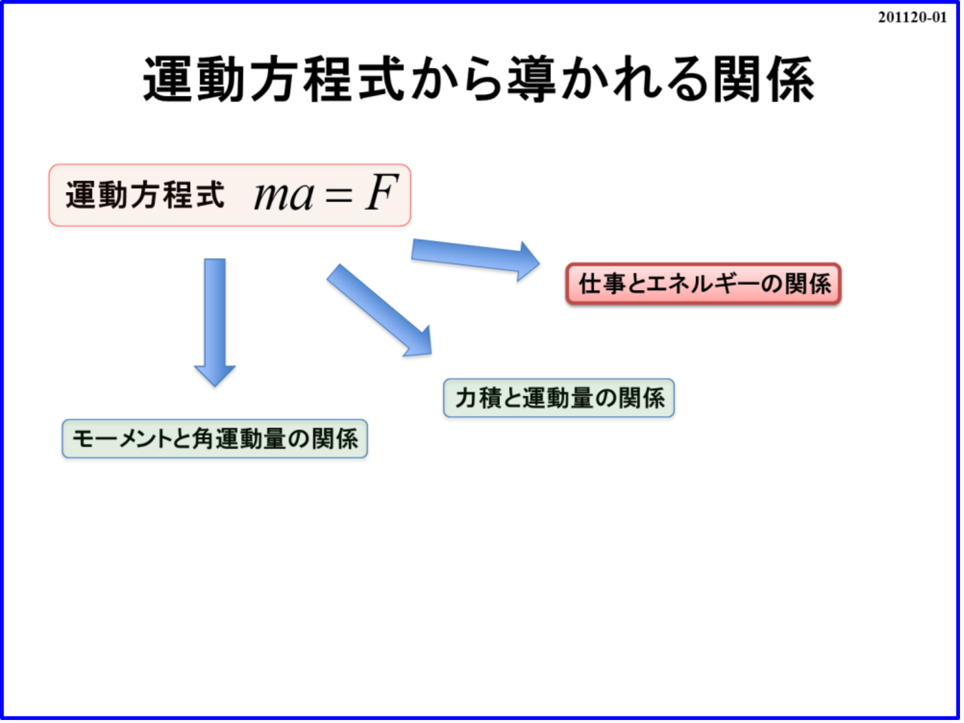


今回からは「**運動方程式から導かれる関係**」について解説していきます。
スライドには運動方程式から導かれる3種類の関係を記述しています。
この3種類の関係式を学び終わった後、さらに運動方程式の重要さとニュートンさんの偉大さを感じられると思います。
改めて「**力学は運動方程式である**」と感じることと思います。

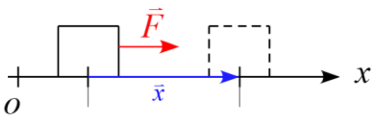
そこで今回は「**仕事とエネルギーの関係**」について説明します。
残りの2つは次回と次々回に扱う予定です。

201120-02

仕事の定義～

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き → 物体に力を加えて、物体を移動させる事



定義

力 F が物体にした仕事 W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

と定義される。

「力 F が物体に仕事 W をした」

「物体は力 F に仕事 W をされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]}[L] = \frac{[L^2M]}{[T^2]}$$

一般的に使われている「仕事」とは異なり、物理では「力がする働き」を「仕事」と言います。
詳しく言うと「物体に力を加えて物体を移動させること」を「仕事」とします。
従って、「力 $\vec{F}$ 」と「変位 $\vec{x}$ 」が重要になります。

図の様な直線上を物体に力 $\vec{F}$ を加えて変位 $\vec{x}$ させたとします。
このとき、の仕事 W は

$$W = |\vec{F}||\vec{x}| = Fx$$

と表します。
この仕事は「力 $\vec{F}$ が物体に仕事 W した」や「物体は力 $\vec{F}$ に仕事 W をされた」と言われます

仕事の次元は

$$\left[\frac{ML}{T^2}\right]\left[L\right]=\left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$$ となります。

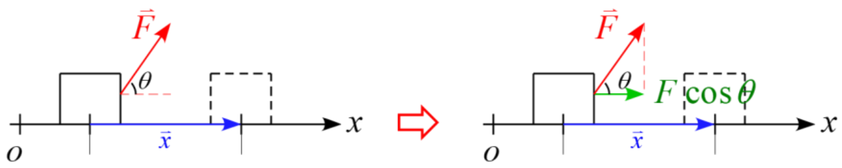
($\vec{F}$ の次元) ($\vec{x}$ の次元)

仕事の単位「J ジュール」をMKS単位系で表すと

$$\mathrm{J=Nm=kg\,{}^{m}\!/\!{}_{s^2}\cdot m=kg\,{}^{m^2}\!/\!{}_{s^2}}$$

となります。

斜め上に引っ張る



力 $\vec{F}$ が物体にした仕事 W は

$$W = F\cos\theta \cdot x$$
$$= Fx\cos\theta$$

前のスライドの例では作用する力が x 軸に沿っていましたが、
このスライドの例は作用する力が軸に対して角度 θ を持っています。
この場合の仕事はどう扱うかと言えば、
仕事の大原則として「移動方向と同じ成分の力しか仕事とみなされない」ことになっています。

従って、この図の場合は「力 $\vec{F}$ の x 軸に沿った成分」を
取り出しその成分を仕事の力とします。
従って仕事 W は

$$W = F\cos\theta \cdot x = Fx\cos\theta$$

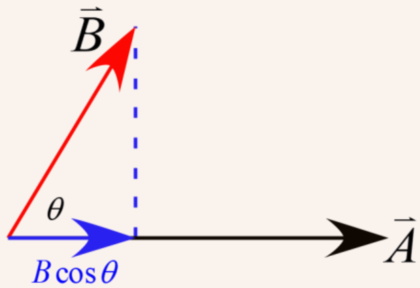
となります。

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

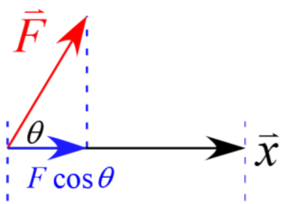


これを仕事に応用すると

$$\vec{F}\cdot\vec{x} = Fx\cos\theta$$

つまり、

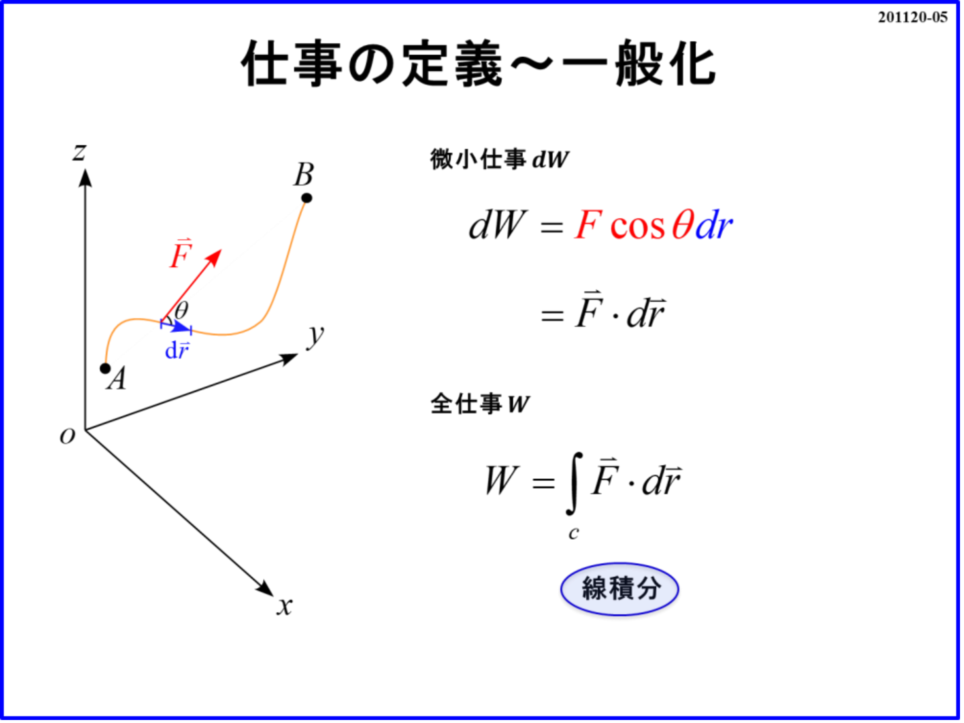
$$W = \vec{F}\cdot\vec{x}$$



ここで、初回授業のベクトルの内積を思い出してください。
この2つの状態を一つで表すのに役立つのが「内積」になります。

$$W = \vec{F}\cdot\vec{x} = |\vec{F}||\vec{x}|\cos\theta$$

となります。この式を「仕事の定義」とします
この式の有用なことは、仕事の正負はなす角 θ で決まるところになります。
変位 $\vec{x}$ と力 $\vec{F}$ のなす角 θ が 0° から 90° の間は $\cos\theta$ の値は正であり、
90° から 270° の間は $\cos\theta$ の値は負であり、
270° から 360° の間は $\cos\theta$ の値が正となります。
従って、「負の仕事はどうだったか？」と悩むこと無く、
変位 $\vec{x}$ と力 $\vec{F}$ のなす角 θ だけ着目すれば良いことになります。



微小部分を考えて積分する手法は物理でよく使います

ここで、仕事を3次元空間に拡張して考えてみましょう。

点AB 間のある場所での微小変位 $d\vec{r}$ を考え、その間、力 $\vec{F}$ が作用していたと考えます。
このときの微小仕事 dW は

$$dW = F\cos\theta dr = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

となります。
これをAB間すべてについて行えばよく、これは移動した曲線に沿っての積分になります。

$$W = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

この様な積分を「線積分」と呼びます。

運動方程式からの導出 (3次元空間)

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

を、$d\vec{r}$ の内積をとって積分すると

$$\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r}=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}dt=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

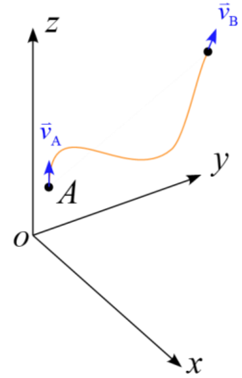
$$\int m\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)dt=\int F\cdot d\vec{r}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int F\cdot d\vec{r}$$

ここで初期条件を

$$\vec{v}(t_{\mathrm{A}})=v_{\mathrm{A}}$$

$$\vec{v}(t_{\mathrm{B}})=v_{\mathrm{B}}$$



と設定すると

$$\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

さて、それでは本題に入ります。
運動方程式から「仕事とエネルギーの関係式」を導いて行きましょう。

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}$$

の両辺に $d\vec{r}$ の内積を取って積分します。

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \underbrace{\vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{微小仕事}}$$

この時点で右辺は前のスライドの微小仕事に相当しています。
これを全区間に対して足し合わせる、即ち、積分することになります。

$$\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

ここで速度の定義 $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ より

$$\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}dt = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

と書き換えられます。
更に左辺を「$\frac{d}{dt}$(　　)の形」でまとめると

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

となります。

ここで、何故「$\frac{d}{dt}(\quad)$の形」でまとめるかと言えば、
物理では「時間変化」が重要になります。
従って、時間の微分の形でまとめておけば
その「まとめられた量は物理的に意味のある量」になります。
ここでまとめられている量である「$\frac{1}{2}mv^2$」は「運動エネルギー K」と呼ばれる
物理量になります。
だから、質問で「何で運動エネルギーは$\frac{1}{2}mv^2$と表すのですか？」という問いにの回答は
「運動方程式を変形し、時間微分の形を作った結果$\frac{1}{2}mv^2$となった」と言える訳です。

この式変形については後のスライドで解説します。

話を運動方程式に戻します。

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

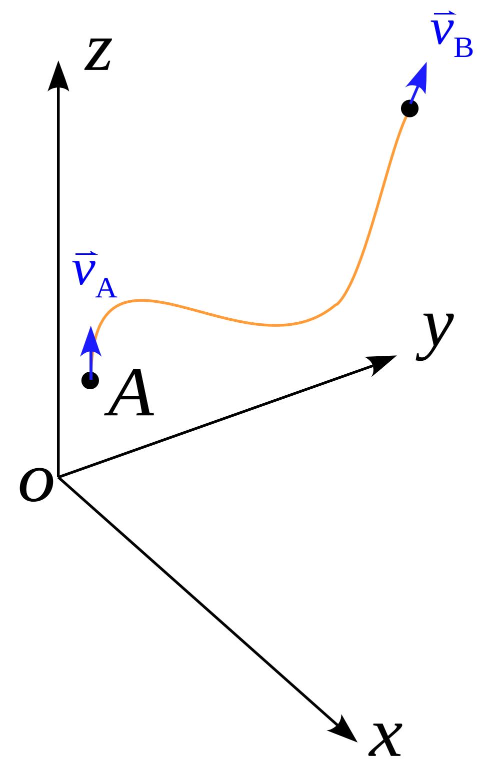
ここで初期条件として

$$\vec{v}(t_\mathrm{A}) = v_\mathrm{A}$$

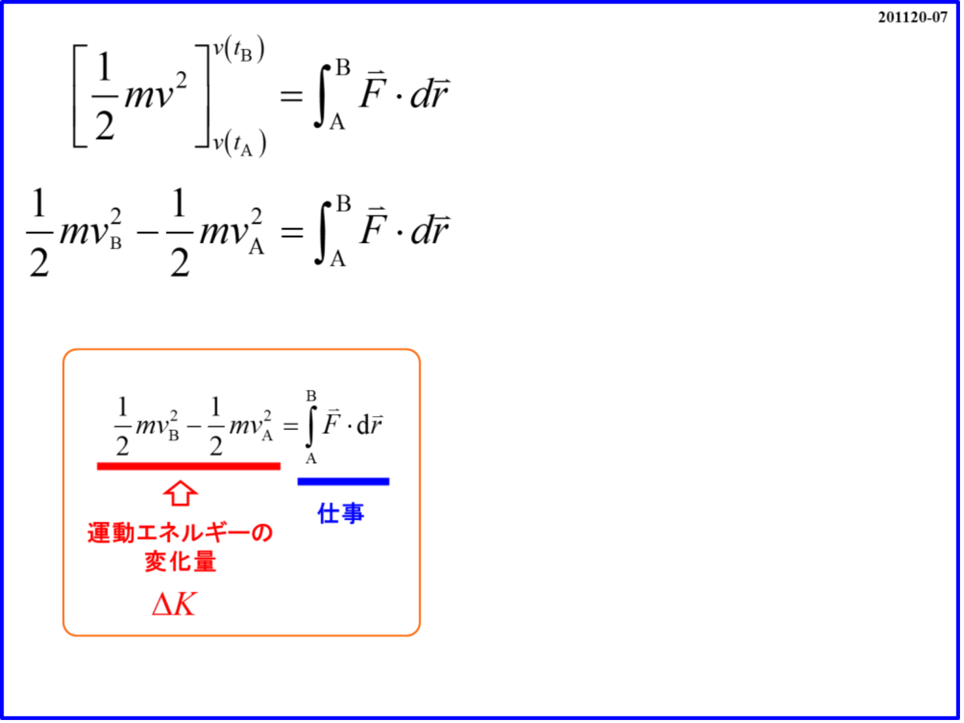
$$\vec{v}(t_\mathrm{B}) = v_\mathrm{B}$$

と設定すると、この積分は

$$\underbrace{\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt}_{\text{運動エネルギーの変化量 }\Delta K} = \underbrace{\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{外力の仕事}}$$



となります。



積分を進めると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_\mathrm{A})}^{v(t_\mathrm{B})} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_\mathrm{A}}^{v_\mathrm{B}} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2}_{\text{運動エネルギーの変化量 }\Delta K} = \underbrace{\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{外力の仕事}}$$

となります。
この式が「仕事とエネルギーの関係式」になります。

運動方程式からの導出 (1次元直線)

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を、xで積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int \boxed{m\frac{dv}{dt}} v dt = \int Fdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int Fdx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

前のスライドで一般的な3次元での導出を行いました。
しかし、多くの場合は1次元に落とし込んで考えることになります。
つまり、これまでと同様に「軸ごとに考えれば良い」ことになります。
そこで、ここでは1次元(x 軸)として扱ってみましょう。

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

の両辺を x で積分します。

よって

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int F dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}v dt = \int F dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int F dx$$

となります。
初期条件
$\boldsymbol{t = t_1}$ で $\boldsymbol{x(t_1) = x_1, v(t_1) = v_1}$
$\boldsymbol{t = t_2}$ で $\boldsymbol{x(t_2) = x_2, v(t_2) = v_2}$
と設定すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

となります。

力 Fが一定であるとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2 = F\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}}_{\text{運動エネルギーの変化}} = \underbrace{\boxed{F\left(x_2 - x_1\right)}}_{\text{外力の仕事}}$$

ここで、作用する力 F が一定であるとすると右辺の積分が容易にでき、

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv^2\left(t_1\right) - \frac{1}{2}mv^2\left(t_2\right) = F\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}_{\text{運動エネルギーの変化量 }\Delta K} = \underbrace{F\left(x_2 - x_1\right)}_{\text{外力の仕事}}$$

となります。

運動方程式からの導出 ～ 計算法

3次元(ベクトル)

$$\int m\boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}}\cdot\vec{v}dt \Rightarrow \int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$ に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$

元は同じもの

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}(|\vec{v}||\vec{v}|\cos\theta) = \frac{d}{dt}(vv\cos 0) = \frac{d}{dt}(v^2)$$

従って、

$$2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$\boxed{\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt = \int\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

式変形について示しておきます。

左辺の $\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$ の部分を作り出す為にを $\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})$ 考えます。

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}(|\vec{v}||\vec{v}|\cos\theta) = \frac{d}{dt}(vv\cos 0) = \frac{d}{dt}(v^2)$$

となります。
自分自身の内積なのでなす角 $\theta = 0$ となります。

一方、この微分を展開すると(合成関数の微分)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right)=\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}+\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}=2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$

となります。
内積の掛ける順は可換なので展開した2つの項は同じものになります。
2つの計算でも元は同じものなので

$$2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(v^2\right)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

となります。
従って、

$$\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}dt \quad \Rightarrow \quad \int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

と書き換えられます。ここの計算は少し難しいのでしっかりと手を動かしてやってみて下さい。

201120-11

運動方程式からの導出 ~ 計算法

1次元

$$\int m\boxed{\frac{dv}{dt}}v\,dt \Rightarrow \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

$\frac{dv}{dt}v$ に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}(vv) = \frac{dv}{dt}v + v\frac{dv}{dt} = 2\frac{dv}{dt}v$$

$$\frac{d}{dt}(v^2)$$

元は同じもの

従って、

$$2\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

$$\int m\frac{dv}{dt}v\,dt = \int F\,dx$$

左辺の $\frac{dv}{dt}v$ の部分を作り出す為にを $\frac{d}{dt}(vv)$ 考えます。

$$\frac{d}{dt}(vv) = \frac{d}{dt}(v^2)$$

となります。

一方、この微分を展開すると(合成関数の微分)

$$\frac{d}{dt}(vv) = \frac{dv}{dt}v + v\frac{dv}{dt} = 2\frac{dv}{dt}v$$

となります。

2つの計算でも元は同じものなので

$$2\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(v^2\right)$$

$$\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

となります。
従って、

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

と書き換えられます。

仕事率

定義

仕事率：単位時間あたりの仕事

$$\bar{P} \equiv \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

国際単位：ワット ［W =J / S］

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L]\frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

機械などに仕事をさせる場合、仕事の量だけでなく「どれだけ速く作業をするか？」が重要な課題となります。このような「効率」を考える場合、

「単位時間あたりの仕事量」で表し、これを「仕事率 P 」と定義します。

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

となります。

仕事率の次元は

仕事率の定義 $P = \frac{dW}{dt}$ より、

(*W* の次元)

$$\frac{\left[\dfrac{ML^2}{T^2}\right]}{[T]}$$

(*t* の次元)

となります。

仕事率の単位はMKS単位系で表すと

$$\mathrm{W} = \mathrm{J}/\mathrm{s} = \left(\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2\right)/\mathrm{s} = \mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3$$

となります。

「J (ジュール)」は「仕事やエネルギーの単位」で「 $\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$ 」になります。

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

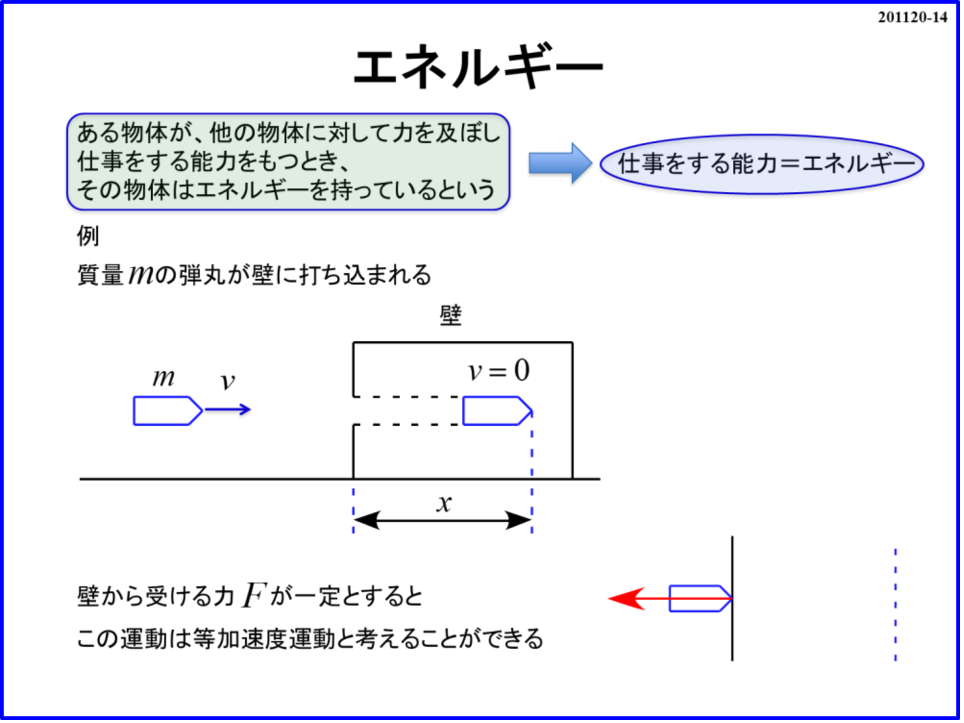
従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

仕事率の定義 $P = \frac{dW}{dt}$ に仕事の定義 $W = \vec{F} \cdot \vec{r}$ より $dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$ を用いると

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \underbrace{\boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}}}_{\vec{v}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

と変形でき、「仕事率 P 」は「力 $\vec{F}$ と速度 $\vec{v}$ の内積」として表すこともできます。



一般用語として「エネルギー」という言葉は広く知られています。
物理では「エネルギー」を「仕事をする能力」と考えます。
運動方程式から導いた「仕事とエネルギーの関係式」

$$\underbrace{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}\right)dt}_{\text{運動エネルギーの変化量}} = \underbrace{\int \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{仕事}}$$

を見ても解るように「仕事」と「エネルギー」は同じ次元の物理量として扱います。

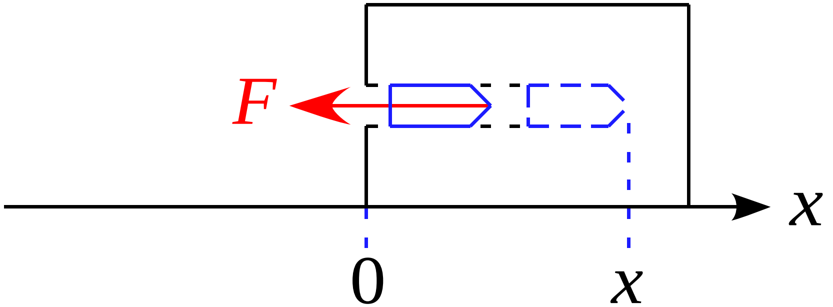
かなり乱暴に言うと「運動方程式を $m\vec{a} = \vec{F}$ 」と記述したとき
「この両辺に $d\vec{r}$ の内積を取って全区間積分」し、導かれた式の
「右辺の項を仕事」と呼び、「左辺の項をエネルギー」と呼びます。
よって、「右辺の仕事」を左辺に移項すると、
その項は「エネルギー」と呼び名が変わることがあります。

それではスライドの例を見ながら「エネルギー」について検討してみましょう。

物体(弾丸)が速度 v で壁に打ち込まれ、めり込み、距離 x だけ進んで止まったとします。
めり込む間に壁から受ける力 F は一定とし、
またモデルを単純にする為 x 軸方向の力のみ考えるものとします。

それでは手順に従って運動方程式を立てる所から進めて行きましょう。

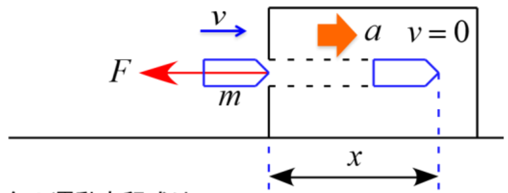
作図は問題を利用し、軸の設定は右向きを正とします。
又、壁の左端を $x = 0$ とします。



作用する力の矢印は

x 軸方向のみを考えるので「壁からの力 F 」のみになります。

201120-15



水平方向の運動方程式は

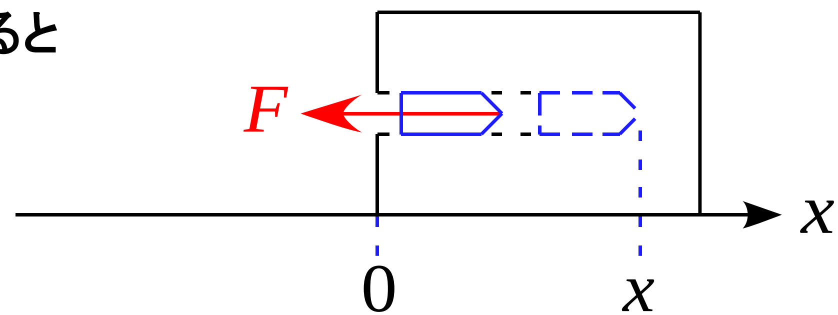
$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int(-F)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int(-F)dx$$

運動方程式は x 軸が右向き正に注意して立てると



$$ma = -F$$

となります。

加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

ここで両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx=\int(-F)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt=\int(-F)dx$$

$$\int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int(-F)dx$$

となります。

201120-16

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int (-F)\,dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_0^x (-F)\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} = \left[-Fx\right]_0^x$$

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx + F\cdot 0$$

壁に当たった瞬間を t_0 とし、静止した時刻を t_1 とすると

$t = t_0$ で $x(t_0) = 0, v(t_0) = v$

$t = t_1$ で $x(t_1) = x, v(t_1) = 0$

であるから

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_0^x (-F)\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} = \left[-Fx\right]_0^x$$

$$\frac{1}{2}mv^2(t_1) - \frac{1}{2}mv^2(t_0) = -Fx - (-F\cdot 0)$$

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx$$

となります。

エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\boxed{\frac{1}{2}m\cdot 0^2}-\boxed{\frac{1}{2}m\cdot v^2}=\boxed{-Fx}$$

最後の運動能力　最初の運動能力　弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K=\frac{1}{2}mv^2$$ [J = kg m² / s²]

次元

$$[M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2=\frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

この式のそれぞれの項を見ると

$$\boxed{\frac{1}{2}m\cdot 0^2}-\boxed{\frac{1}{2}mv^2}=-Fx$$

最後の運動エネルギー　最初の運動エネルギー　弾丸(物体)がされた仕事

運動エネルギーの変化量 ΔK

となります。

従って、「運動エネルギーの変化 ΔK は外力の仕事によるもの」となります。
前式

$$\int \frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\text{運動エネルギー}}dt$$

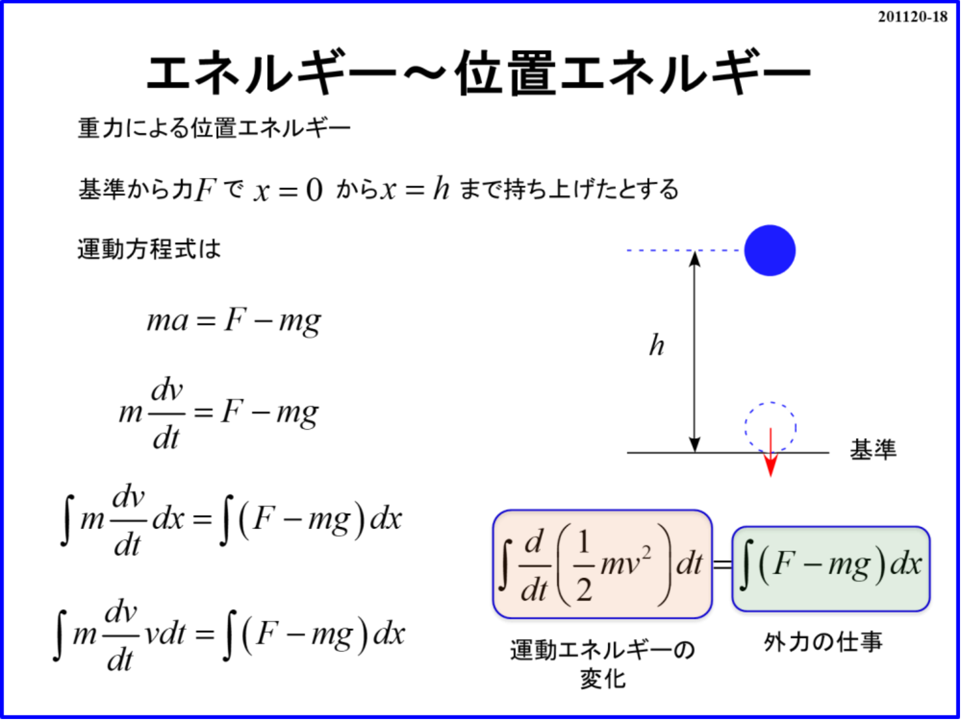
の「$\frac{1}{2}mv^2$」の部分を「運動エネルギー K」と呼びます。

運動エネルギー K の次元は

$$\underbrace{[M]}_{(m\text{ の次元})}\Big(\underbrace{\left[\frac{L}{T}\right]}_{(v\text{ の次元})}\Big)^2 = \left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$$

となります。

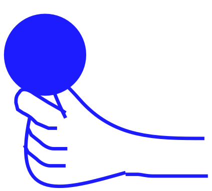
となり、仕事の次元と一致していることが確認できます。



続いて「(重力による)位置エネルギー」について検討してみましょう。

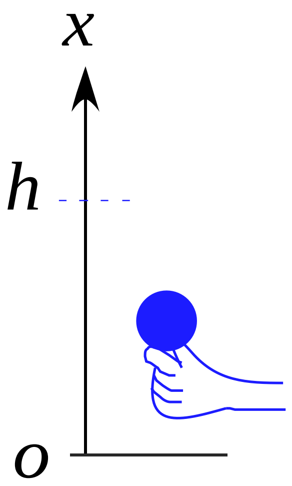
物体が地表にあり、そこから高さhだけ持ち上げる運動を考えます。

まずは**作図**です。

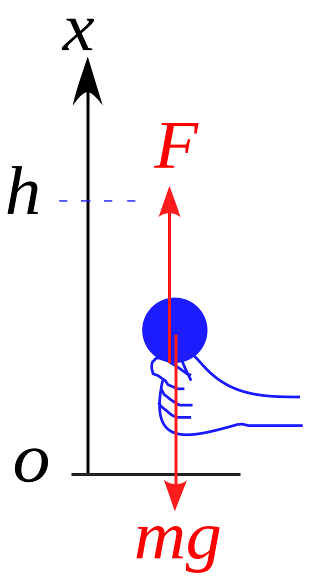


となります。

軸の設定は「上向きを正」とし、地表を $x = 0$ と設定します。

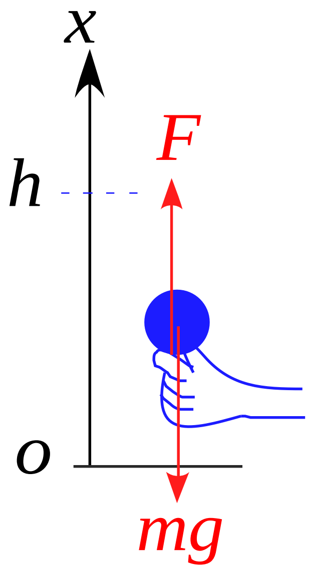


作用する力の矢印を書き込むと



となります。
作用する力は「**重力 mg** 」「**手の力 F**」が作用しています。

運動方程式は軸が上向き正であることに注意して立てると



$$ma = F - mg$$

となります。

加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg$$

両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int (F - mg)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int (F - mg)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int (F - mg)dx$$

となります。

左辺は「運動エネルギーの変化量」、右辺は「外力の仕事」を表しています。

この手を持ち上げるとき「準静的」に持ち上げたとします。

即ち、
$t = 0$ (スタート時)で速度 $v = 0$
$t = t$ (高さ h)で速度 $v = 0$
となります。

「準静的」とは「静止に準ずる」という意味で
「速度 v を限りなく 0 に近い形での運動」を意味しています。

エネルギー～位置エネルギー

準静的に持ち上げたとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \int_0^h (F - mg)\,dx$$

$$0 = \int_0^h F dx + \int_0^h (-mg)\,dx$$

$$\int_0^h mg dx = \int_0^h F dx$$

$$[mgx]_0^h = \int_0^h F dx$$

$$\boxed{mgh} = \boxed{\int_0^h F dx}$$

重力による
位置エネルギー

持ち上げた
仕事

従って、この積分は

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \int_0^h (F - mg)\,dx$$

$$0 = \int_0^h (F - mg)\,dx$$

$$0 = \underbrace{\int_0^h F dx}_{\text{手の仕事}} + \underbrace{\int_0^h (-mg)\,dx}_{\text{重力 } mg \text{ による仕事}}$$

$$0=\underbrace{\int_0^h F\,dx}_{\text{手の仕事}}+\underbrace{\int_0^h(-mg)\,dx}_{\text{重力 }mg\text{ による仕事}}$$

$$\underbrace{\int_0^h mg\,dx}_{\text{重力による位置エネルギー}}=\underbrace{\int_0^h F\,dx}_{\text{手の仕事}}$$

$$\left[mgx\right]_0^h=\int_0^h F\,dx$$

$$\underbrace{mgh}_{\text{重力による位置エネルギー}}=\underbrace{\int_0^h F\,dx}_{\text{手の仕事}}$$

となります。

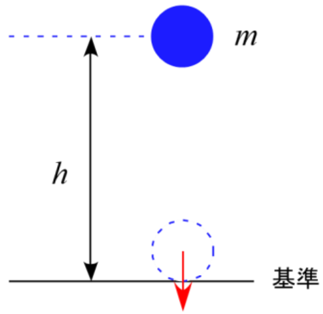
エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた
下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

$$U = mgh \quad [\mathrm{J = kg\ m^2 / s^2}]$$

基準からの高さに比例

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

従って、「**重力による位置エネルギー**」は
「**重力 mg に逆らって h だけ持ち上げる時の仕事**」に等しく、その仕事 W は

$$W = F \cdot h = mgh$$

となり、「**この仕事によって物体は位置エネルギーを得た**」と考えます。

前述した「右辺にあると仕事」「左辺に来るとエネルギー」の意味が
なんとなくわかったと思います。
「仕事」と「エネルギー」は見方の違いで同じものであるという感覚を身に着けて下さい。

重力による位置エネルギー U の次元は

$$[M]\left[\frac{L}{T^2}\right][L]=\left[\frac{ML^2}{T^2}\right]$$

(m の次元)　(h の次元)

(g の次元)
重力加速度

となります。

エネルギー～自由落下

自由落下

運動方程式は

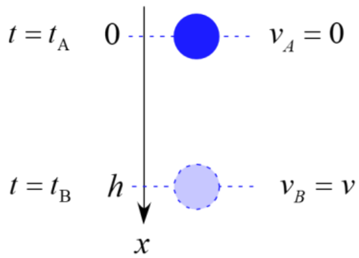
$$ma = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int mgdx$$

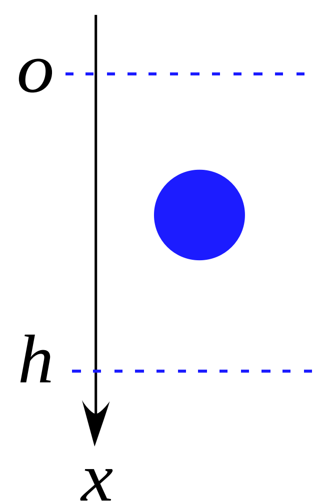
$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int mgdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int mgdx$$



続いて「自由落下のモデル」についてエネルギーを検討してみましょう。

作図と**軸**はスライドの図を利用します。

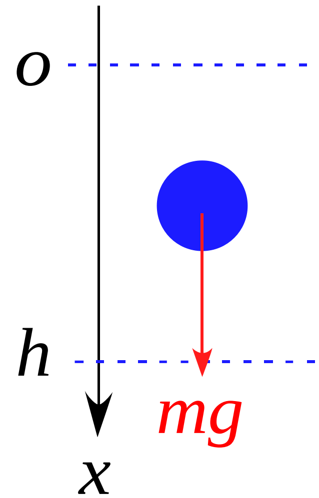


$t = t_A$ で $x(t_A) = 0, v(t_A) = v_A = 0$

$t = t_B$ で $x(t_B) = h, v(t_B) = v_B = v$

と設定します。

作用する力の矢印は



作用する力は「重力 mg 」のみになります。

運動方程式は下向き正に注意して立てると

$$ma = mg$$

となります。

加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int mg dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int mgdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int mgdx$$

となります。

201120-22

エネルギー〜自由落下

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_A}^{v_B}=\left[mgx\right]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=mgh-mg\cdot 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2}=\boxed{mgh}$$

運動エネルギーの変化　　外力の仕事

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-mgh\right)=0$$

運動エネルギー　　位置エネルギー

ここで積分区間を適用すると

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int_0^h mgdx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_A)}^{v(t_B)}=\int_0^h mgdx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_A}^{v_B}=\left[mgx\right]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2=mgh-mg\cdot 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}m\cdot 0^2=mgh-mg\cdot 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2=mgh$$

運動エネルギーの変化量 ΔK　　**外力(重力)の仕事**

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-mgh\right)=0$$

エネルギー保存則

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$\frac{1}{2}mv^2 + (-mgh) = 0$$

(重力場の運動)

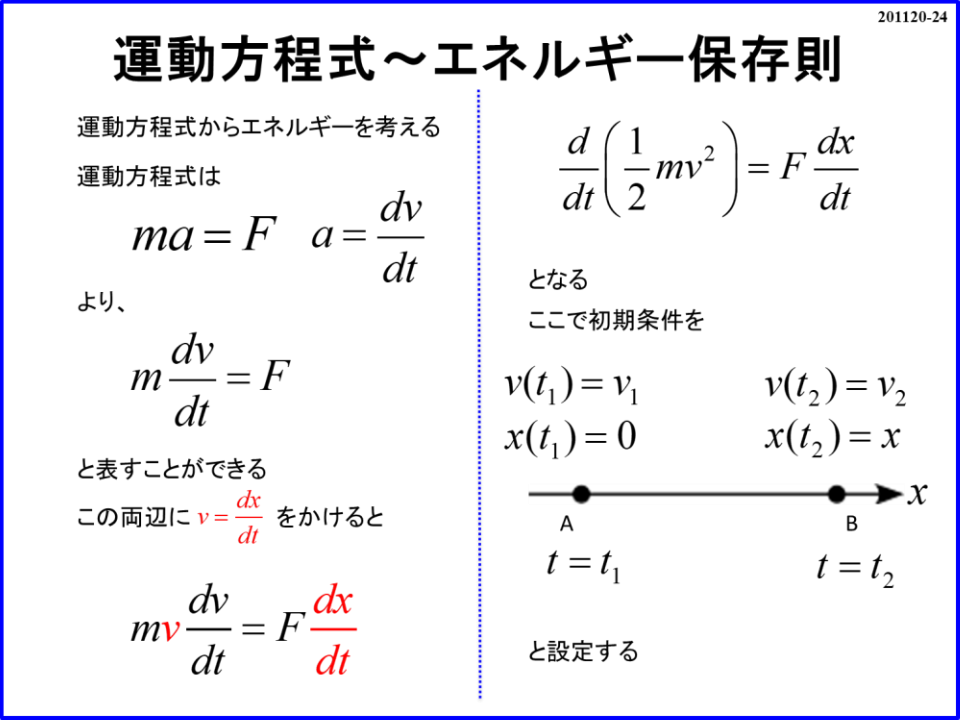
この式は「エネルギー保存則」を表していて

$$\underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{\text{運動エネルギー } K} + \underbrace{(-mgh)}_{\text{重力による位置エネルギー } U}}_{\text{力学的エネルギー } E} = 0$$

であるから、「自由落下の運動モデル」においては

「**全力学的エネルギー E = 運動エネルギー K + 位置エネルギー U = 0** 」となり

時間によってエネルギーの総和は変化しないことがわかる。



前のモデルは「自由落下」を扱ったが、
運動方程式から一般的にエネルギー保存則を検討してみましょう。

運動方程式

$$ma = F$$

において加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と表されます。

ここで両辺に速度 $v=\frac{dv}{dt}$ を掛けると

$$m\frac{dv}{dt}v=F\frac{dx}{dt}$$

となります。「左辺には v 」を「右辺には $\frac{dx}{dt}$ 」を掛けています。
「＝ (イコール)」で結ばれたものをどちらに掛けても等式は成り立ちますよね？

さらに「左辺の v 」を微分の中に入れるように変形すると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=F\frac{dx}{dt}$$

となります。
ここでもし作用する力 F が一定であれば微分の中に入れることができ

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}(Fx)$$

となり、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\frac{d}{dt}(-Fx)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)+\frac{d}{dt}\left(-Fx\right)=0$$

となり、。

$$\frac{d}{dt}\left(K+U\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(E\right)=0$$

となります。
この式は「全力学的エネルギーを時間 t で微分するとゼロ」になっています。
よって、「 $E=$定数 」であることが判ります。
「微分してゼロ」なら「微分したもの」は「定数」ですよね？
従って、「エネルギー保存則が成立している」と言えます。

話を戻して、条件を設定します。
$t=t_1$ で $x(t_1)=0, v(t_1)=v_1$
$t=t_2$ で $x(t_2)=x, v(t_2)=v_2$
とし、両辺 t で積分すると

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \int_0^x Fdx$$

$$\underbrace{\boxed{\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2}}_{\text{運動エネルギーの変化量}} = \underbrace{\boxed{\int_0^x Fdx}}_{\substack{x=0\ \text{から}\ x\ \text{まで} \\ \text{物体に働く力}\ F\ \text{がした仕事}}}$$

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} Fdx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_1}^{v_2} = \int_0^x Fdx$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2}_{\text{運動エネルギーの変化量}\ \Delta K} = \underbrace{\int_0^x Fdx}_{\text{外力による仕事}}$$

となります。

運動方程式～エネルギー保存則

$v = \frac{dx}{dt}$ をかける　単位時間あたりの変位をかけた

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する　最初から最後まで時間に対して和を取る

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2}F\frac{dx}{dt}dt$$

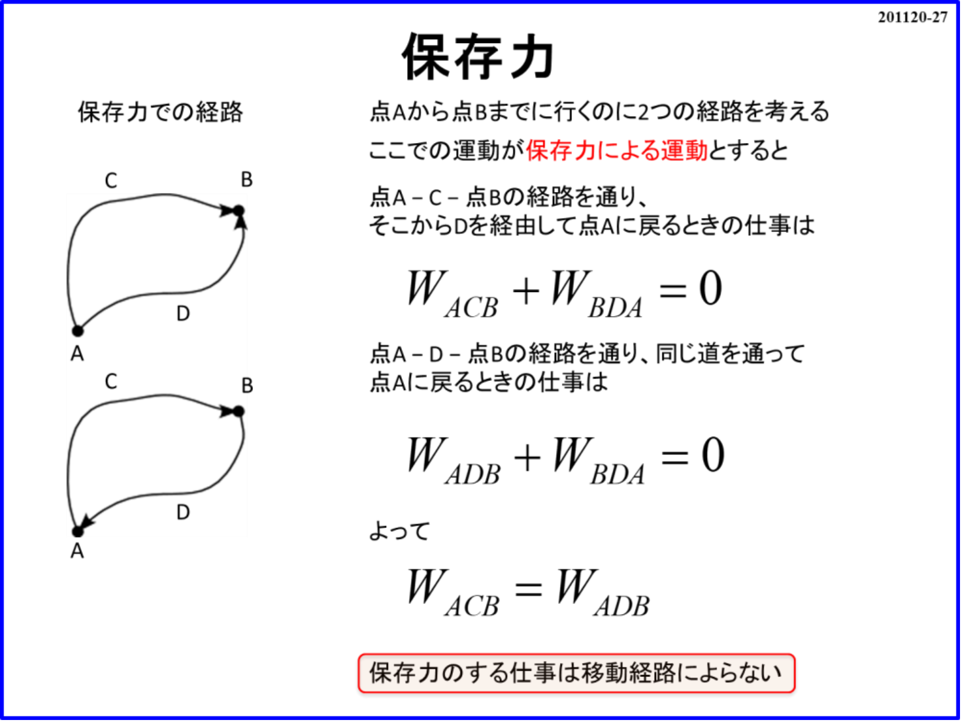
最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

となり、「仕事とエネルギーの関係」である
「運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい」ことが確認できます。

これまでの計算の物理的意味を考えてみましょう。

「速度 v は単位時間の変位 x 」を意味しています。
ということは「$v = \frac{dx}{dt}$」を掛けると
「単位時間あたりの仕事とエネルギーの関係式」となります。
これを全時間に対して積分することは
「最初と最後のエネルギーと仕事の関係式」を表すことになります。
この式を「エネルギー方程式」と呼びます。



物体を移動させ、再び元の位置に戻るまでの間に力がした仕事がゼロになる場合
その力を「保存力」と呼びます。

一般的な例を見てみましょう。

点Aから点Bまでの経路にCルートとDルートの2通りあるとします。
行きにCルートを用い、帰りにDルートを用いた場合の仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA}$$

となります。

また、行きに*D*ルートを用い、帰りも*D*ルートを用いた場合の仕事は

$$W_{ADB}+W_{BDA}$$

となります。
もし、この経路の移動中に作用している力が保存力の場合、
元の位置に戻ってくれば仕事はゼロであるから

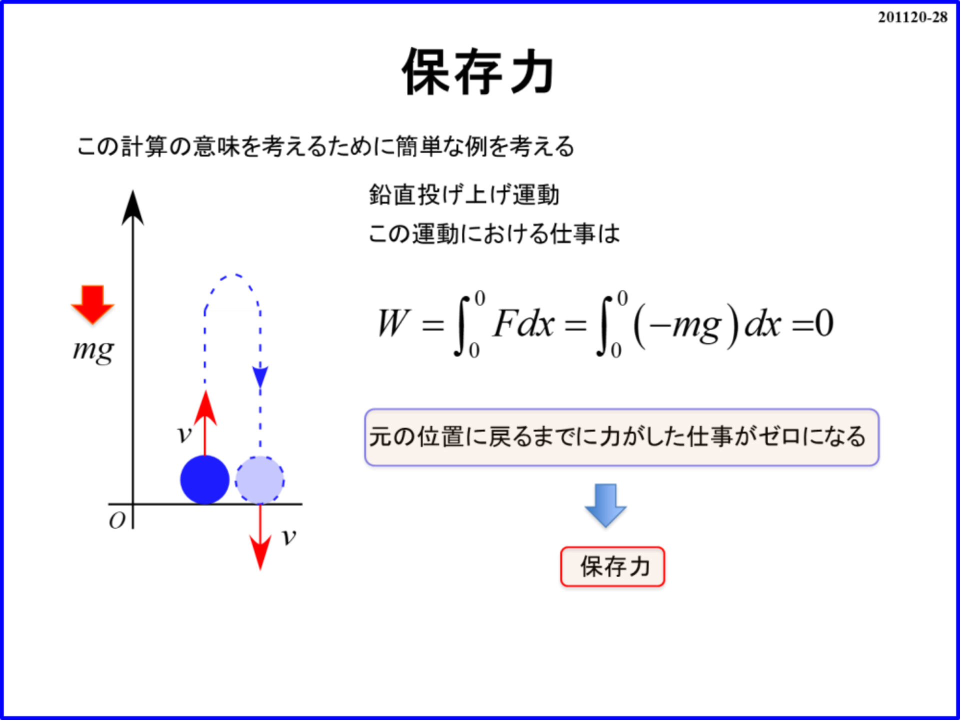
$$W_{ACB}+W_{BDA}=0$$

$$W_{ADB}+W_{BDA}=0$$

となります。
従って

$$W_{ACB}=W_{BDA}$$

となり、経路に依らないことがわかります。



ここで保存力の具体例として「鉛直投げ上げのモデル」を取り上げます。

上を軸の正とすると運動方程式は

$$ma = -mg$$

となります。

加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

となります。

両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}\,dx=\int(-mg)\,dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}v\,dt=\int(-mg)\,dx$$

$$\underbrace{\int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt}_{\text{運動エネルギーの変化量 }\Delta K}=\underbrace{\int(-mg)\,dx}_{\text{外力(重力)の仕事 }W}$$

となります。
従って、この運動の仕事 W は

$$W=\int_0^0(-mg)\,dx=0$$

となります。
従って、この運動は「保存力による運動」であると言えます。

201120-29

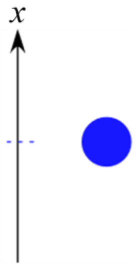
エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動

運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt}=-mg$$

と表すことができる



この両辺に $v=\frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt}=-mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)=\frac{d}{dt}(-mgx)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2+mgx}\right)=0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2+mgx$ は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2+mgx=\text{一定}$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が
一定であるからエネルギー保存則が
成り立っている。

エネルギー保存則の導出の例題になります。

「保存則」を示す方法はいくつかあります。
そもそも「保存」とはどういう意味でしょうか？
ここでの「保存」とは「時間的に変化しない」という意味になります。
「時間に依らない量」と言うことになります。

さて、この「時間的に変化しない」と言うことをどのように示すか紹介します。

— 計算する
「具体的に代入してみたら定数」
「積分をしてみたら定数」

いずれも「計算してみたら定数が導けた」ケースになります。
もうひとつが

— t の微分の形をつくる
「t で微分したら 0 になる」

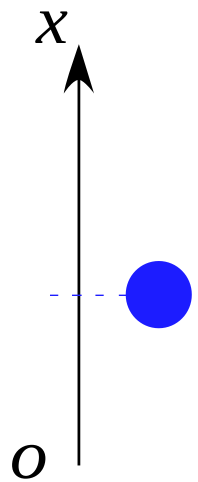
「t で微分したら 0 になる」と言うことは
「微分する前の物理量は時間 t に対して定数であるはず」
という考え方です。

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{\qquad\qquad} \right) = 0$$

この部分は
定数であるはず

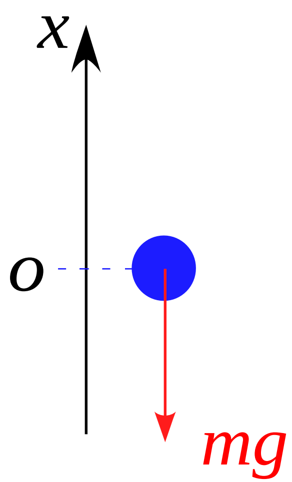
それでは実際に例題を進めて行きましょう。

まずは**作図**と**軸**の設定をします。



軸は上向きを正としました。

作用する力の矢印を書き込むと



作用する力は「**重力 mg** 」のみになります。
運動方程式は

$$ma = -mg$$

となります。

加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

となります。

両辺に速度 $v = \frac{dx}{dt}$ を掛けると

$$m\frac{dv}{dt}v = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}(-mgx)$$

となり、左辺にまとめると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + mgx\right) = 0$$

となります。

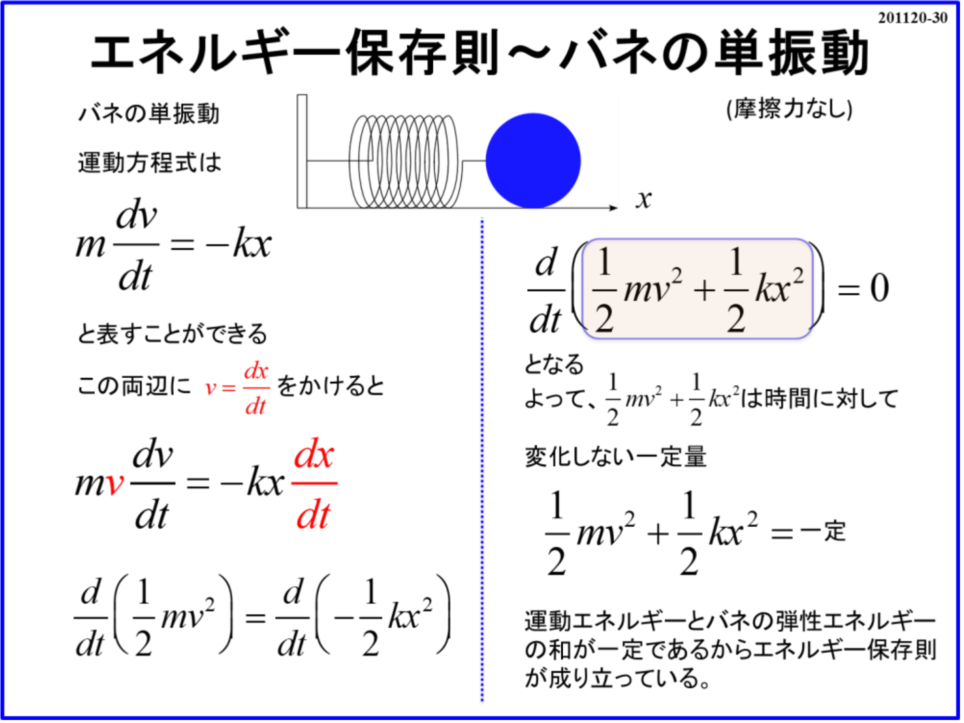
よって、「$\frac{d}{dt}(\quad)$」の内部である

「$\frac{1}{2}mv^2 + mgx$」は時間 t に対して定数であると言えます。

従って、

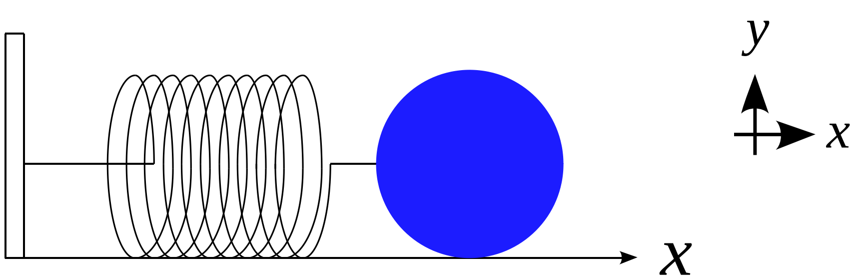
$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{K}+\underbrace{mgx}_{U}\right)}_{E}=0$$

となり、「エネルギー保存則」が成立していると言えます。

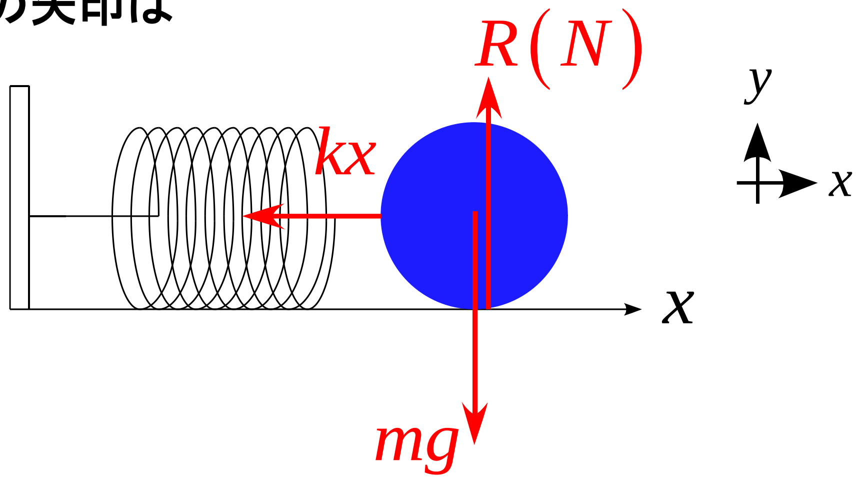


続いてバネ(滑らかな床)のモデルです。

まず、作図と軸の設定は問題の図を利用します。



作用する力の矢印は



となります。

作用する力は「**重力 mg**」「**接触面の抗力 $R(N)$**」「**バネの弾性力 kx**」になります。

「接触面の抗力 $R(N)$」は滑らかな床なので摩擦力が作用せず、

「抗力 R」は傾かず鉛直上向きになります。

運動方程式は

$$ma_x = -kx$$

$$ma_y = N - mg$$

となります。

$a_x = a, a_y = 0$ (束縛条件)より

$$ma = -kx$$

$$0 = N - mg$$

x 軸方向に着目すると、加速度の定義 $a = \frac{dv}{dt}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

となります。

両辺に速度 $v = \frac{dx}{dt}$ を掛けると

$$m\frac{dv}{dt}v = -kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

となり、左辺にまとめると

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = 0$$

となります。

よって、「 $\frac{d}{dt}$ (　　) 」の内部である「 $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$ 」は時間 t に対して定数であり「エネルギー保存則」が成立していると言えます。

200618-31

仕事とエネルギー～例題

水平面とのなす角 θ の摩擦がある斜面を質量 m の物体がすべり下りる運動を考える。以下の問いに答えよ。
但し、動摩擦力は $f = \mu_k N$ として用いてよいとする。

(1) この運動の運動方程式を記述せよ。

(2) この運動の加速度 a を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

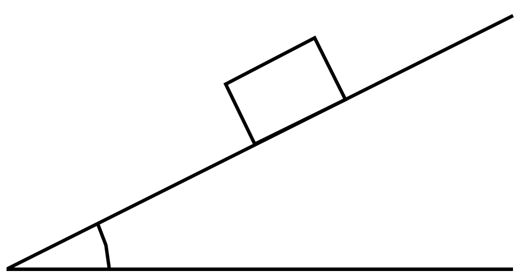
時刻 t_1 で物体が距離 L を移動したとする。

(3) 運動方程式の両辺を x で積分し、仕事とエネルギーの関係式を導け。
$v(0) = v_0, x(0) = 0, v(t_1) = v_1, x(t_1) = L$ とする。

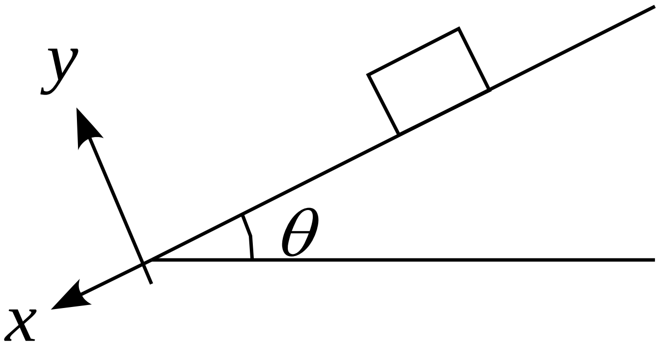
(4) 動摩擦力がした仕事 $W_{摩}$ を求めよ。

この問題は「スライド201106-29」と同じモデルの問題になります。

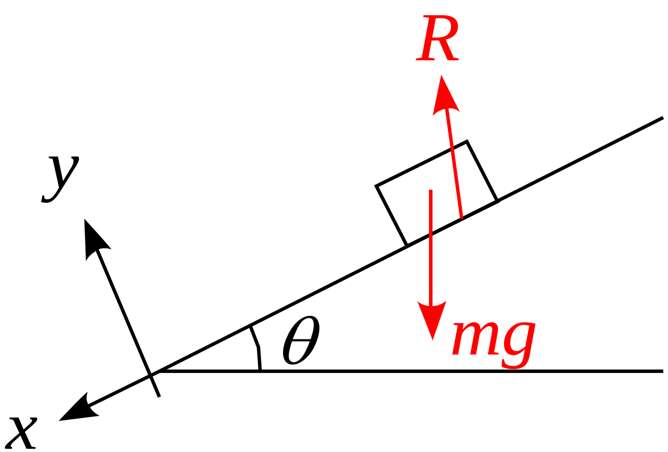
まずは作図です。



続いて軸の設定になります。
斜面に沿って下向きを x 軸、斜面に対して垂直上向きを y 軸と設定します。

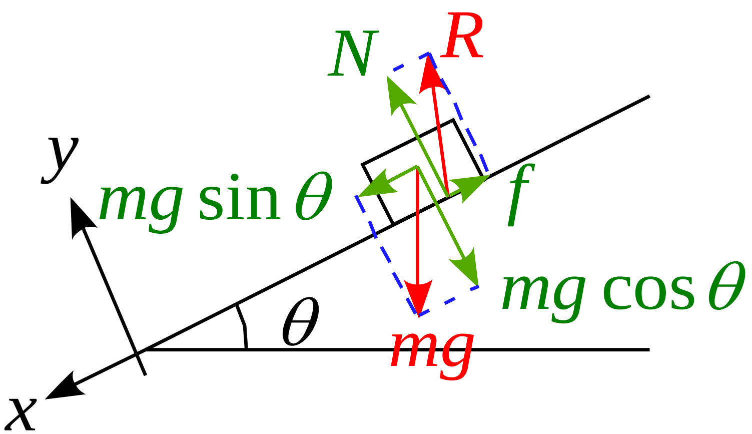


ここで、作用する力の矢印を記入していきます。



作用する力は「重力 mg 」と「面からの抗力 R 」がとなります。

「作用する力」を軸に沿って分解すると



力を分解する時、分解元の力が対角線になるように
長方形をつくり、補助線まで書きましょう。

運動方程式はそれぞれの軸の加速度を a_x, a_y と表すと

$$ma_x = mg\sin\theta - f$$

$$ma_y = N - mg\cos\theta$$

と表されます。

ここで、$a_x = a$ (問題より), $a_y = 0$ (束縛条件)より

$$ma = mg\sin\theta - f$$

$$0 = N - mg\cos\theta$$

となります。
ここで動摩擦力は $f = \mu_k N$ と表されるので

$$ma = mg\sin\theta - \mu_k N$$

$$ma = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

となります。
従って、加速度 a は

$$a = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$$

と表されます。
g, θ, μ_k はいずれも定数なので a は定数となり、この運動は等加速度運動であると言えます。

運動方程式の加速度を $\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt}}$ と書き換えて

$$m\frac{dv}{dt} = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

両辺を $\boldsymbol{x}$ で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int\left(mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\right)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int\left(mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\right)dx$$

$$\int\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int\left(mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\right)dx$$

問題の条件は

$\boldsymbol{t = 0}$ で $\boldsymbol{x(0) = 0, v(0) = v_0}$

$\boldsymbol{t = t_1}$ で $\boldsymbol{x(t_1) = L, v(t_1) = v_1}$

なので

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(0)}^{v(t_1)} = \Big[\left(mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta\right)x\Big]_0^L$$

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = mg\sin\theta L - \mu_k mg\cos\theta L$$

となります。
従って、仕事とエネルギーの関係式は

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}_{\text{運動エネルギーの変化量 }\Delta K} = \underbrace{mgL\sin\theta}_{\text{重力がする仕事 }W_g} + \underbrace{\left(-\mu_k mgL\cos\theta\right)}_{\text{摩擦力がする仕事 }W_{\text{摩}}}$$

であり、動摩擦力がした仕事 $W_{\text{摩}}$ は

$$W_{\text{摩}} = -\mu_k mgL\cos\theta$$

となります。