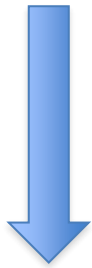


運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $ma = F$



モーメントと角運動量の関係



力積と運動量の関係



仕事とエネルギーの関係

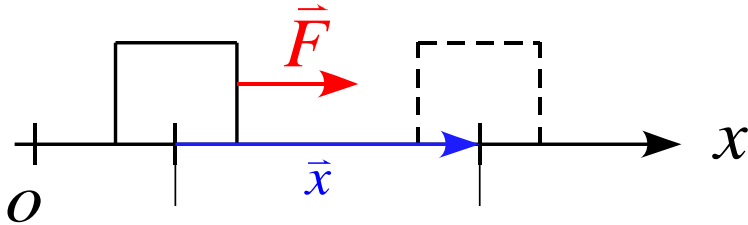
仕事の定義～

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き



物体に力を加えて、
物体を移動させる事



定義

力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

と定義される。

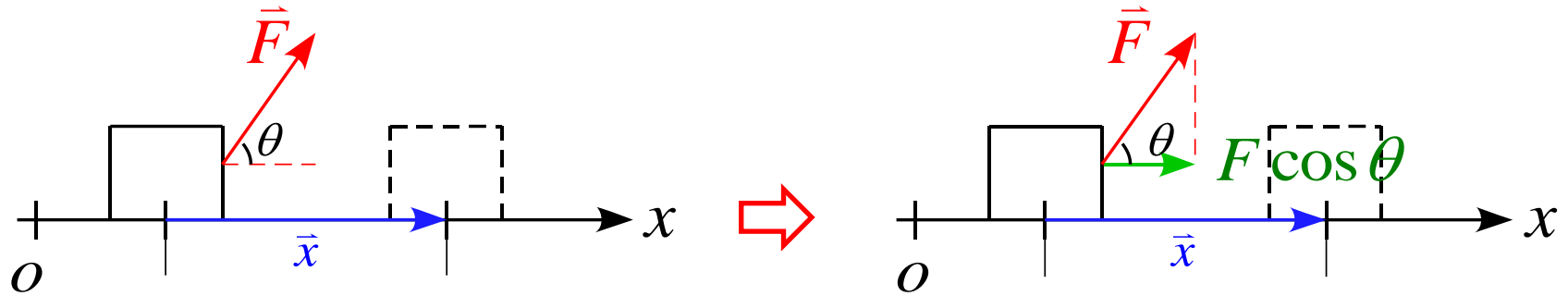
「力 F が物体に仕事 W をした」

「物体は力 F に仕事 W をされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]} [L] = \frac{[L^2 M]}{[T^2]}$$

斜め上に引っ張る



力 \vec{F} が物体にした仕事 W は

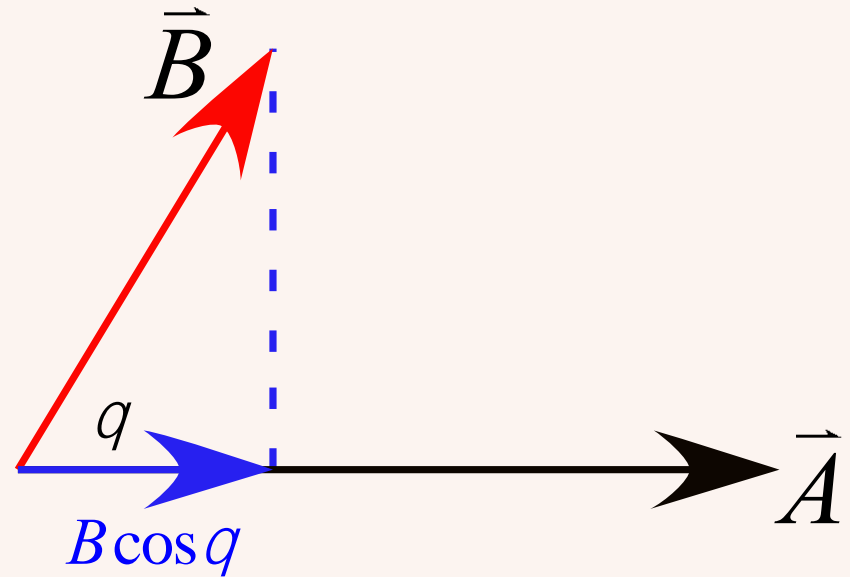
$$\begin{aligned} W &= F \cos \theta \cdot x \\ &= Fx \cos \theta \end{aligned}$$

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

$$\vec{A} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \theta$$

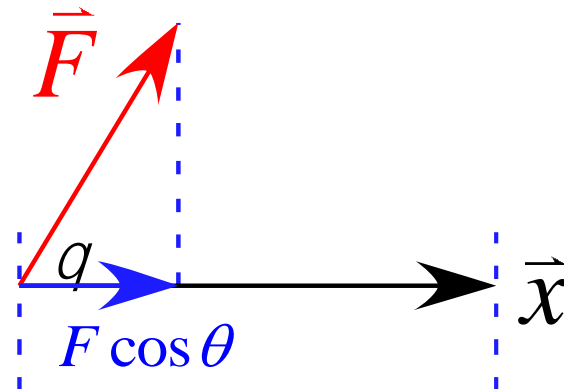


これを仕事に応用すると

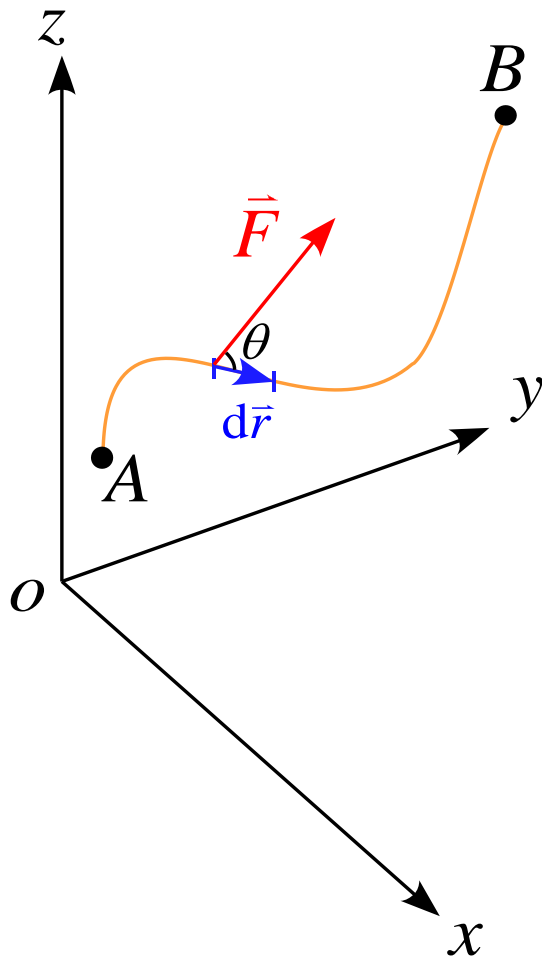
$$\vec{F} \cdot \vec{x} = Fx \cos \theta$$

つまり、

$$W = \vec{F} \cdot \vec{x}$$



仕事の定義～一般化



微小仕事 dW

$$dW = F \cos \theta dr$$

$$= \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

全仕事 W

$$W = \int_c \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

線積分

運動方程式からの導出 (3次元空間)

運動方程式

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

を、 $d\vec{r}$ の内積をとって積分すると

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

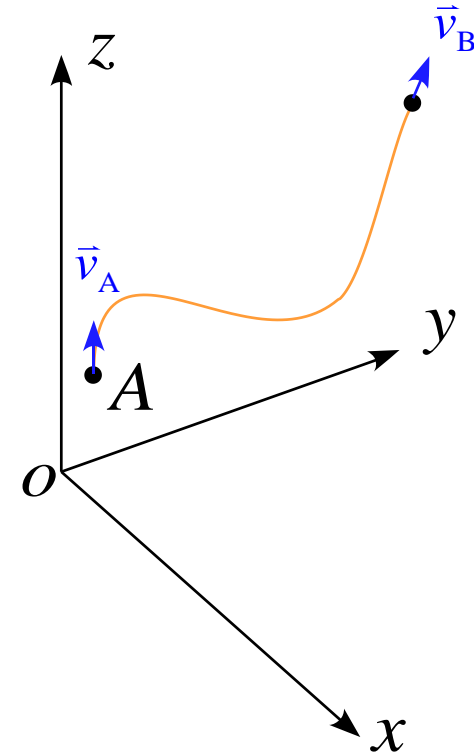
$$\int m \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

ここで初期条件を

$$\vec{v}(t_A) = \vec{v}_A$$

$$\vec{v}(t_B) = \vec{v}_B$$



と設定すると

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_{v(t_A)}^{v(t_B)} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



運動エネルギーの
変化量

ΔK

仕事

運動方程式からの導出 (1次元直線)

運動方程式

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

を、 x で積分すると

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int F dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int F dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int F dx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1$$

$$v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1$$

$$x(t_2) = x_2$$



と設定すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

力 F が一定であるとする

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = [Fx]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2 = F(x_2 - x_1)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} = \boxed{F(x_2 - x_1)}$$

運動エネルギーの
変化

外力の仕事

運動方程式からの導出 ～ 計算法

3次元(ベクトル)

$$\int m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$ に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \quad \leftarrow \text{元は同じもの}$$

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot \vec{v}) = \frac{d}{dt} (|\vec{v}| |\vec{v}| \cos \theta) = \frac{d}{dt} (v v \cos 0) = \frac{d}{dt} (v^2)$$

従って、

$$2 \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} (v^2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

運動方程式からの導出 ～ 計算法

1次元

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt$$

$\frac{dv}{dt} v$ に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt} (v v) = \frac{dv}{dt} v + v \frac{dv}{dt} = 2 \frac{dv}{dt} v$$



$$\frac{d}{dt} (v^2)$$

元は同じもの

従って、

$$2 \frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} (v^2)$$

$$\frac{dv}{dt} v = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right)$$

仕事率

定義

仕事率：単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{DW}{Dt}$$

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

国際単位：ワット [W = J / s]

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M] \frac{[L]}{[T^2]} [L] \frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

エネルギー

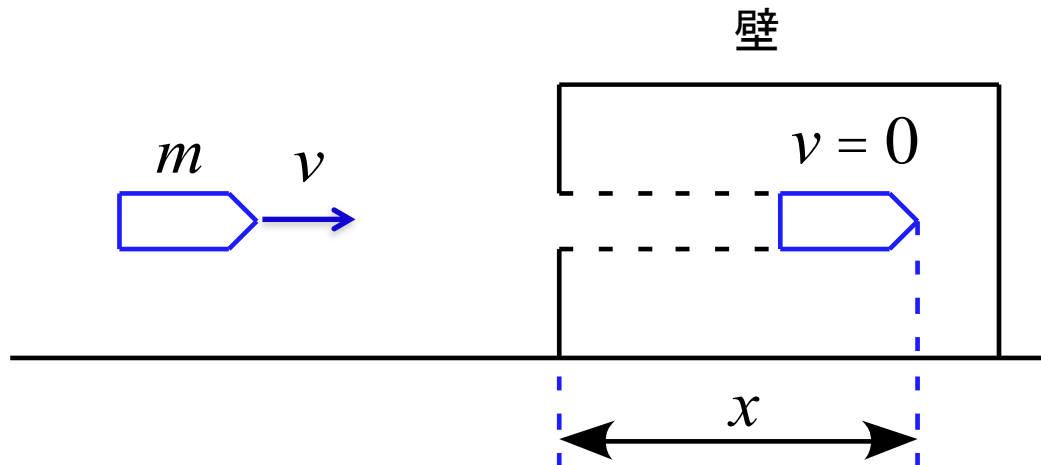
ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという



仕事をする能力＝エネルギー

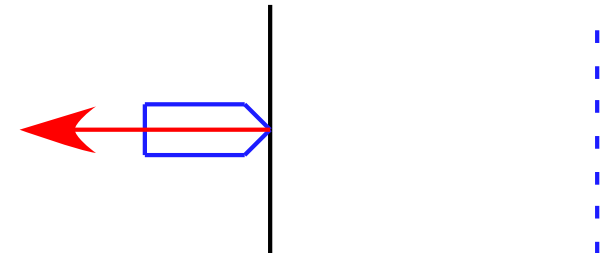
例

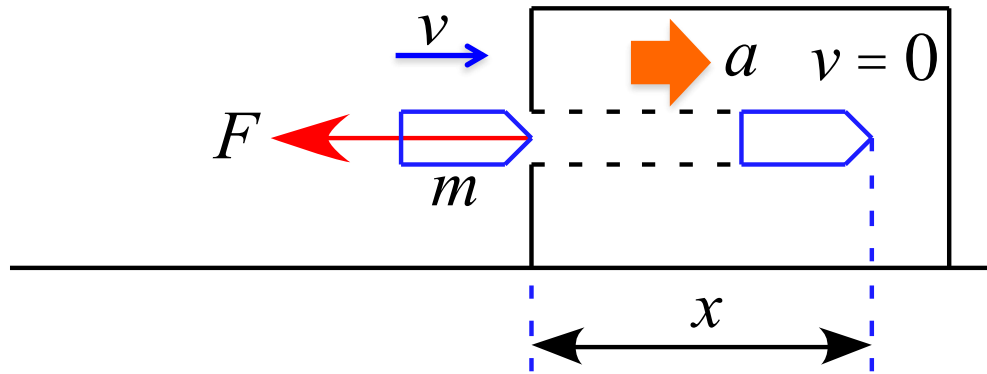
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





水平方向の運動方程式は

$$m \frac{dv}{dt} = -F$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (-F) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (-F) dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int (-F) dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_0^x (-F) dx$$

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} = [-Fx]_0^x$$

$$\frac{1}{2} m \cdot 0^2 - \frac{1}{2} m v^2 = -Fx + F \cdot 0$$

エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\frac{1}{2}m \cdot 0^2 - \frac{1}{2}m \cdot v^2 = -Fx$$

最後の運動能力

最初の運動能力

弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad [J = \text{kg m}^2 / \text{s}^2]$$

次元

$$[M] \left(\frac{[L]}{[T]} \right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

基準から力 F で $x = 0$ から $x = h$ まで持ち上げたとする

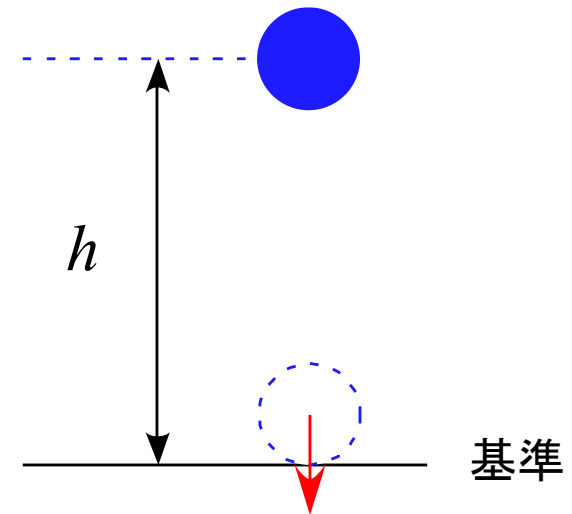
運動方程式は

$$ma = F - mg$$

$$m \frac{dv}{dt} = F - mg$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (F - mg) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (F - mg) dx$$



$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int (F - mg) dx$$

運動エネルギーの
変化

外力の仕事

エネルギー～位置エネルギー

準静的に持ち上げたとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_0^0 = \int_0^h (F - mg) dx$$

$$0 = \int_0^h F dx + \int_0^h (-mg) dx$$

$$\int_0^h mg dx = \int_0^h F dx$$

$$\left[mgx \right]_0^h = \int_0^h F dx$$

$$mgh = \int_0^h F dx$$

重力による
位置エネルギー

持ち上げた
仕事

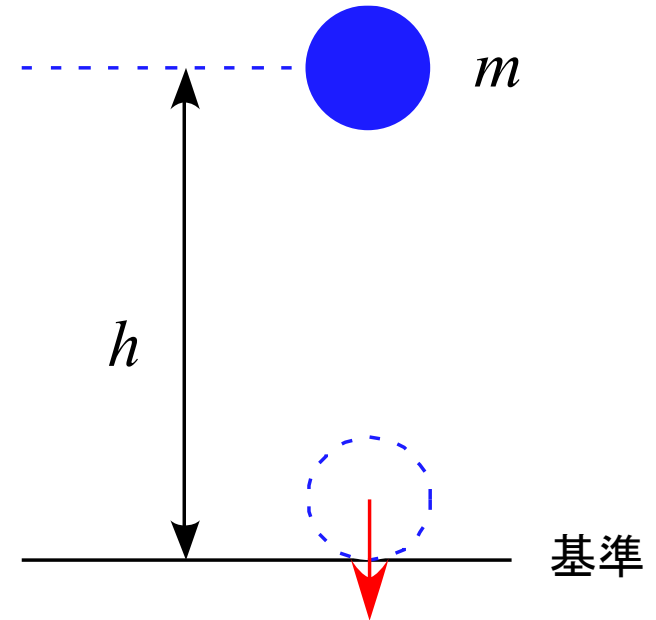
エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた
下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

$$U = mgh \quad [\text{J} = \text{kg m}^2 / \text{s}^2]$$

基準からの高さに比例

次元

$$[M] \frac{[L]}{[T^2]} [L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

エネルギー～自由落下

自由落下

運動方程式は

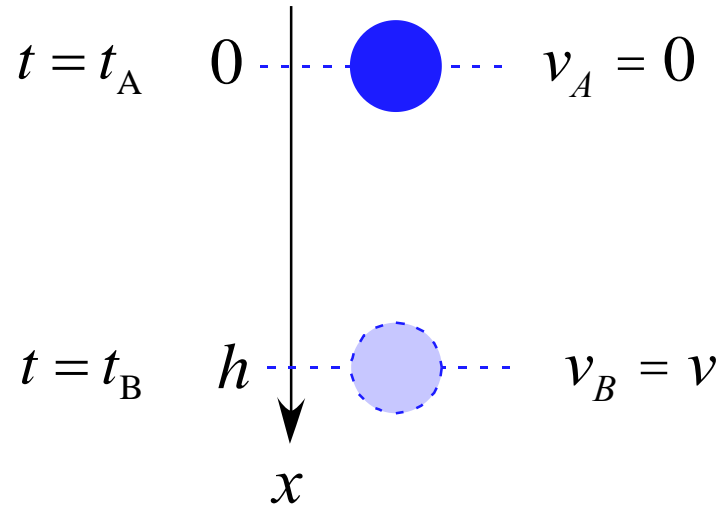
$$ma = mg$$

$$m \frac{dv}{dt} = mg$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int mg dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int mg dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int mg dx$$



エネルギー～自由落下

$$\left[\frac{1}{2}mv^2 \right]_{v_A}^{v_B} = [mgx]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m \cdot 0^2 = mgh - mg \cdot 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2} = \boxed{mgh}$$

運動エネルギーの
変化

外力の仕事

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-mgh) = 0$$

運動エネルギー 位置エネルギー

エネルギー保存則

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-mgh) = 0$$

(重力場の運動)

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$m \mathbf{v} \frac{dv}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = F \frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1$$

$$x(t_1) = 0$$

$$v(t_2) = v_2$$

$$x(t_2) = x$$



と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

$$\left[\frac{1}{2} m v^2 \right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \int_0^x F dx$$

$$\frac{1}{2} m v_2^2 - \frac{1}{2} m v_1^2 = \int_0^x F dx$$

運動エネルギーの
変化量

$x = 0$ から x まで
物体に働く力 F がした仕事


運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$ をかける  単位時間あたりの変位をかけた

$$m \mathbf{v} \frac{dv}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する  最初から最後まで時間に対して和を取る

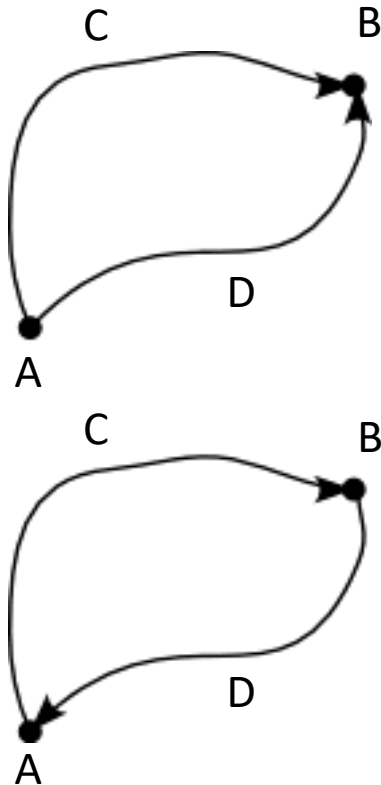
$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} F \frac{dx}{dt} dt$$

最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路



点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える
 ここでの運動が**保存力による運動**とすると

点A - C - 点Bの経路を通り、
 そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A - D - 点Bの経路を通り、同じ道を通って
 点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える

鉛直投げ上げ運動

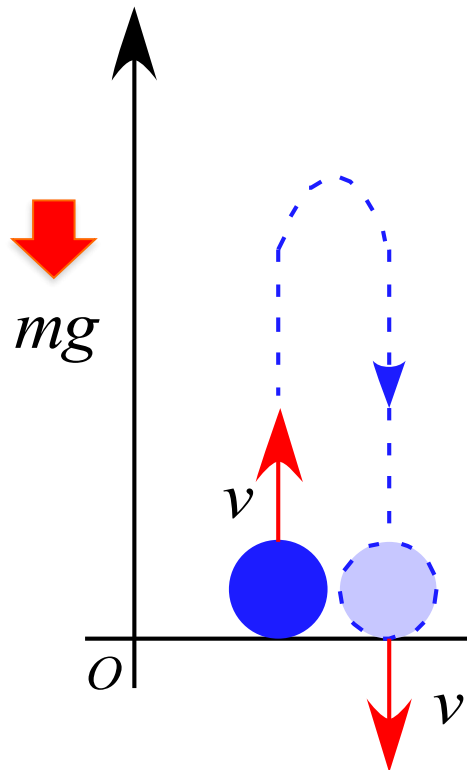
この運動における仕事は

$$W = \int_0^0 F dx = \int_0^0 (-mg) dx = 0$$

元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる



保存力



エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動

運動方程式は

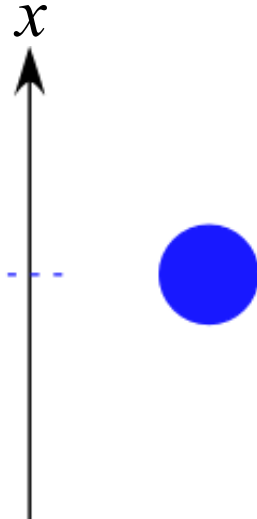
$$m \frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$m v \frac{dv}{dt} = -mg \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{d}{dt} (-mgx)$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 + mgx \right) = 0$$

となる
よって、 $\frac{1}{2} m v^2 + mgx$ は時間に対して
変化しない一定量

$$\frac{1}{2} m v^2 + mgx = \text{一定}$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が
一定であるからエネルギー保存則が
成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

(摩擦なし)

バネの単振動

運動方程式は

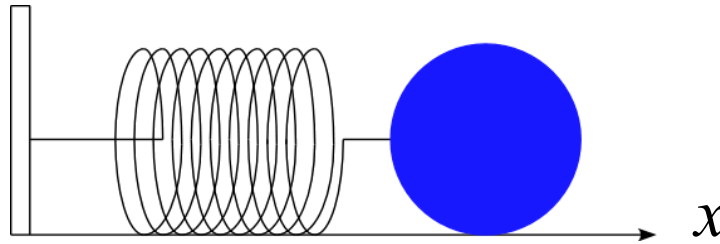
$$m \frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv \frac{dv}{dt} = -kx \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d}{dt} \left(-\frac{1}{2} kx^2 \right)$$



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = 0$$

となる

よって、 $\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$ は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{一定}$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

仕事とエネルギー～例題

水平面とのなす角 θ の摩擦がある斜面を質量 m の物体がすべり下りる運動を考える。以下の問いに答えよ。

但し、動摩擦力は $f = \mu_k N$ として用いてよいとする。

(1) この運動の運動方程式を記述せよ。

(2) この運動の加速度 a を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

時刻 t_1 で物体が距離 L を移動したとする。

(3) 運動方程式の両辺を x で積分し、仕事とエネルギーの関係式を導け。

$v(0) = v_0, x(0) = 0, v(t_1) = v_1, x(t_1) = L$ とする。

(4) 動摩擦力がした仕事 $W_{\text{摩}}$ を求めよ。