

# 運動方程式から導かれる関係

運動方程式  $ma = F$

モーメントと角運動量の関係

力積と運動量の関係

仕事とエネルギーの関係

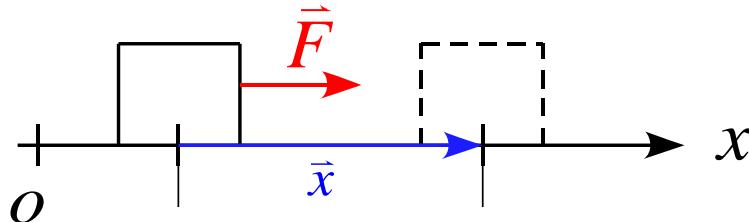
# 仕事の定義～

## 仕事と力の関係

物理における「仕事」=力がする働き



物体に力を加えて、  
物体を移動させる事



## 定義

力  $F$  が物体にした仕事  $W$  (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

と定義される。

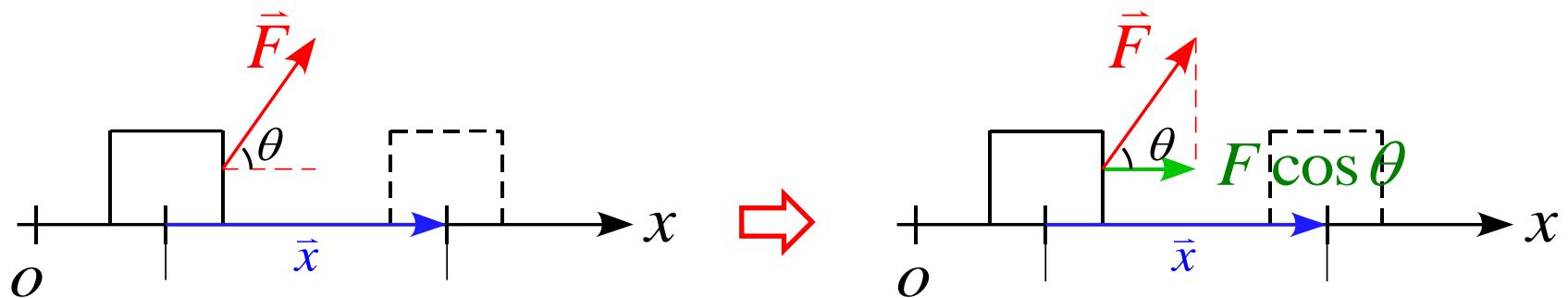
「力  $F$  が物体に仕事  $W$  をした」

「物体は力  $F$  に仕事  $W$  をされた」

## 次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]} [L] = \frac{[L^2 M]}{[T^2]}$$

# 斜め上に引っ張る



力  $\vec{F}$  が物体にした仕事  $W$  は

$$W = F \cos \theta \cdot x$$

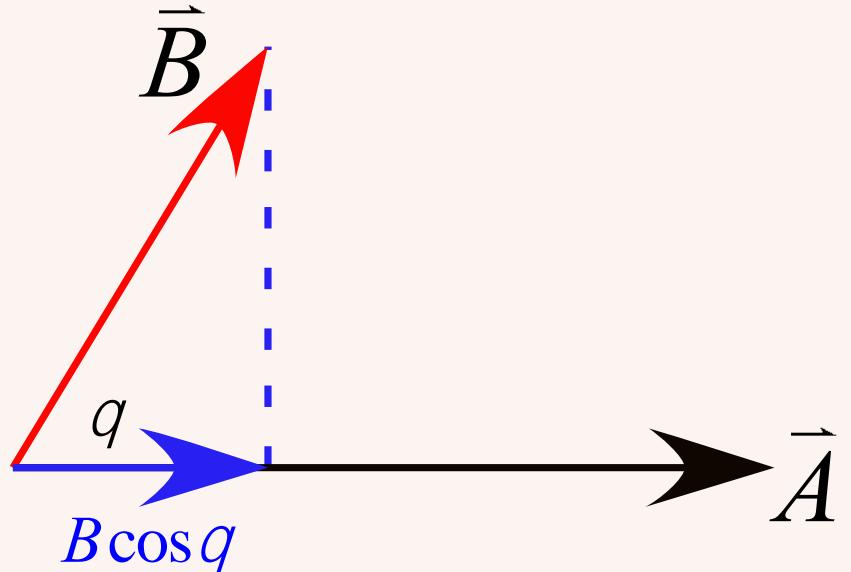
$$= Fx \cos \theta$$

# 仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

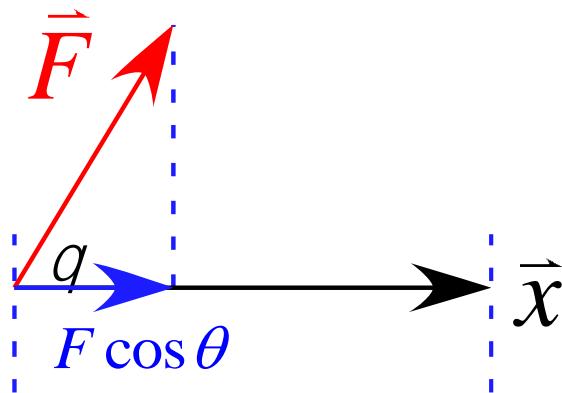


これを仕事に応用すると

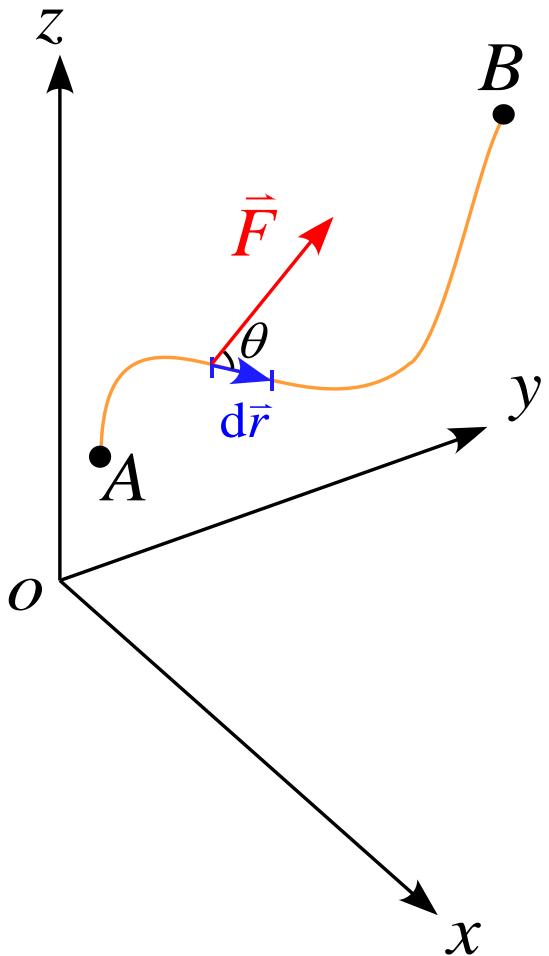
$$\vec{F} \cdot \vec{x} = Fx \cos \theta$$

つまり、

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$$



# 仕事の定義～一般化



微小仕事  $dW$

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cos \theta dr \\ &= \vec{F} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

全仕事  $W$

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

線積分

# 運動方程式からの導出 (3次元空間)

運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

を、 $d\vec{r}$  の内積をとって積分すると

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int m \frac{d}{dt} \left( \frac{\vec{v}^2}{2} \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

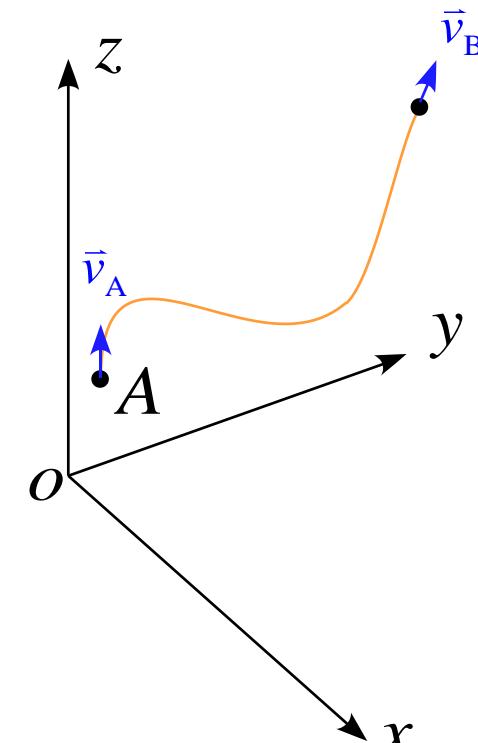
ここで初期条件を

$$\vec{v}(t_A) = v_A$$

$$\vec{v}(t_B) = v_B$$

と設定すると

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \right) dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$\left[ \frac{1}{2} m v^2 \right]_{v(t_A)}^{v(t_B)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

↑  
運動エネルギーの  
変化量  
 $\Delta K$

仕事

# 運動方程式からの導出 (1次元直線)

運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

を、 $x$ で積分すると

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int F dx$$

$$\boxed{\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int F dx}$$

$$\int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int F dx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1$$

$$x(t_1) = x_1$$



$$v(t_2) = v_2$$

$$x(t_2) = x_2$$

A

B

$$t = t_1$$

$$t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

力  $F$  が一定であるとすると

$$\left[ \frac{1}{2} m v^2 \right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = [Fx]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2} m v(t_2)^2 - \frac{1}{2} m v(t_1)^2 = F(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2} = \boxed{F(x_2 - x_1)}$$

運動エネルギーの  
変化

外力の仕事

# 運動方程式からの導出～計算法

3次元(ベクトル)

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$  に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \quad \xleftarrow{\text{元は同じもの}}$$



$$\frac{d}{dt}(\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt}(|\vec{v}| |\vec{v}| \cos \theta) = \frac{d}{dt}(vv \cos 0) = \frac{d}{dt}(v^2)$$



従って、

$$2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

# 運動方程式からの導出～計算法

1次元

$$\int m \boxed{\frac{dv}{dt}} v dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt$$

$\frac{dv}{dt} v$  に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt} (vv) = \frac{dv}{dt} v + v \frac{dv}{dt} = 2 \frac{dv}{dt} v$$



$$\frac{d}{dt} (v^2) \quad \text{元は同じもの}$$

従って、

$$2 \frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} (v^2)$$

$$\frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} v^2 \right)$$

# 仕事率

## 定義

仕事率: 単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{D\bar{W}}{Dt}$$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

国際単位: ワット [W = J / s]

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

## 次元

$$[M] \frac{[L]}{[T^2]} [L] \frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

## 瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事  $dW$  は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

# エネルギー

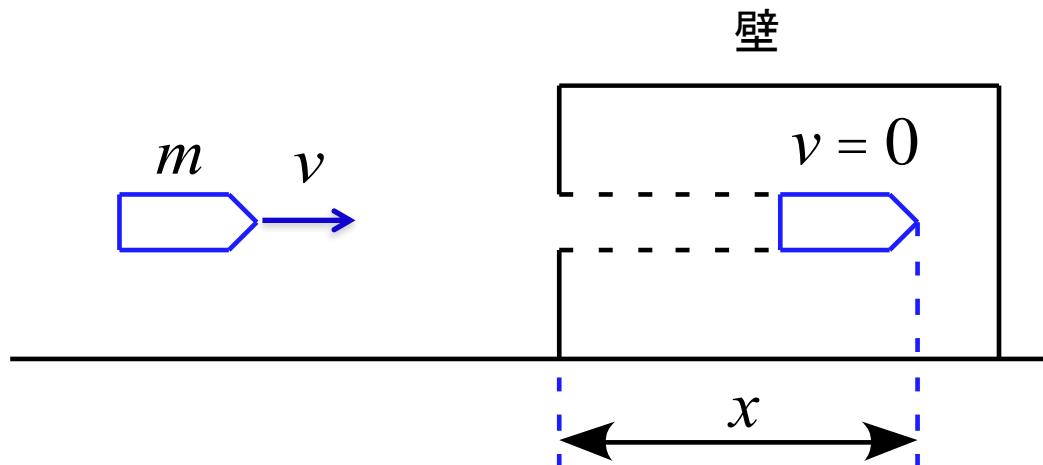
ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし仕事をする能力をもつとき、その物体はエネルギーを持っているという



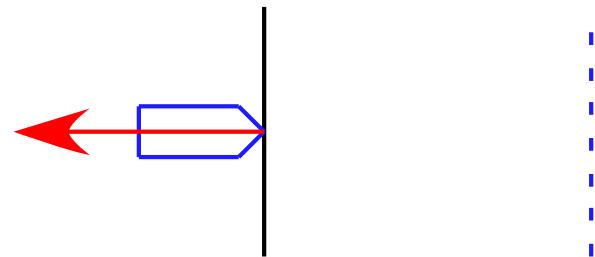
仕事をする能力 = エネルギー

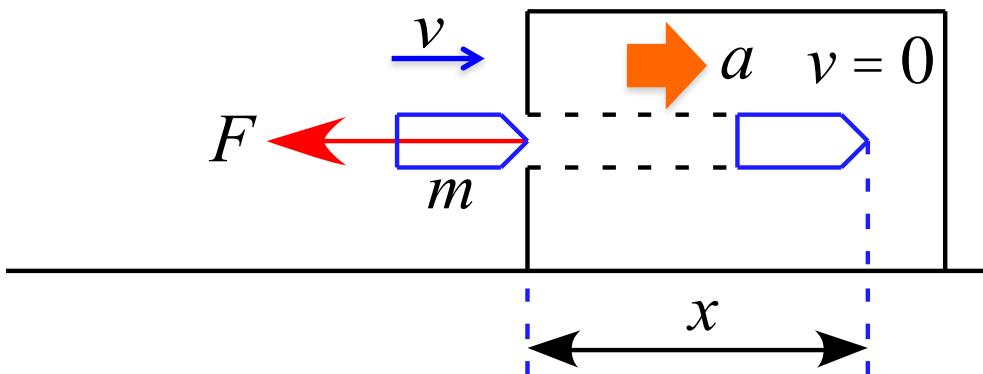
例

質量  $m$  の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力  $F$  が一定とすると  
この運動は等加速度運動と考えることができる





水平方向の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -F$$

となる。両辺を  $x$  で積分すると

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (-F) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (-F) dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int (-F) dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int_0^x (-F) dx$$

$$\left[ \frac{1}{2} mv^2 \right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} = [-Fx]_0^x$$

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 - \frac{1}{2} mv^2 = -Fx + F \cdot 0$$

# エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot v^2 = -Fx$$

最後の運動能力

最初の運動能力

弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [J = kg\ m^2/s^2]$$

次元

$$[M] \left( \frac{[L]}{[T]} \right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

# エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

基準から力  $F$  で  $x = 0$  から  $x = h$  まで持ち上げたとする

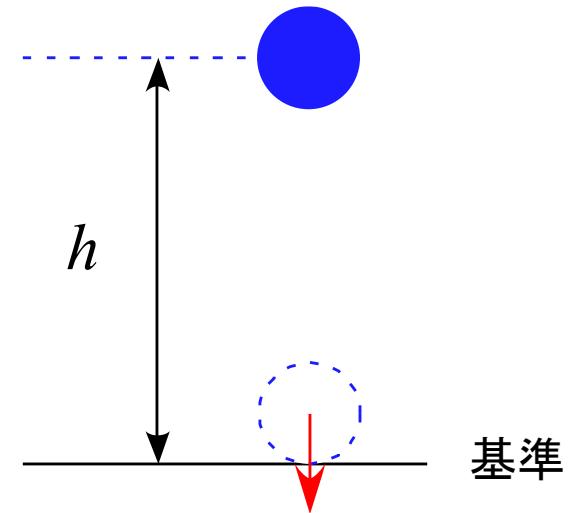
運動方程式は

$$ma = F - mg$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - mg$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (F - mg) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (F - mg) dx$$



$$\boxed{\int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt} = \boxed{\int (F - mg) dx}$$

運動エネルギーの  
変化

外力の仕事

# エネルギー～位置エネルギー

準静的に持ち上げたとすると

$$\left[ \frac{1}{2}mv^2 \right]_0^h = \int_0^h (F - mg) dx$$

$$0 = \int_0^h F dx + \int_0^h (-mg) dx$$

$$\int_0^h mg dx = \int_0^h F dx$$

$$[mgx]_0^h = \int_0^h F dx$$

$$mgh = \int_0^h F dx$$

重力による  
位置エネルギー

持ち上げた  
仕事

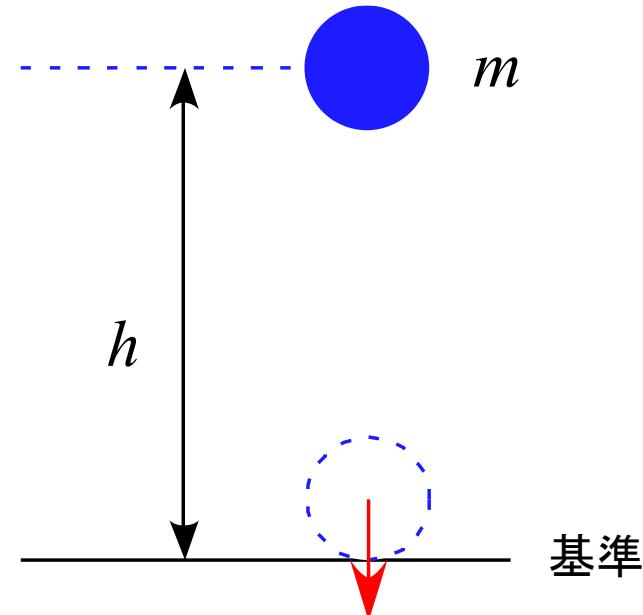
# エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

重力  $mg$  に逆らって  $h$  だけ持ち上げた  
下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

$$U = mgh \quad [J = kg \cdot m^2 / s^2]$$

基準からの高さに比例

次元

$$[M] \frac{[L]}{[T^2]} [L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

# エネルギー～自由落下

自由落下

運動方程式は

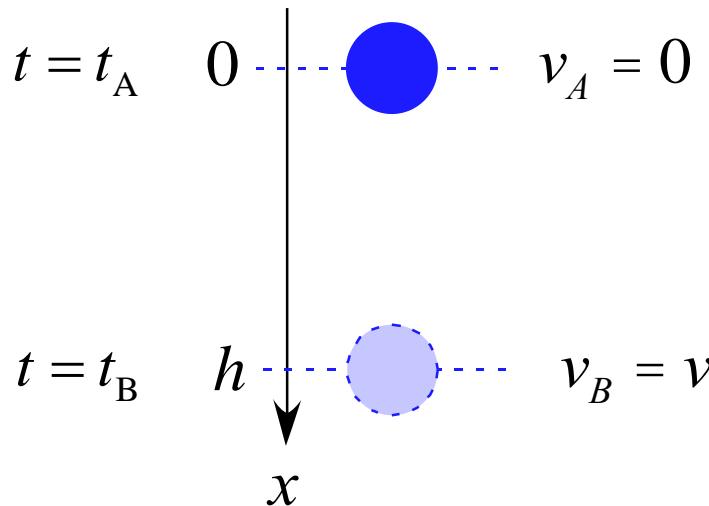
$$ma = mg$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int mg dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int mg dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int mg dx$$



# エネルギー～自由落下

$$\left[ \frac{1}{2}mv^2 \right]_{v_A}^{v_B} = [mgh]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh - mg \cdot 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2$$

$$= mgh$$

運動エネルギーの  
変化

外力の仕事

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-mgh) = 0$$

運動エネルギー

位置エネルギー

# エネルギー保存則

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-mgh) = 0$$

(重力場の運動)

# 運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に  $v = \frac{dx}{dt}$  をかけると

$$m v \frac{dv}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = F \frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1$$

$$x(t_1) = 0$$

$$v(t_2) = v_2$$

$$x(t_2) = x$$



$$t = t_1$$

$$t = t_2$$

と設定する

$t$  で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

$$\left[ \frac{1}{2} m v^2 \right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \int_0^x F dx$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_0^x F dx$$

運動エネルギーの  
変化量

$x = 0$  から  $x$  まで  
物体に働く力  $F$  がした仕事

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

# 運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$  をかける → 単位時間あたりの変位をかけた

$$m v \frac{dv}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの仕事とエネルギーの関係式

$t$  で積分する → 最初から最後まで時間に対して和を取る

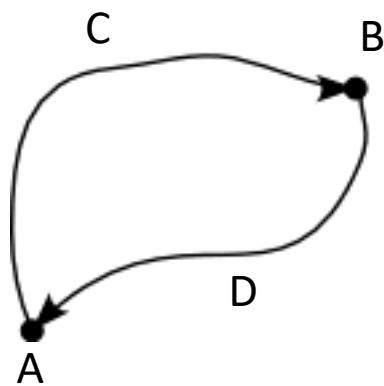
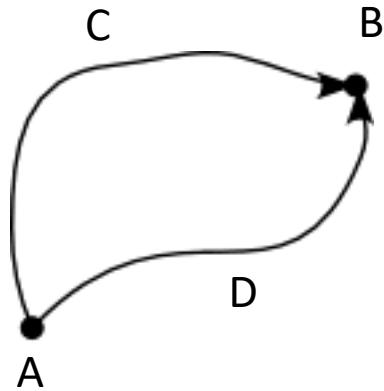
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

最初と最後のエネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

# 保存力

保存力での経路



点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える

ここで運動が**保存力による運動**とすると

点A - C - 点Bの経路を通り、  
そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A - D - 点Bの経路を通り、同じ道を通って  
点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

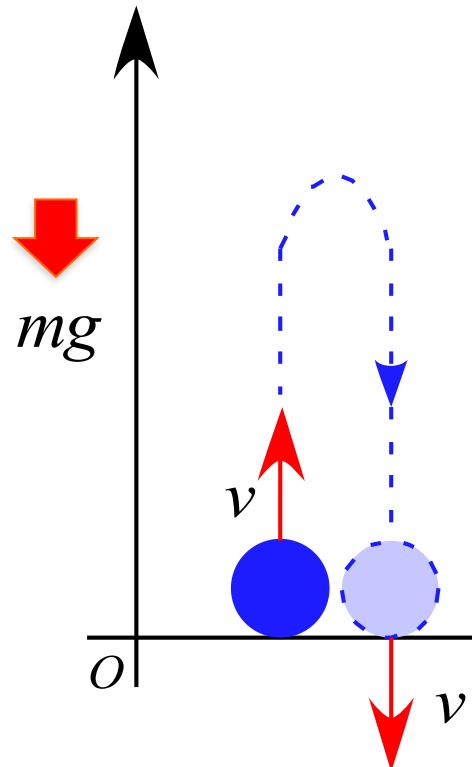
よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

**保存力のする仕事は移動経路によらない**

# 保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える



鉛直投げ上げ運動  
この運動における仕事は

$$W = \int_0^0 F dx = \int_0^0 (-mg) dx = 0$$

元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる



保存力

# エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動

運動方程式は

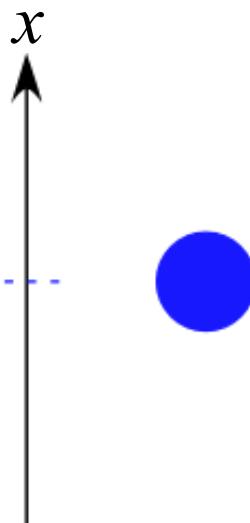
$$m \frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に  $v = \frac{dx}{dt}$  をかけると

$$m v \frac{dv}{dt} = -mg \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d}{dt} (-mgx)$$



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 + mgx \right) = 0$$

となる

よって、 $\frac{1}{2} mv^2 + mgx$  は時間に対して  
変化しない一定量

$$\frac{1}{2} mv^2 + mgx = \text{一定}$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が  
一定であるからエネルギー保存則が  
成り立っている。

# エネルギー保存則～バネの単振動

バネの単振動

運動方程式は

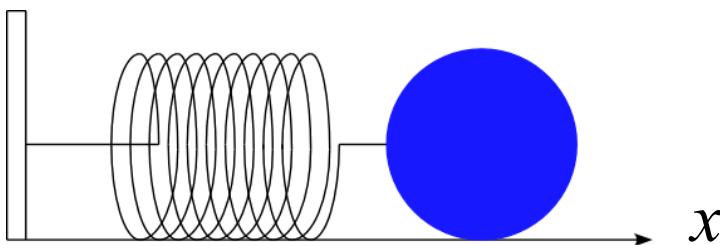
$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に  $v = \frac{dx}{dt}$  をかけると

$$m v \frac{dv}{dt} = -kx \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( -\frac{1}{2} kx^2 \right)$$



(摩擦力なし)

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$$

となる

よって、 $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$  は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{一定}$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

# 仕事とエネルギー～例題

水平面とのなす角  $\theta$  の摩擦がある斜面を質量  $m$  の物体がすべり下りる運動を考える。以下の問いに答えよ。

但し、動摩擦力は  $f = \mu_k N$  として用いてよいとする。

(1) この運動の運動方程式を記述せよ。

(2) この運動の加速度  $a$  を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

時刻  $t_1$  で物体が距離  $L$  を移動したとする。

(3) 運動方程式の両辺を  $x$  で積分し、仕事とエネルギーの関係式を導け。

$v(0) = v_0, x(0) = 0, v(t_1) = v_1, x(t_1) = L$  とする。

(4) 動摩擦力がした仕事  $W_{\text{摩}}$  を求めよ。