って「質量」はどこでも、例えば月などに行っても同じ値になります。
一方、「重さ」は場所によって変化します。地上と月面は「重力(万有引力)」が異なるため
異なる値になります。
この様に、「質量」と「重さ」は別物であると意識しておくことは重要です。

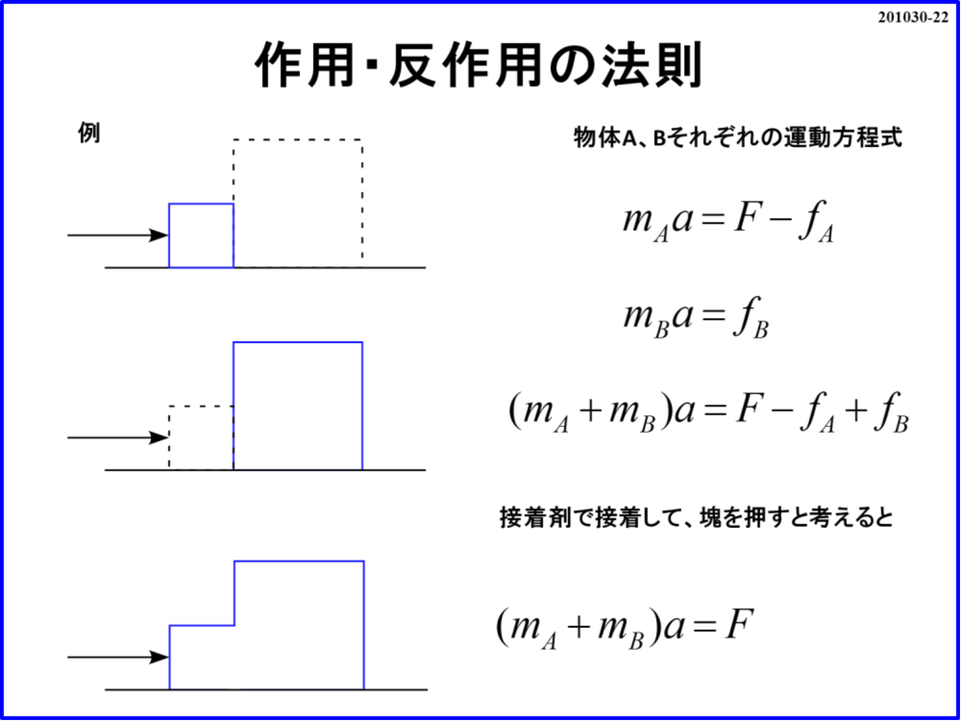


最後は第3法則の「作用・反作用の法則」になります。

例にあるように、「力」が作用した時、
その「力」と「逆向きに同じ大きさのちからが作用する(反作用)」ということになります。
ここで簡単なモデルを使って考えてみましょう。

2つの物体が接している状態の物体 A, B があるとします。
話を単純にするため、床との摩擦力は無視するとし、x 軸方向のみ考えるとします。
左側から力 F を加えたところ、物体 A, B が一緒に右に運動したとします。

この時、物体 AB が接している面では力が働き、「作用反作用の関係」になります。

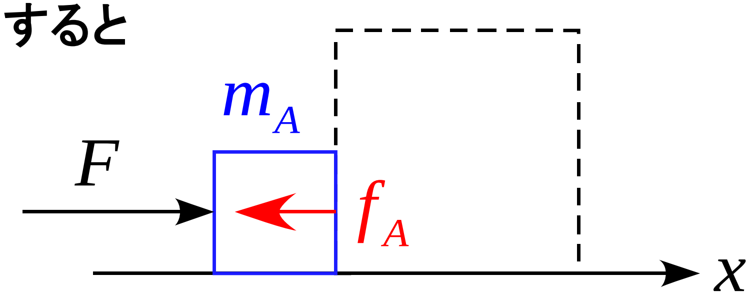


作用・反作用の力

物体 A が物体 B から受ける力：f_A
物体 B が物体 A から受ける力：f_B

この運動について運動方程式を考えてみましょう。

物体 A に着目すると

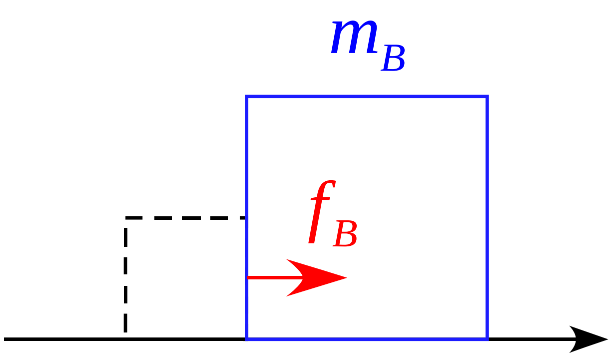


運動方程式は

$$m_A a = F - f_A$$

と表されます。

物体 B に着目すると



作用・反作用の力

物体 A が物体 B から受ける力 : f_A
物体 B が物体 A から受ける力 : f_B

運動方程式は

$$m_B a = f_B$$

と表されます。
この2式を合わせると

$$m_A a = F - f_A$$

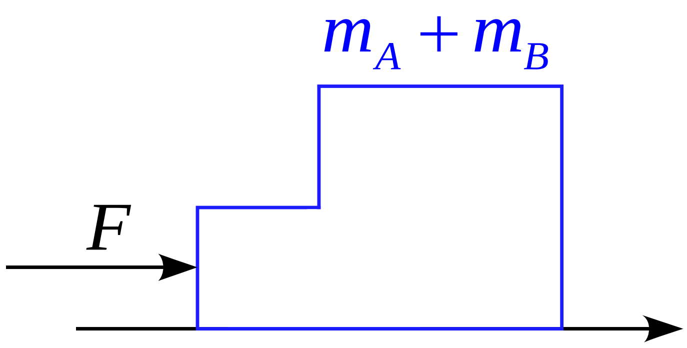
$$m_B a = f_B$$

$$m_A a + m_B a = F - f_A + f_B$$

$$(m_A + m_B) a = F - f_A + f_B$$

と表されます。

一方、物体 AB は一体となって運動しているので、
物体 AB 全体を塊として考えると



作用・反作用の力

物体 A が物体 B から受ける力 : f_A
物体 B が物体 A から受ける力 : f_B

運動方程式は

$$\left(m_A + m_B\right)a = F$$

と表されます。

201030-23

同じ現象を表す式だから、数学的にも同じ式でなければならない

$$\underbrace{\boxed{F}}_{\text{塊と見た}} = \underbrace{\boxed{F - f_A + f_B}}_{\text{AとB別々と見た}}$$

$$-f_A + f_B = 0$$

$$f_A = f_B$$

従って、f_A と f_B は、互いに逆向きで大きさが同じ

→作用・反作用の法則が成り立っている

分離していると見た式

$$\left(m_A + m_B\right)a = F - f_A + f_B$$

と一体化と見た式

$$\left(m_A + m_B\right)a = F$$

は同じ現象を表す式なので数学的にも同じ式でなければならないので
それぞれの右辺に着目すると

$$F = F - f_A + f_B$$

$$f_A = f_B$$

となります。
従って、「 f_A と f_B は同じ大きさであり、向きが逆向き」であることが判り、
作用・反作用の法則が成り立っていることが確認できます。