自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

$$a = g$$

よって、物体の加速度は常に一定
自由落下は「等加速度運動」である。

「等加速度運動」の式を用いると

$$v = v_0 + at$$

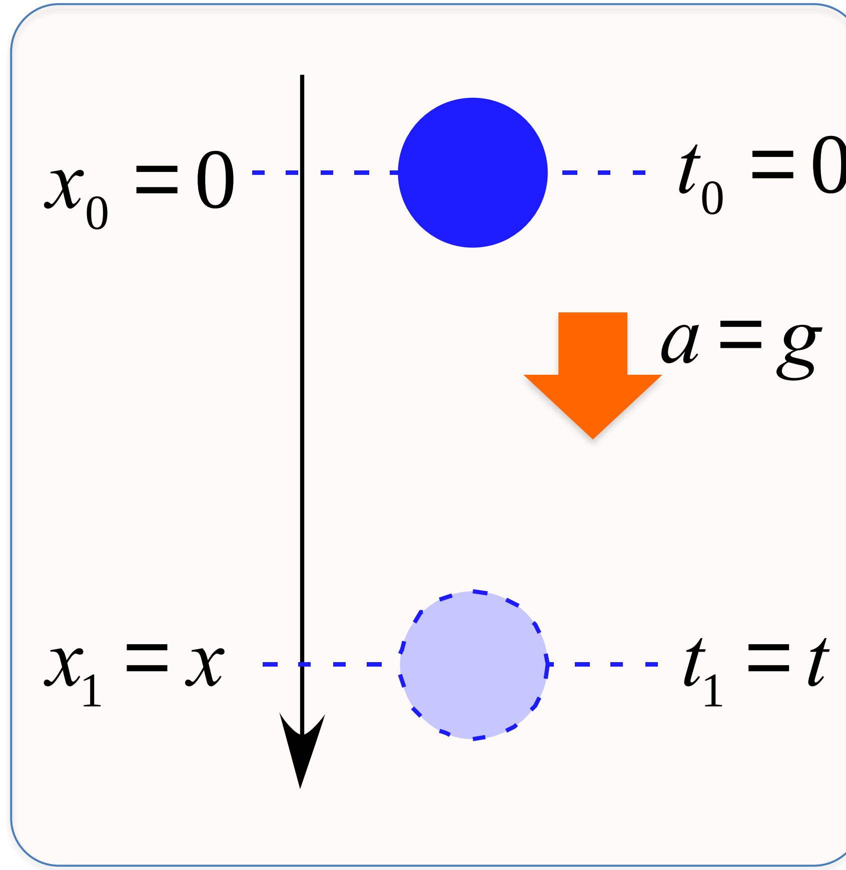
$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v_0 = 0$$

$$a = g$$

$$v = 0 + gt = gt$$

$$x = 0 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}gt^2$$



力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

・問題文で指定されている場合はそれを利用する
・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
・一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

⇒ t で積分 ⇒ $v = \boxed{}$ ⇒ t で積分 ⇒ $x = \boxed{}$

積分定数は初期条件が決める

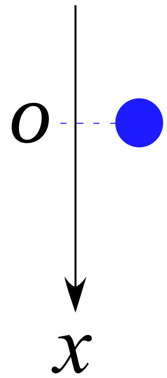
運動方程式を立てる ⇒ **速度、変位を求める** ⇒ **求めた速度、変位を使って問題で問われている量を計算する**

自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

この運動方程式を解くことで
速度と変位を導く。



$$a = \frac{dv}{dt}$$

を代入すると、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dv}{dt} dt = \int g dt$$

$$\int dv = \int g dt$$

$$v = gt + C_1$$

初期条件より

$$v(0) = g \cdot 0 + C_1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

従って

$$\boxed{v(t) = gt}$$

変位については

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int gtdt$$

$$\int dx = \int gtdt$$

$$x = \frac{1}{2} gt^2 + C_2$$

初期条件より

$$x(0) = \frac{1}{2} g \cdot 0^2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

従って

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} gt^2}$$

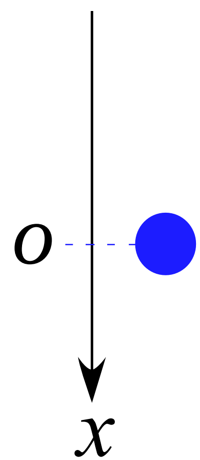
軸の設定とグラフ

自由落下　～　下向きを正に軸を取る

$$ma = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g$$



$$v(t) = gt$$

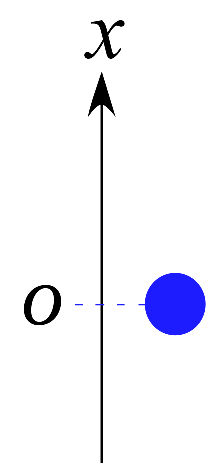
$$x(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

自由落下　～　上向きを正に軸を取る

$$ma = -mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$

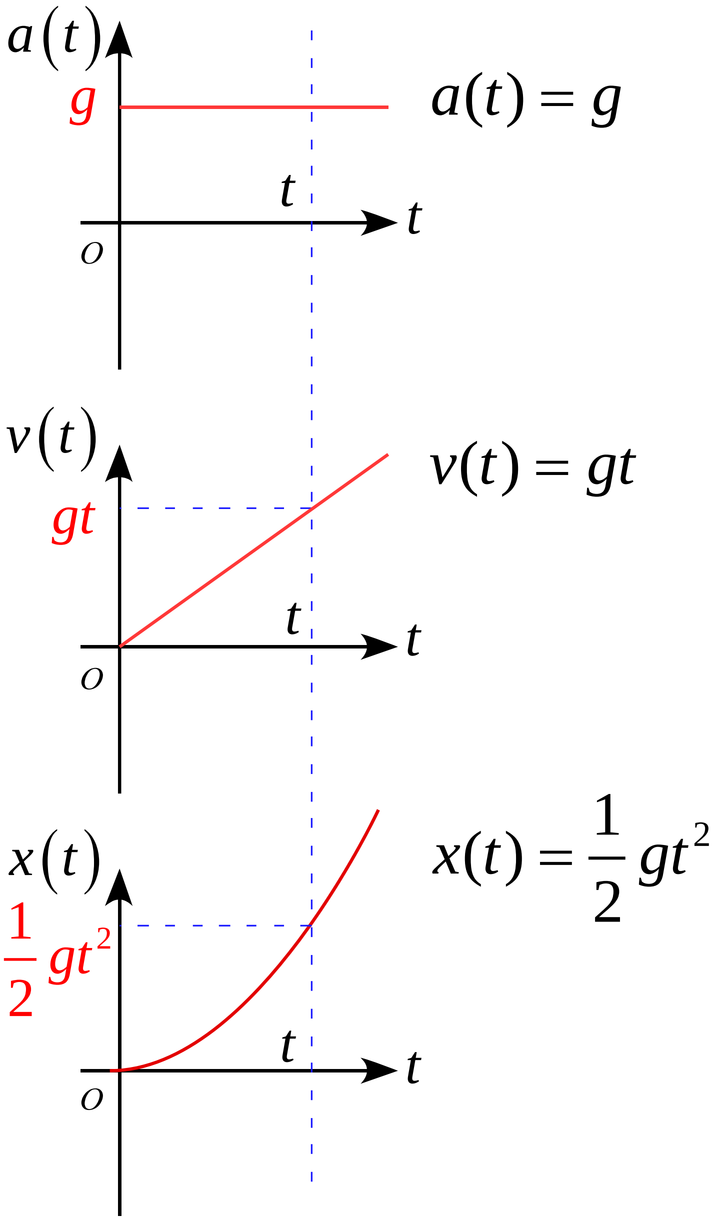


$$v(t) = -gt$$

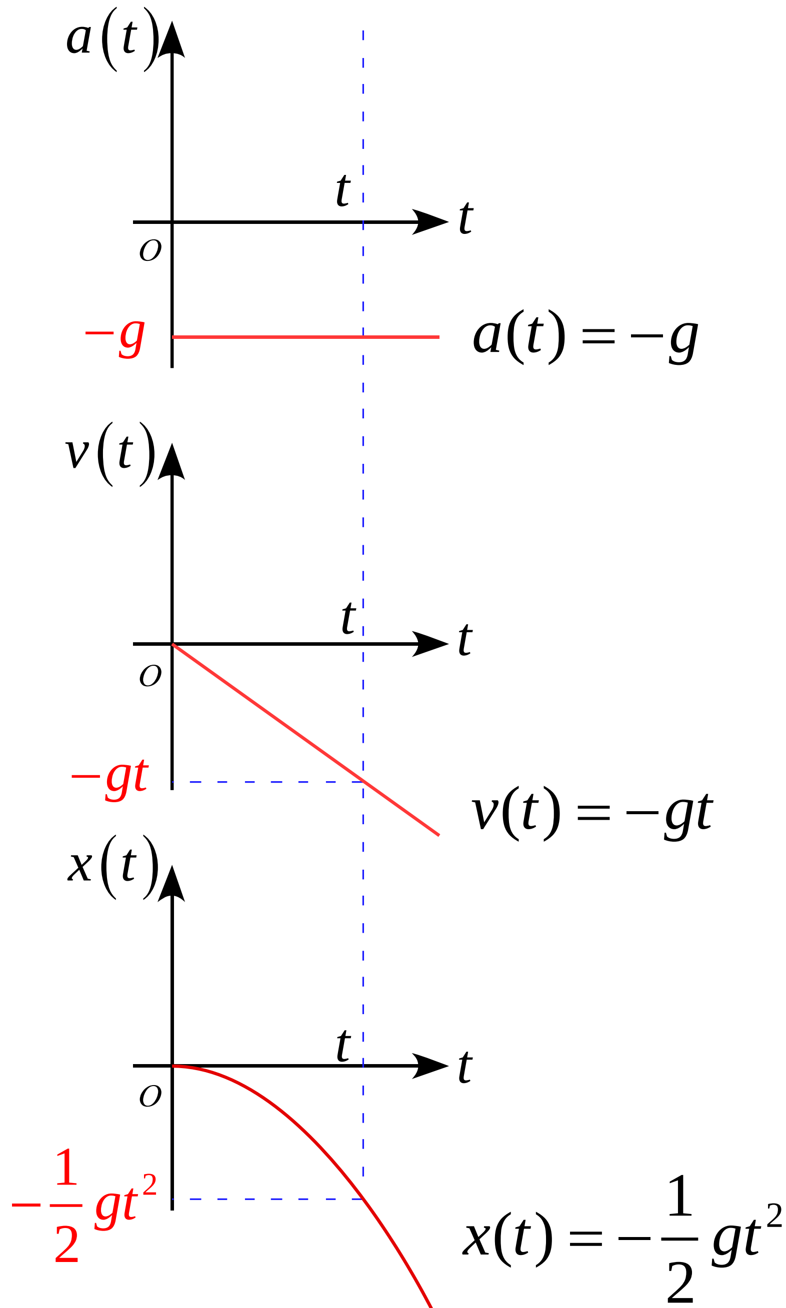
$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2$$

201106-07

自由落下　～　下向きを正に軸を取る



自由落下　～　上向きを正に軸を取る



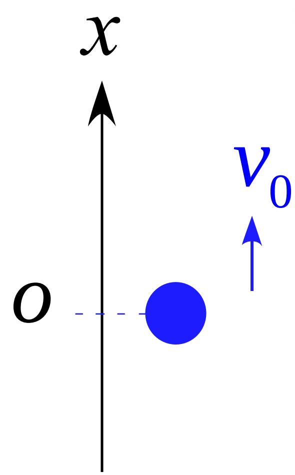
鉛直投げ上げ

運動方程式は

$$ma = -mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$\frac{dv}{dt} = -g$$



この式を t で積分すると

$$\int \frac{dv}{dt}dt = \int(-g)dt$$

$$\int dv = \int(-g)dt$$

$$v = -gt + C_1$$

初期条件より

$$v(0) = g\cdot 0 + C_1 = v_0$$

$$C_1 = v_0$$

従って

$$\boxed{v(t) = -gt + v_0}$$

変位については

$$v = \frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

$$\frac{dx}{dt} = -gt + v_0$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int \left(-gt + v_0\right) dt$$

$$\int dx = \int \left(-gt + v_0\right) dt$$

$$x = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + C_2$$

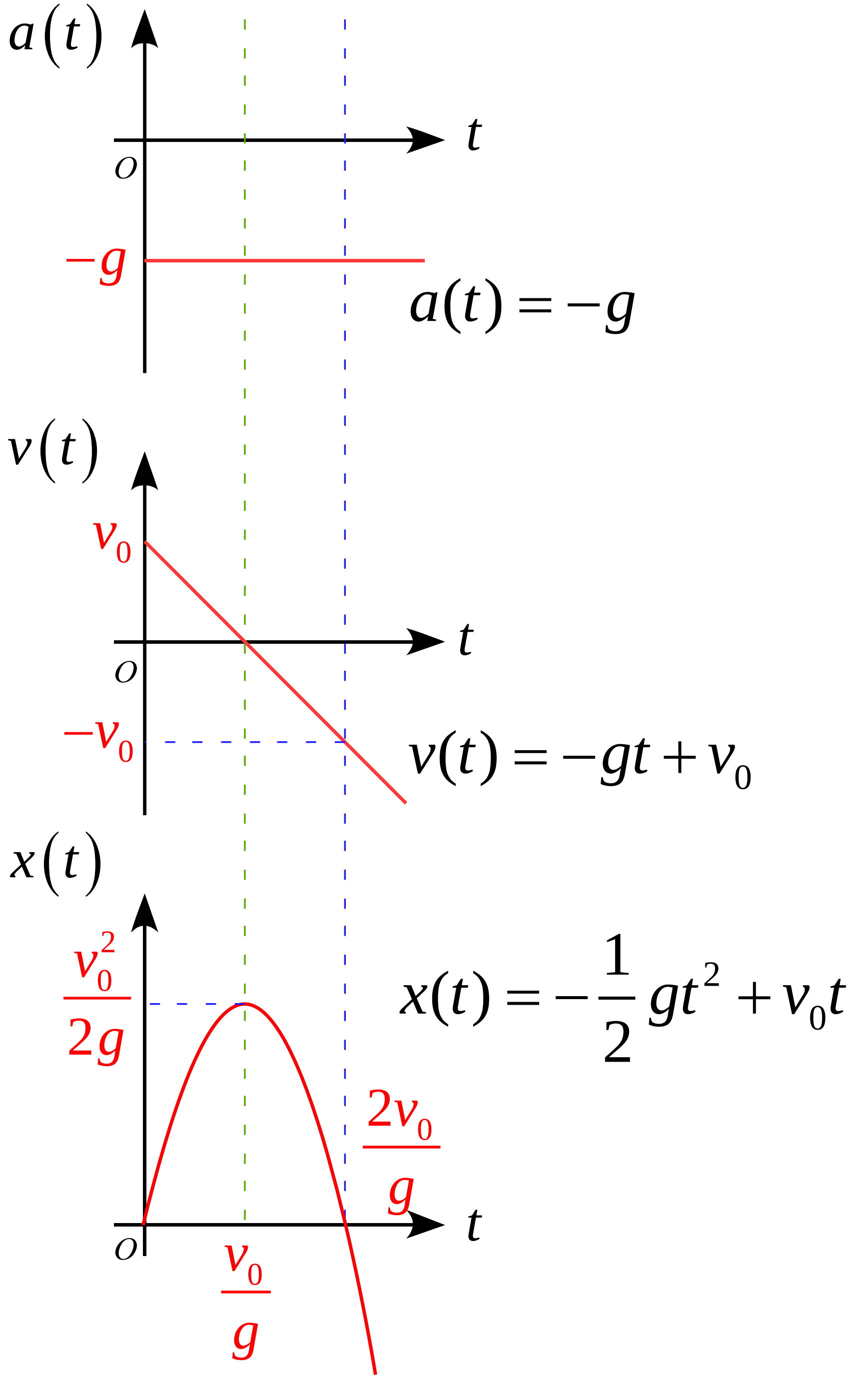
初期条件より

$$x(0) = -\frac{1}{2} g \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

従って

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t}$$



$v(t) = 0$ となる時刻 t_1 は

$$v(t_1) = -gt_1 + v_0 = 0$$

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

$x(t) = 0$ となる時刻 t_2 は (原点を除く)

$$x(t_2) = -\frac{1}{2}gt_2^2 + v_0 t_2 = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2}gt_2 + v_0\right)t_2 = 0$$

$$t_2 = 0 \quad \text{or} \quad t_2 = \frac{2v_0}{g}$$

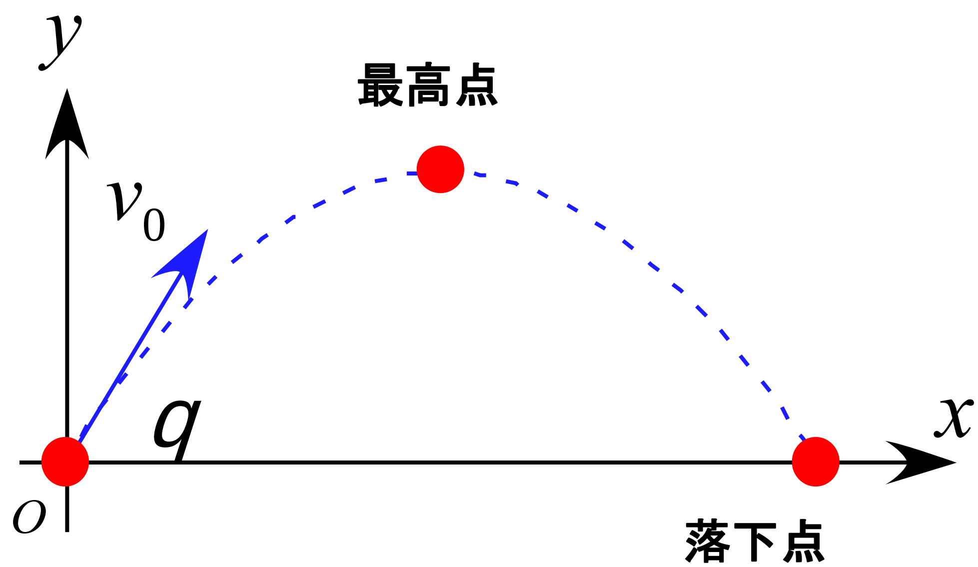
斜方投射運動(放物運動)

斜めに物体を投げ上げたときの運動

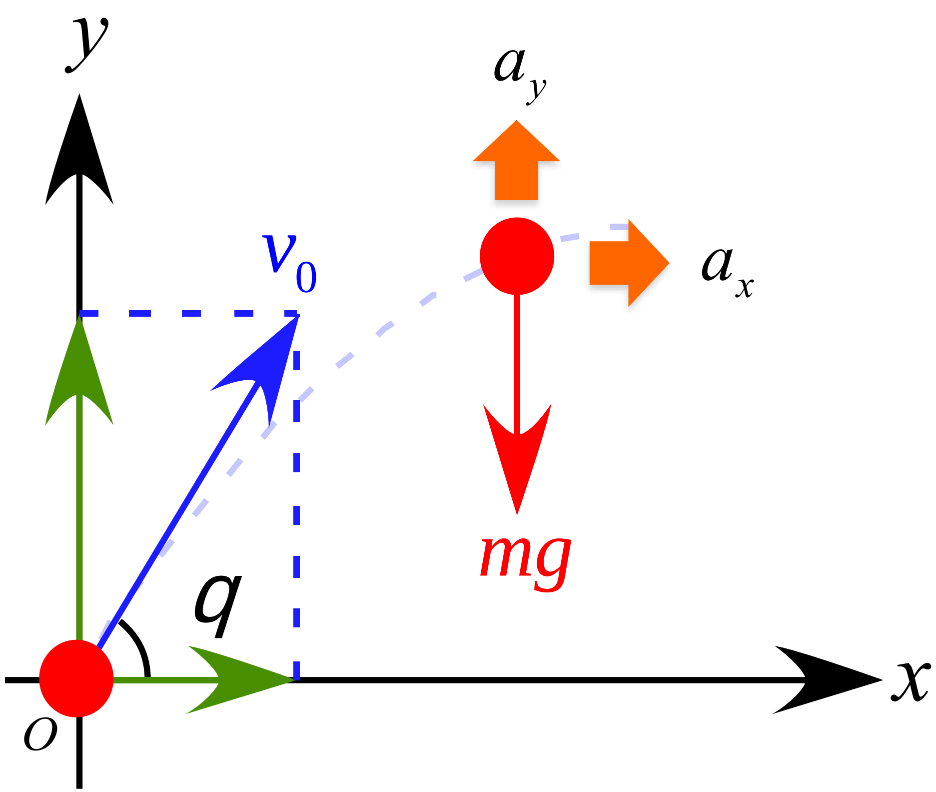
初速度： v_0

水平面との角度： q

任意の時刻における物体の
速度、位置について考える



2次元の運動 → 分解 → 1次元の運動



それぞれの軸について
運動方程式を考えると

x 方向

$$ma_x = 0$$

y 方向

$$ma_y = -mg$$

それぞれの加速度は

$$a_x = 0$$

等速直線運動

$$a_y = -g$$

加速度 $-g$
等加速度運動

この2式を t で積分する。

x 方向

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\int \frac{dv_x}{dt} dt = \int 0 dt$$

$$\int dv_x = \int 0 dt$$

$$v_x = C_{x1}$$

初期条件 $t = 0$ のとき

$$v_x(0) = v_0 \cos\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_x(0) = C_{x1} = v_0 \cos q$$

$$C_{x1} = v_0 \cos q$$

従って、速度 v_x は

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

y 方向

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

この式を t で積分すると

$$\int \frac{dv_y}{dt} dt = \int (-g)\, dt$$

$$\int dv_y = \int (-g)\, dt$$

$$v_y = -gt + C_{y1}$$

初期条件 $t = 0$ のとき

$$v_y(0) = v_0 \sin\theta$$

であるから、積分定数は

$$v_y(0) = -g \cdot 0 + C_{y1} = v_0 \sin\theta$$

$$C_{y1} = v_0 \sin q$$

従って、速度 v_y は

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

それぞれの速度は

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

ここで、さらに速度の式をそれぞれ t で積分する

x 方向

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int v_0 \cos\theta dt$$

$$\int dx = \int v_0 \cos\theta dt$$

$$x = \left(v_0 \cos q\right) t + C_{x2}$$

初期条件 $t = 0$ のとき原点なので

$$x(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$x(0) = \left(v_0 \cos q\right) \times 0 + C_{x2} = 0$$

$$C_{x2} = 0$$

従って

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

y 方向

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta$$

この式を t で積分すると

$$\int dy = \int \left(-gt + v_0 \sin\theta\right) dt$$

$$y = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t + C_{y2}$$

初期条件 $t=0$ のとき原点なので

$$y(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$y(0) = -\frac{1}{2} g \cdot 0^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \cdot 0 + C_{y2} = 0$$

$$C_{y2} = 0$$

従って

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t$$

任意の時刻における変位は

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t$$

x 方向

$$a_x(t) = 0$$

$$v_x(t) = v_0 \cos\theta$$

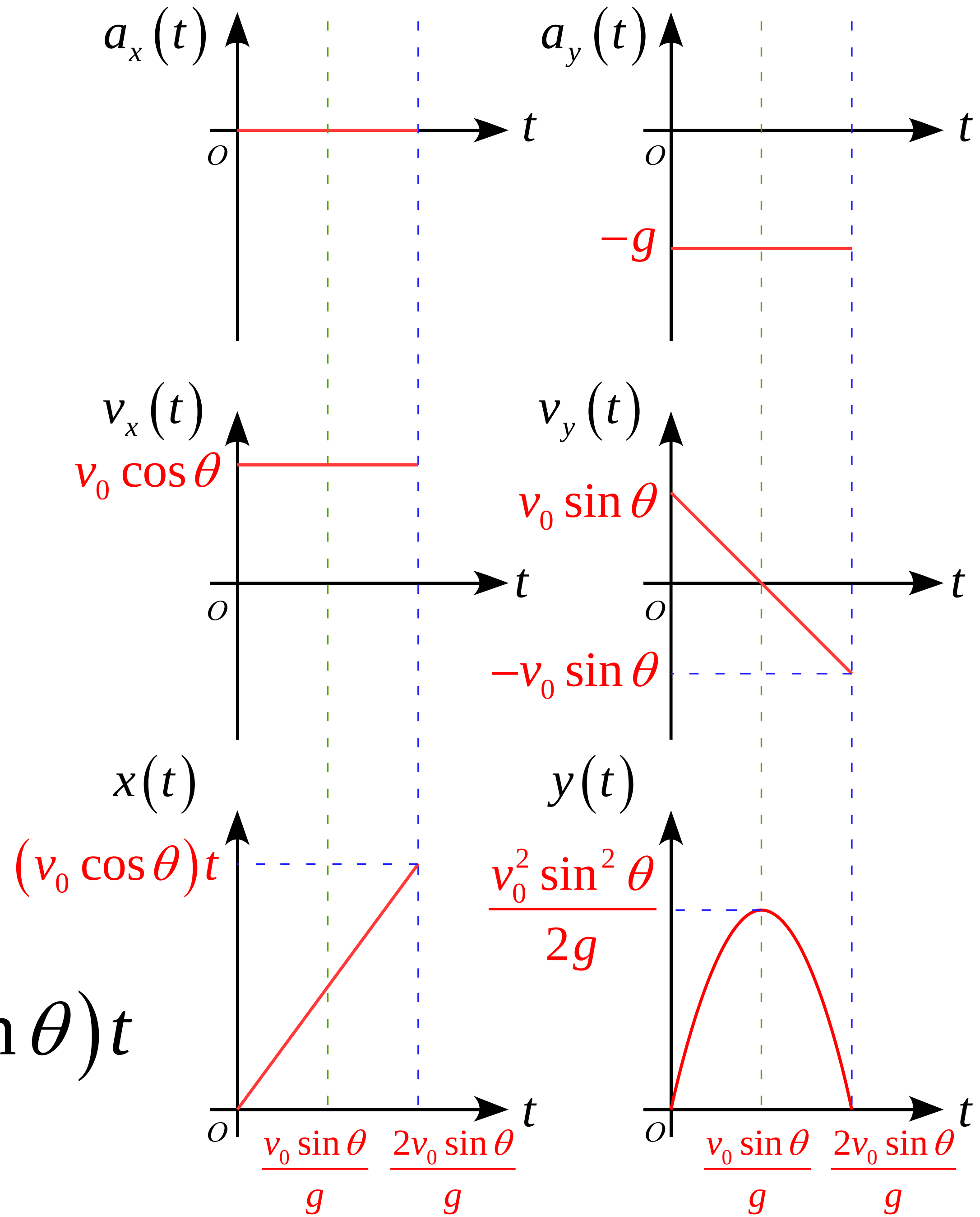
$$x(t) = (v_0 \cos\theta)t$$

y 方向

$$a_y(t) = -g$$

$$v_y(t) = -gt + v_0 \sin\theta$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t$$



放物運動の確認

時刻 t を求めると

$$t = \frac{x}{v_0 \cos q}$$

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right) t$$

これを y に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + \left(\tan\theta\right) x$$

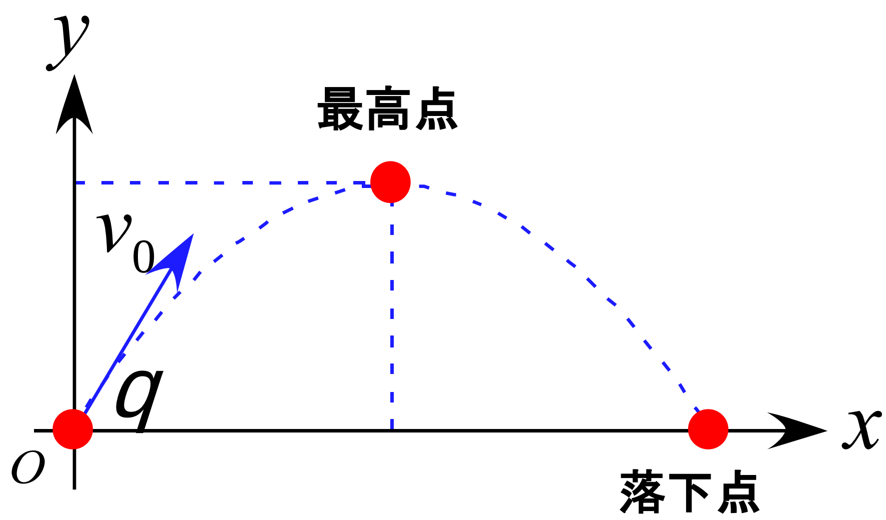
放物線

$$= \left[-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x + \tan\theta \right] x$$

$y = 0$ とすると

$$x = 0$$

$$x = \frac{2v_0^2 \sin q \cos q}{g}$$



の2点となり、それぞれ原点と落下点となる。

放物運動の確認

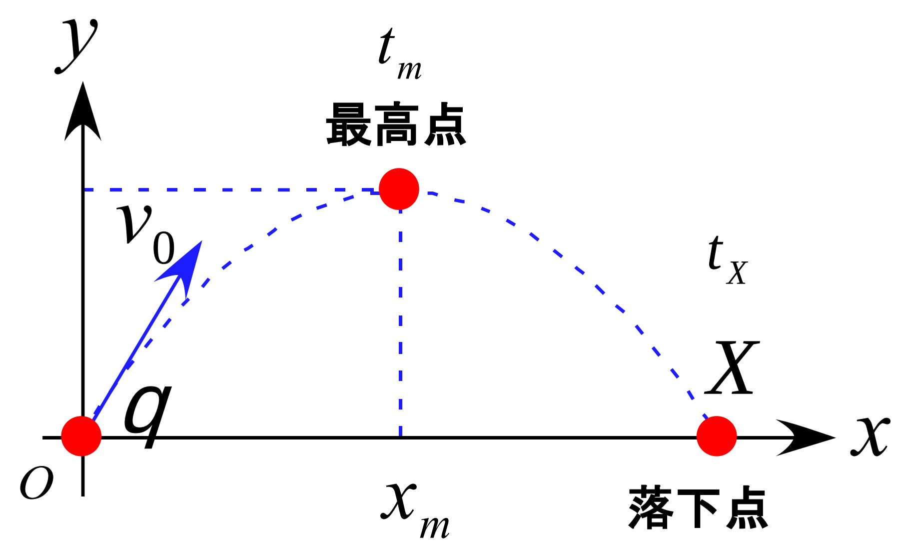
落下点の達した時刻 t_X は

$$t_X = \frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{1}{v_0 \cos\theta} \frac{2v^2{}_0 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$= \frac{2v_0 \sin q}{g}$$

対称性より最高点の時刻 t_m は

$$t_m = \frac{t_X}{2} = \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$



このときの座標は

$$x_m = \frac{X}{2} = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$y(t_m) = -\frac{1}{2} g \cdot t_m{}^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t_m$$

$$= -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

放物運動～飛距離最大

飛距離最大となる初速度の角度 q_0 を考える

$$\sin 2q = 2\sin q \cos q$$

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin q_0 \cos q_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2q_0}{g}$$

これが最大値になるのは $\sin 2q_0$ が最大値になるときで、その最大値は 1 である。

このとき、

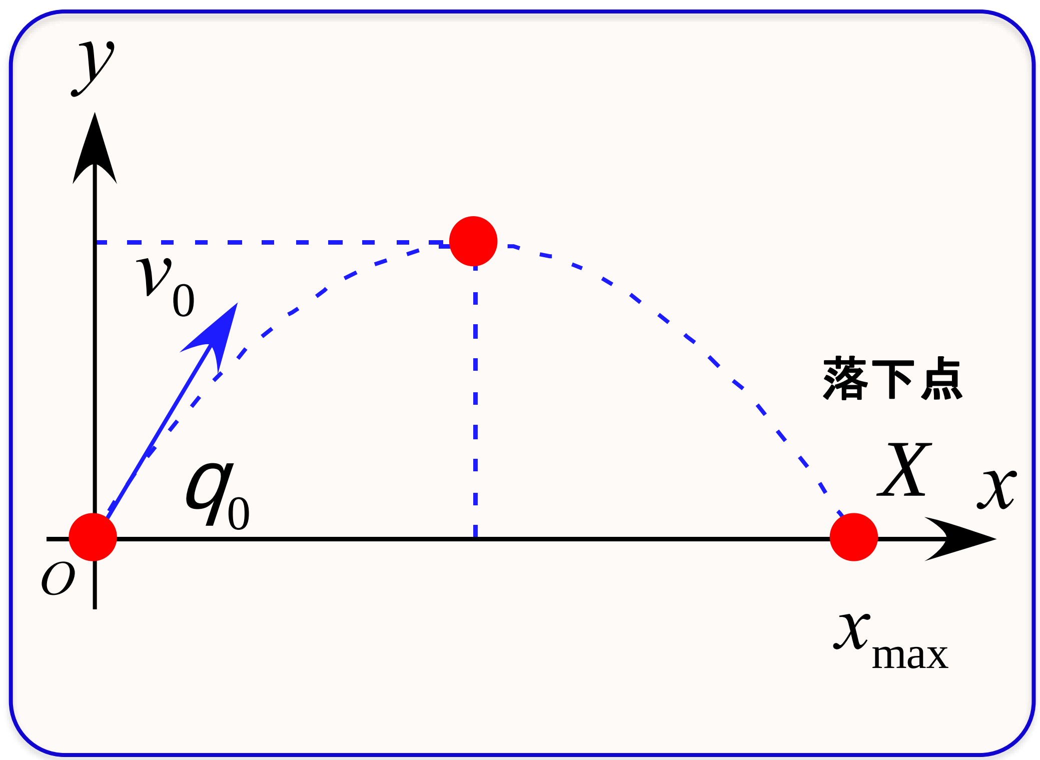
$$2q_0 = 90^\circ$$

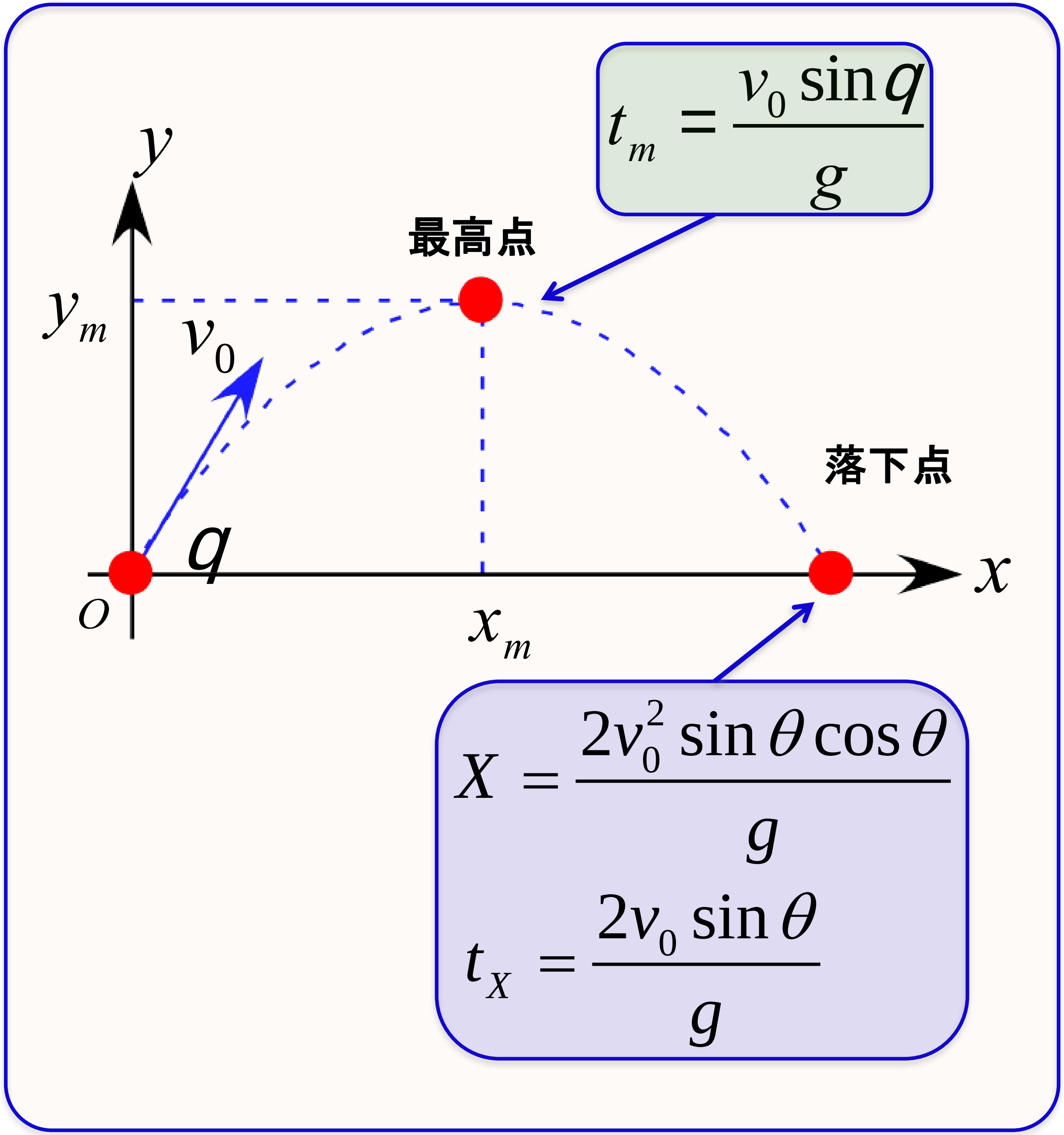
となるので $x_{\max}$ となる放出角度は

$$q_0 = 45^\circ$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

である。





$t_m = \frac{v_0 \sin q}{g}$
y
最高点
y_m
v_0
落下点
q
O
x_m
x
$X = \frac{2v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$
$t_X = \frac{2v_0 \sin\theta}{g}$

放物運動の確認 ～ 平方完成

軌道の式を平方完成することでグラフを考える

$$
\begin{aligned}
y(x) &= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}x \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[x^2 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta}\left(-\frac{2v_0^2\cos^2\theta}{g}\right)x\right] \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[x^2 - \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}x\right] \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2\right] \\
&= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left[\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}\right]
\end{aligned}
$$

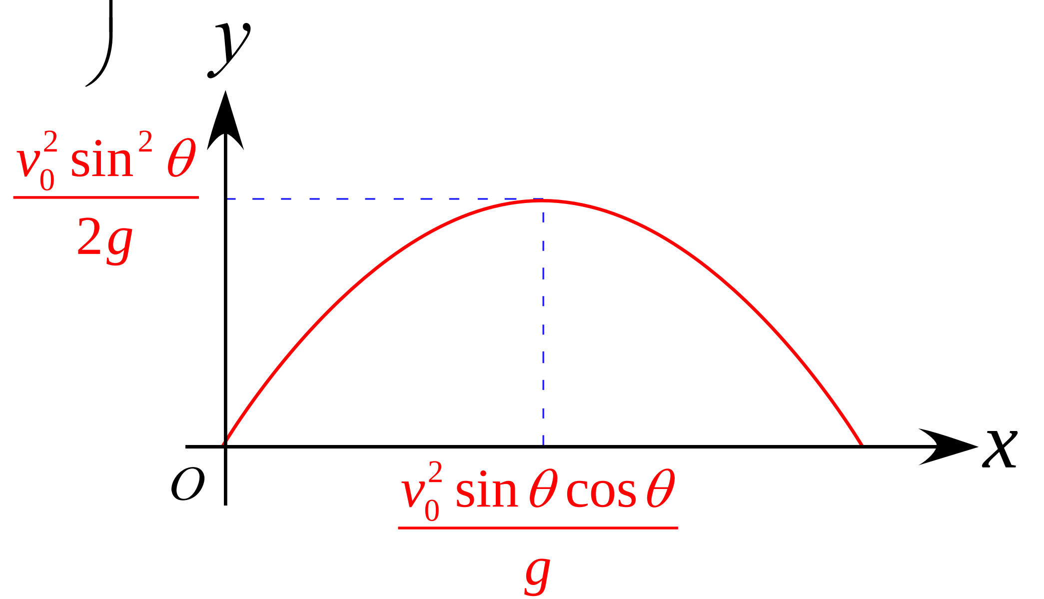
$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 - \frac{v_0^4\sin^2\theta\cos^2\theta}{g^2}\left(-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\right)$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2\cos^2\theta}\left(x - \frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$$

従って、頂点の座標は

$$(x, y) = \left(\frac{v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g}, \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\right)$$

となり、前出の計算結果と
一致することが確認できる



力～様々な力

重力

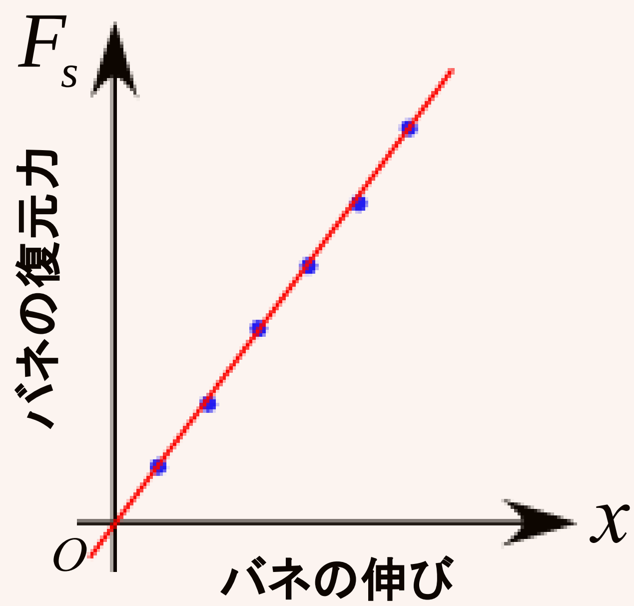
$$F_g = mg \quad g = 9.8 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

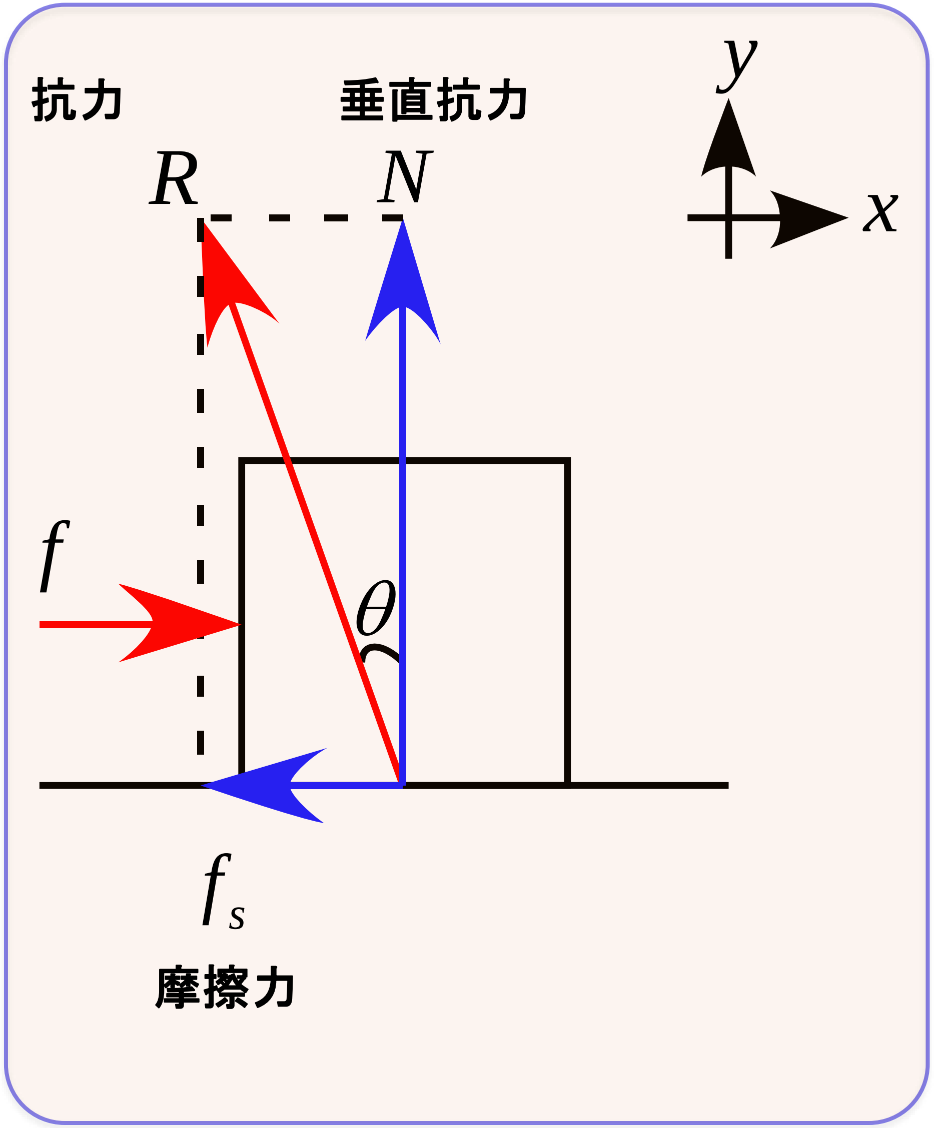
バネの弾性力

フックの法則 (実験式)

$$F_s = kx$$

バネ定数 k

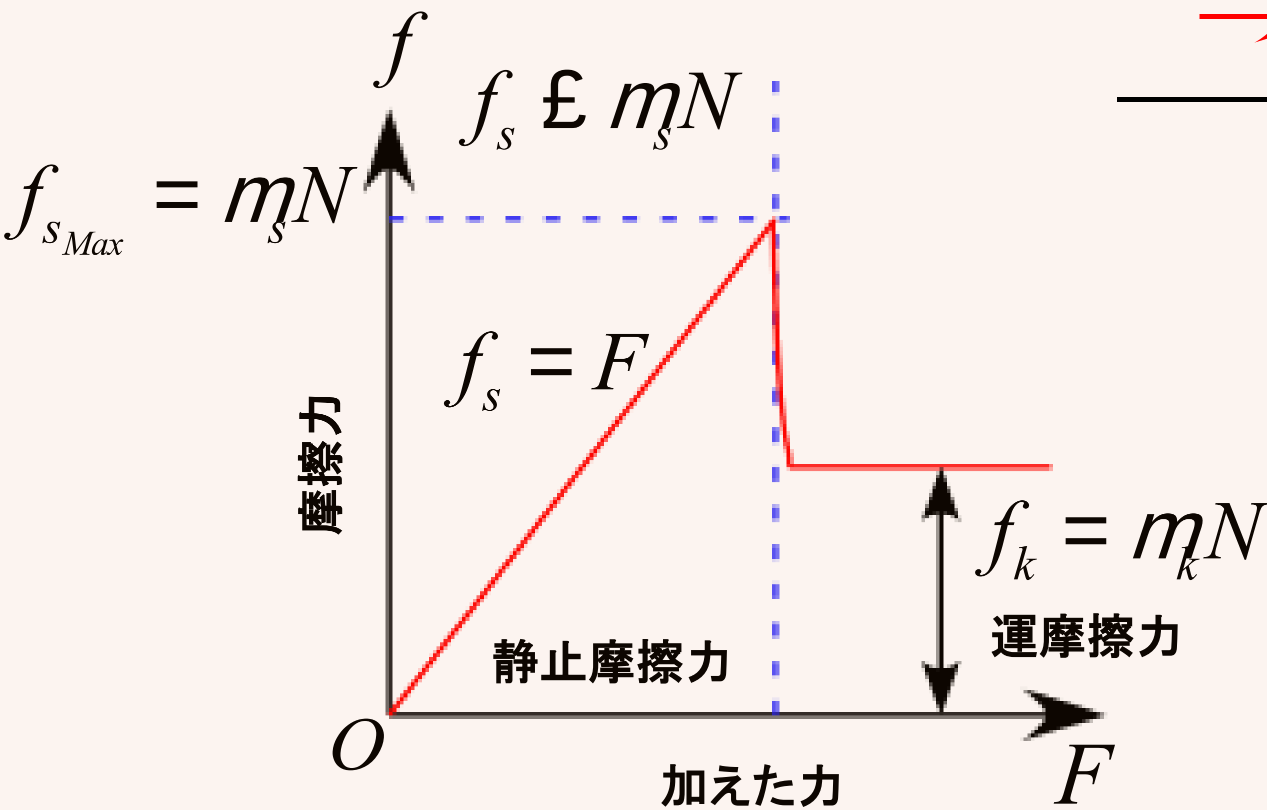


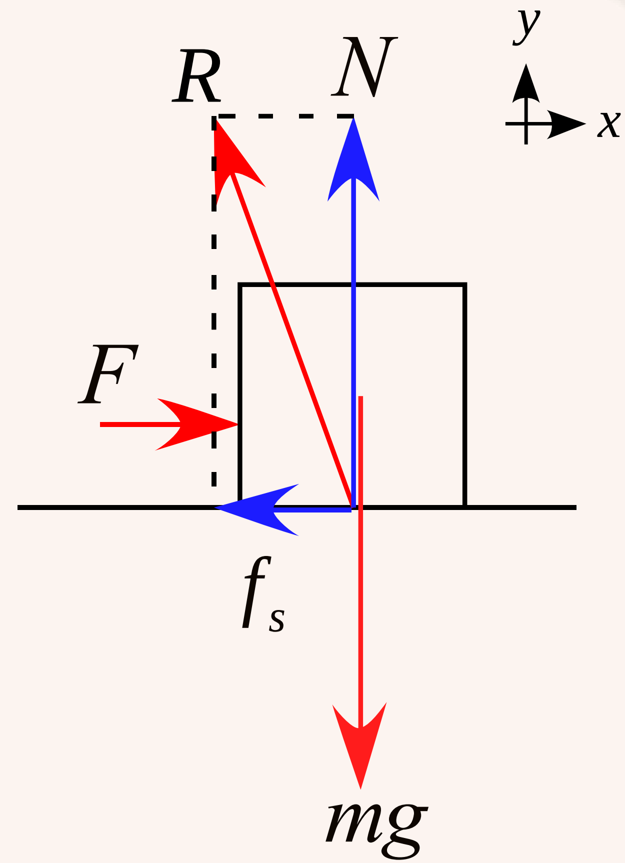


$$\mu = \tan\theta = \frac{f}{N}$$

摩擦力 f

接触している2つの面の間の摩擦力





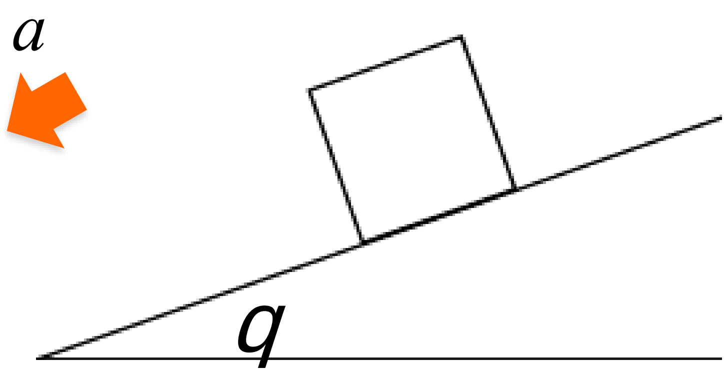
静止摩擦係数: μ_s

動摩擦係数: μ_k

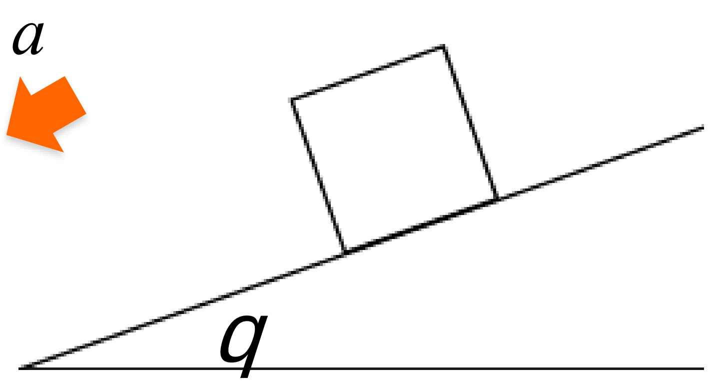
力〜運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

1. 質量 m の物体が斜面を滑り下りる(摩擦なし)



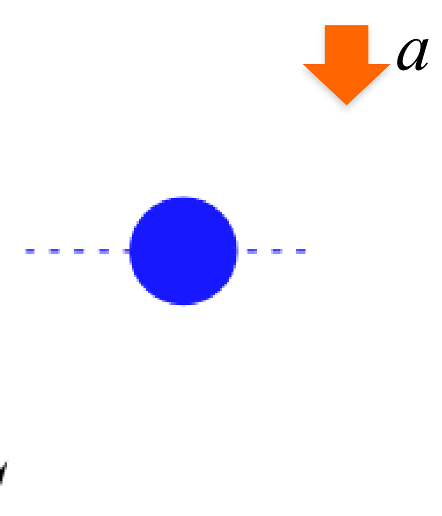
2. 質量 m の物体が斜面を滑り下りる(摩擦力 f あり)



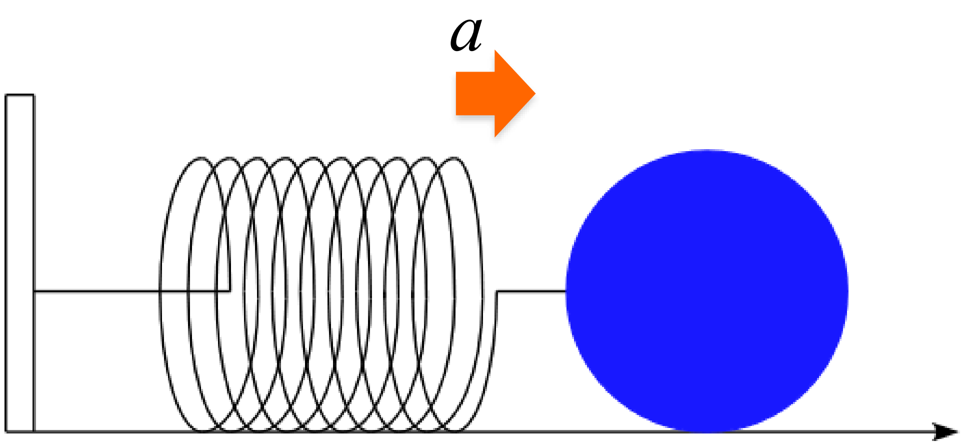
力〜運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

3. 質量 m の雨滴が落下する(空気の抵抗力の大きさは kv)



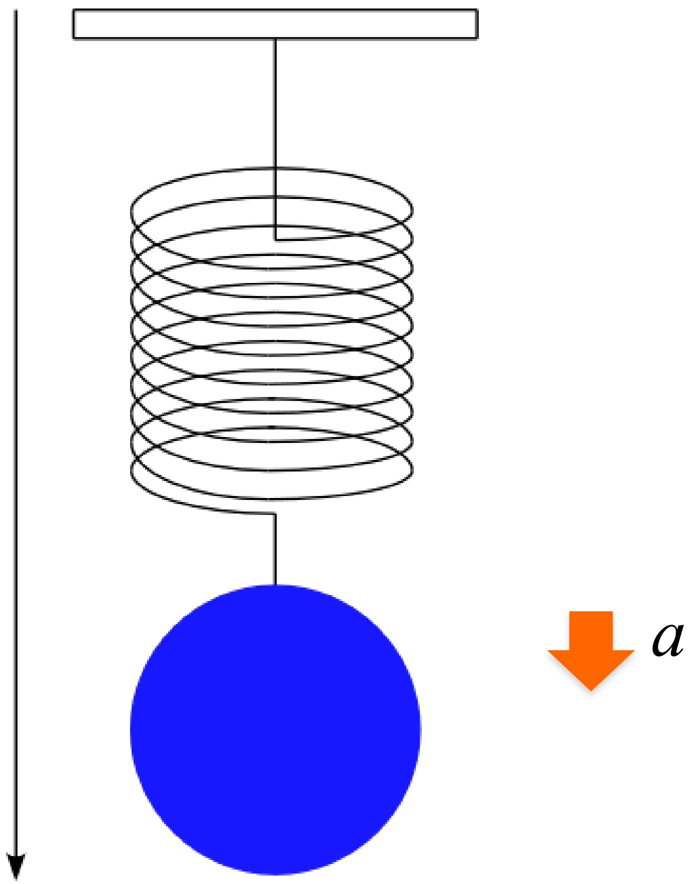
4. バネに質量 m の物体がついている(バネの復元力は f_s とし、床との摩擦無しとする)



力〜運動方程式

それぞれの状態に置いて図に作用する力を書き込み、運動方程式を書け。

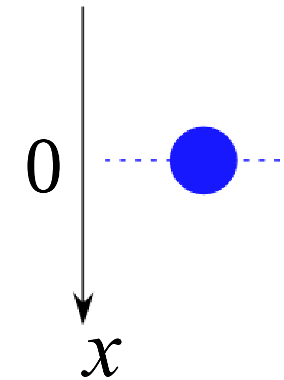
5. バネに質量 m の物体がついている(バネの復元力は f_s とする)



運動方程式～雨滴

例題

質量 m の雨滴が落下する運動を考える。
このとき、空気抵抗が働くものとし、
その空気の抵抗力の大きさは速度に比例し kv とする。
以下の問に答えよ。



(1) 物体に作用する力を書き込め。

(2) この運動の運動方程式を記述せよ。

運動方程式を解くと、速度 $v(t)$ は $v(t)=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$
となる。

(3) $v-t$ グラフを書け。また、原点での傾きを求めよ。

(4) 十分時間が経過した状態の速度を記述せよ。

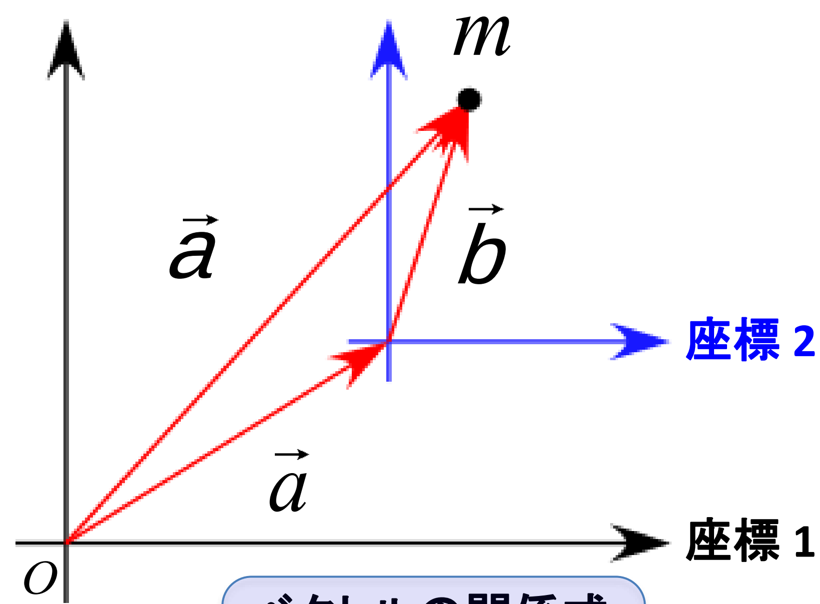
慣性力

静止している座標系：座標 1
動いている座標系：座標 2

$\vec{a}$ ：座標 1 から見た座標 2 の加速度

$\vec{\mathsf{a}}$ ：座標 1 から見た物体の加速度

$\vec{b}$ ：座標 2 から見た物体の加速度



ベクトルの関係式

$$\vec{\mathsf{a}} = \vec{a} + \vec{b}$$

座標 1 から見た物体の運動方程式

$$m\vec{\mathsf{a}} = \vec{F}$$

$$m\left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{F}$$

$$\boxed{m\vec{b}} = \vec{F} \boxed{- \ m\vec{a}}$$

座標 2 から見た運動方程式

見かけの力 (慣性力)

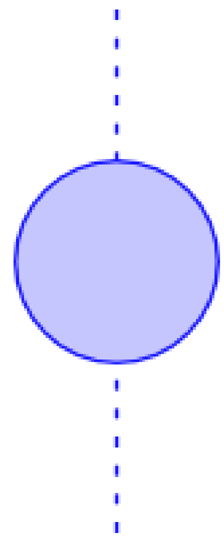
慣性力～エレベータ

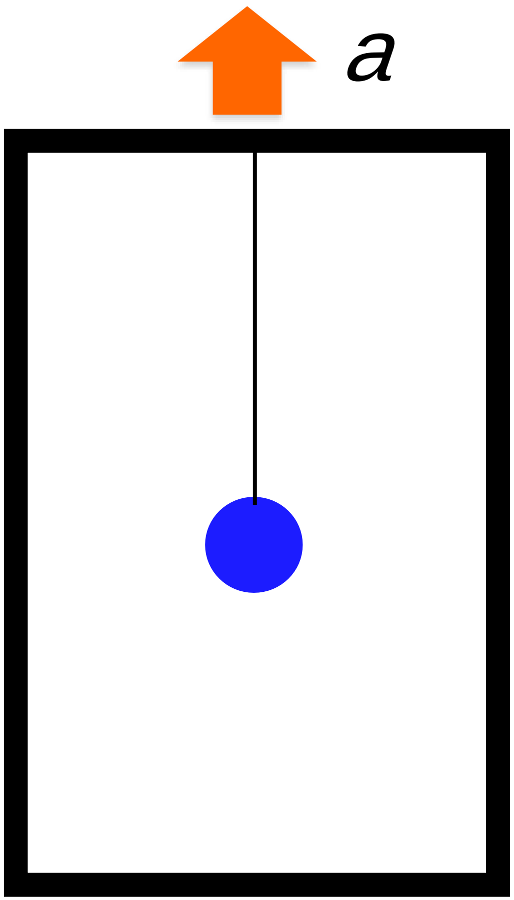
例題

一定の加速度 α で上昇するエレベータがある。
このエレベータ内で質量 m の物体が床から高さ h の位置に糸でつるされている。
以下の問に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること)

1. 物体に作用する力を記入せよ。

2. 糸の張力 T を求めよ。





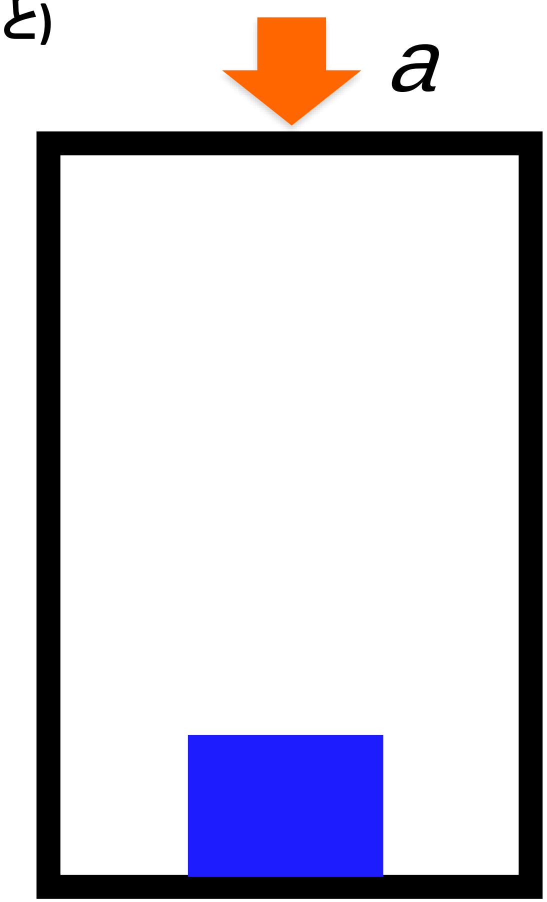
この糸を切ったとする、

3. 物体が床に達するまでの時間 t_1 をもとめよ。

慣性力～エレベータ

例題

一定の加速度 α で下降するエレベータがある。
このエレベータ内に質量 m の物体が床に置かれている。
以下の問に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること)



1. 物体に作用する力を記入せよ。

2. 物体が床から受ける垂直抗力 N を求めよ。

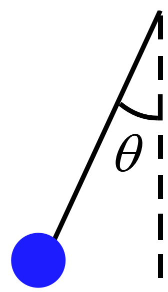
3. 物体が無重量になるための条件を求めよ。

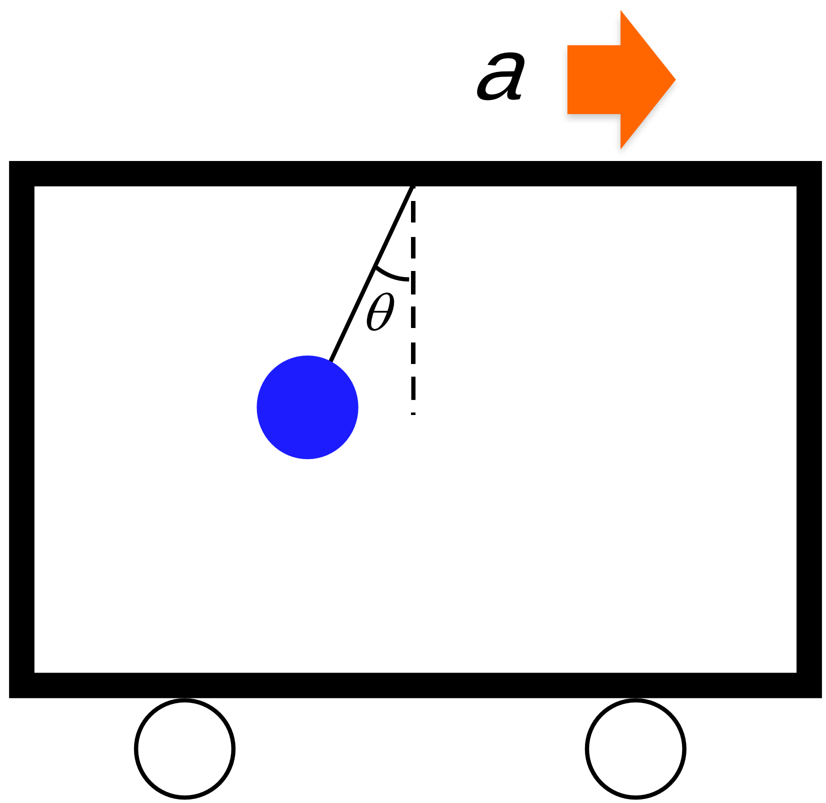
慣性力〜列車

例題

電車が一定の加速度 α で水平右向きに進んでいる。
この電車内に質量 m の物体を天井からつるしたところ
鉛直線と角度 θ をなして維持している。
以下の問に答えよ。(但し、重力加速度は g として用いること)

1. 物体に作用する力を記入せよ。





2. $\tan\theta$ **を表せ。**

3. 糸の張力 T を求めよ。