# 運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2 - \frac{1}{2}mv_1{}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

仕事とエネルギーの関係

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

# 運動量～定義

質量 $m$ の質点が力 $\vec{F}$ を受けて運動している

運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

加速度の定義から

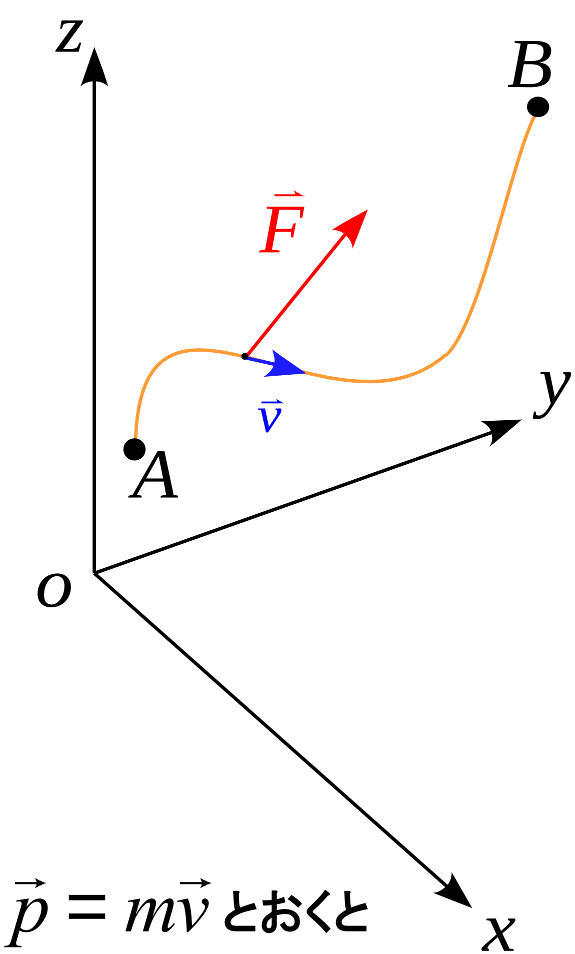
$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

であるから、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\boxed{\left(m\vec{v}\right)} = \vec{F}$$

運動量




ここで、$\vec{p} = m\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となる。

# 運動量〜力積

**運動量**

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量 = 質量 × 速度

**次元**

$$[M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}} = \vec{F}$$

単位時間あたりの運動量の変化

この式を書き換えると

$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

運動量の微小変化

力積

力 $\vec{F}$ が微小時間 $dt$ だけ働いた

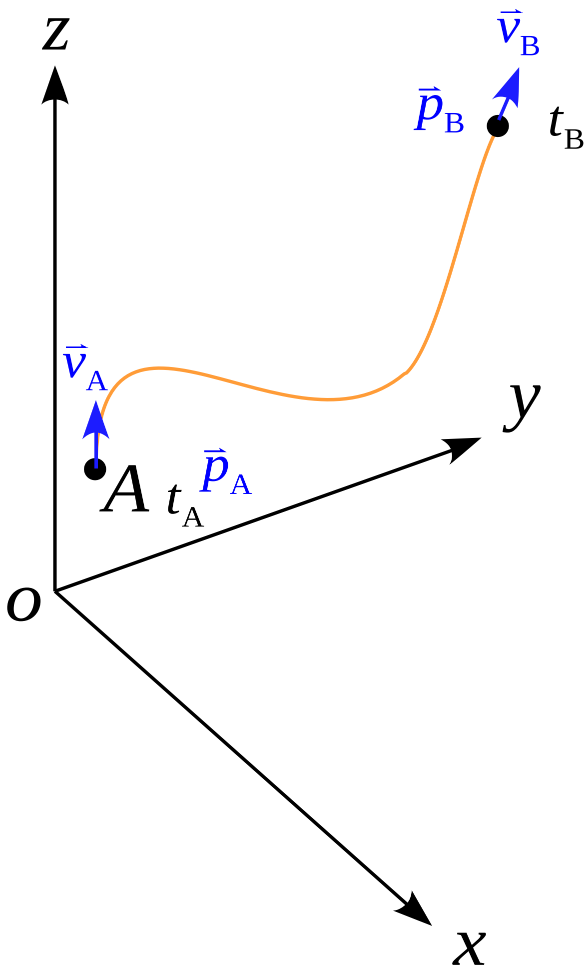
**次元**

力積

$$\vec{I} = \vec{F}dt$$

$$\left[\frac{ML}{T^2}\right][T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

運動開始と運動終了を図のように設定する




$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

積分すると

$$\int_{p_A}^{p_B} d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt$$

$$\boxed{\vec{p}_B - \vec{p}_A} = \boxed{\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt}$$

運動量の変化

受けた力積の総和

# 運動量〜エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2 - \frac{1}{2}m{v_A}^2 = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか？)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}dt$$

力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか？)

運動量の変化は力積による

# 運動量〜保存則

物体が衝突した前後について
考えてみよう(床との摩擦は無し)

運動方程式はA, Bそれぞれ

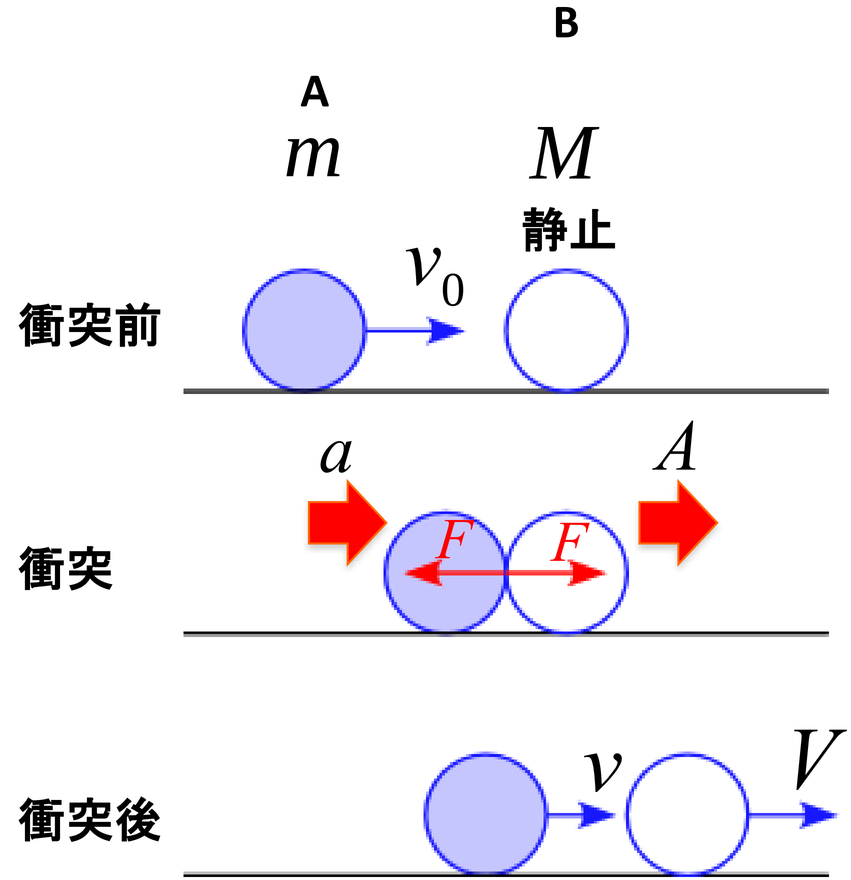
A： $ma = -F$

B： $MA = F$

従って、

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

$$M\frac{dV}{dt} = F$$



# 運動量～保存則

この2式の和をとると

$$m\frac{dv}{dt}+M\frac{dV}{dt}=-F+F$$

$$\frac{d}{dt}(mv)+\frac{d}{dt}(MV)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{mv+MV}\right)=0$$

運動量の合計

となる

従って、

この衝突において運動量の和は
時間的に変化していない。

運動量が保存している

即ち、この例のモデルでは

$$\underbrace{\boxed{mv+MV}}_{\text{衝突後の運動量}}=\underbrace{\boxed{mv_0+M\cdot 0}}_{\text{衝突前の運動量}}$$

が成立する。

# 運動量保存則

**運動量保存則**

**外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない**

$$\frac{d}{dt}\left(mv+MV\right)=0$$

$$\boxed{mv+MV}=\boxed{mv_0+MV_0}$$

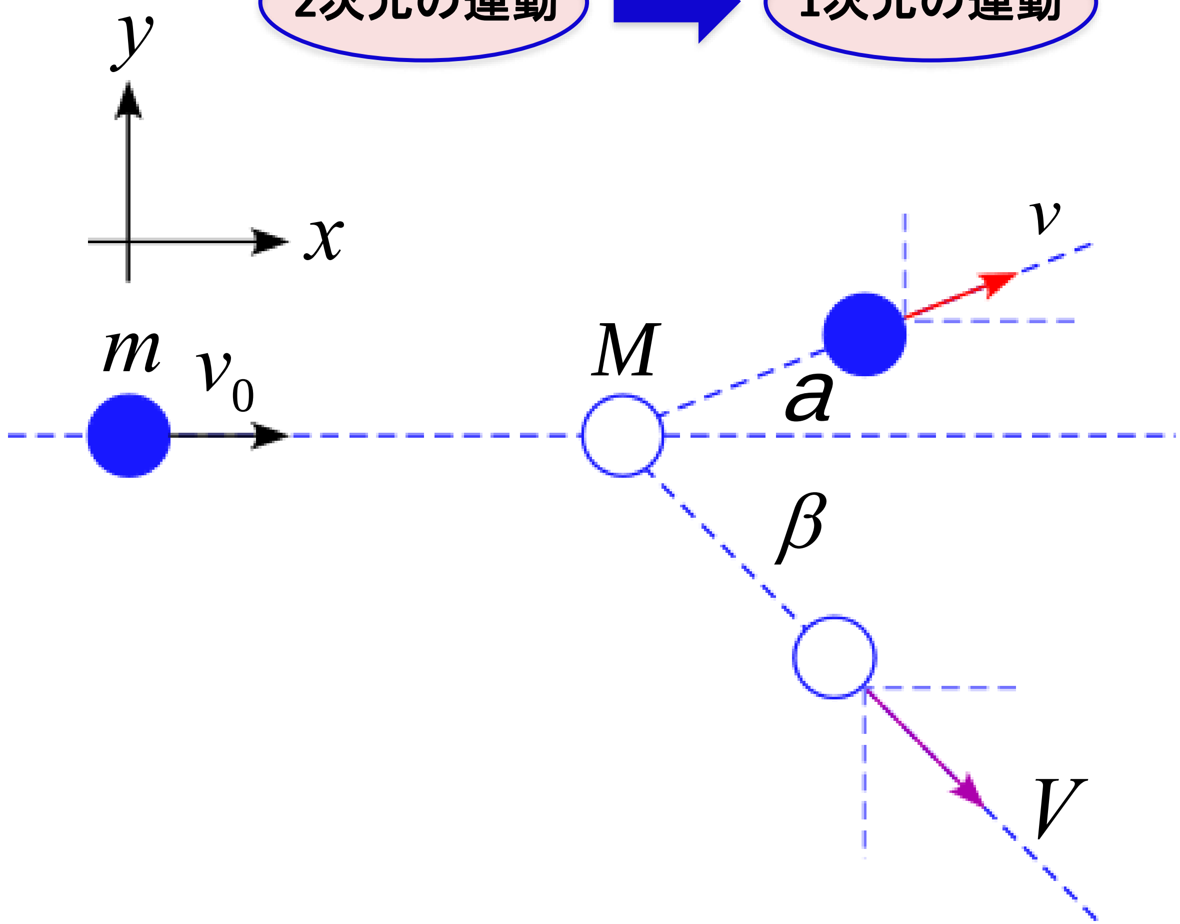
衝突後の全運動量　　衝突前の全運動量

# 斜衝突

**斜衝突 (ビリヤード)**

**静止している白球に青玉を完全弾性衝突させる運動 (床との摩擦は無いとする)**

**2次元の運動** → 分解 → **1次元の運動**



## 運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1\right) = -\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_2\right) = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2\right) = 0$$

衝突時に力 $\vec{F}$ が作用し、
青玉の速度 $\vec{v}_1$
白玉の速度 $\vec{V}_2$
とする

外から外力が加わっていない ➡ 前後の運動量については保存している

$$\underbrace{m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2}_{\text{衝突前の全運動量}} = \underbrace{m\vec{v}_1{}' + M\vec{V}_2{}'}_{\text{衝突後の全運動量}}$$

$$m\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} V\cos\beta \\ -V\sin\beta \end{pmatrix}$$

従って、

$x$ 方向: $mv_0 + M \cdot 0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$

$y$ 方向: $m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$

$x$ 方向: $mv_0 = mv\cos a + MV\cos b$

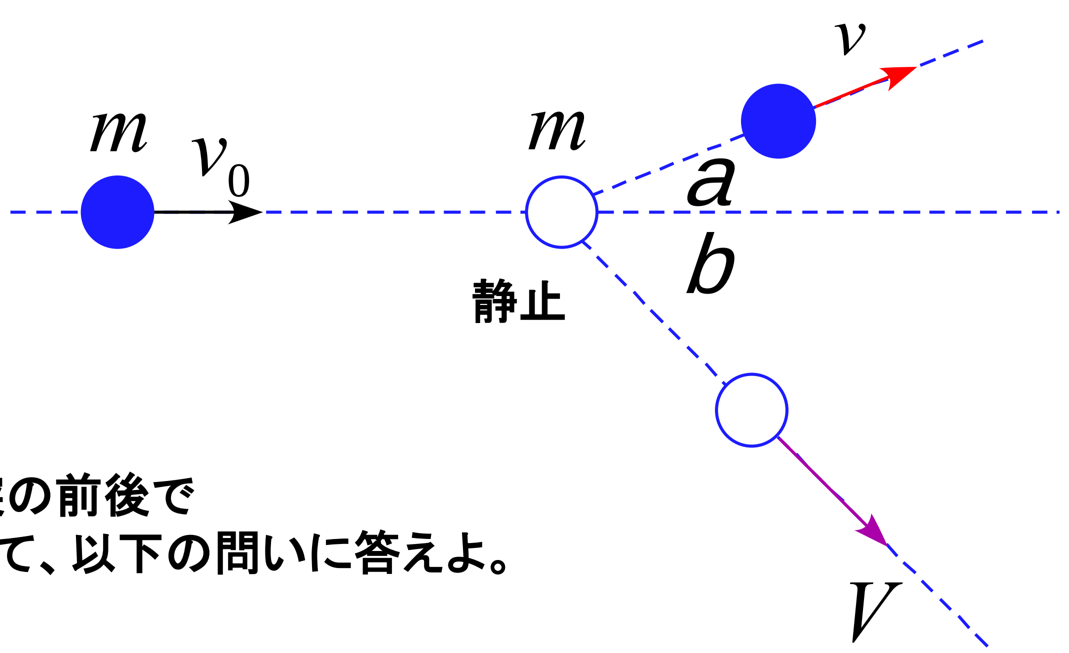
$y$ 方向: $0 = mv\sin a - MV\sin b$

完全弾性衝突 → 前後でのエネルギーロスは無い

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

# 斜衝突～例題

斜衝突において、質量が同じであるとする。

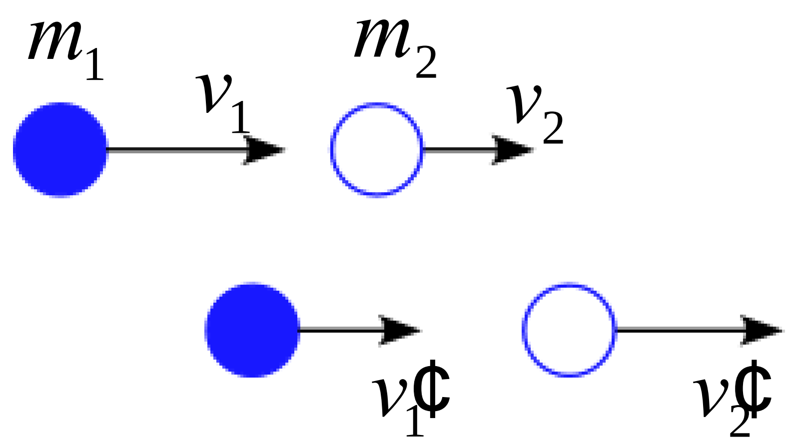



衝突は弾性衝突であり、衝突の前後で
エネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

1. 図の角 $\alpha + \beta$ を求めよ。

2. 速度比 $\frac{v}{V}$ を $\beta$ を使って表せ。

# 反発係数




1次元の衝突

運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2$$

であるが、速度の情報が不十分である
そこで

> 同じ2物体の衝突では、
> 衝突前後の相対速度の大きさの比は一定
>
> ( 経験的法則 )

を用いてその比率を定義すると

**反発係数 (跳ね返り係数) $e$**

$$e = - \frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

衝突後の相対速度 (分子)

衝突前の相対速度 (分母)

# 反発係数

2体の相対運動のエネルギーの変化を考えると

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1' - v_2'\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2\left(e^2 - 1\right)$$

完全弾性衝突: $e = 1$　理想的によく弾む場合 → エネルギー保存則が成立

非弾性衝突: $0 \leq e < 1$

完全非弾性衝突: $e = 0$　2物体が一体になる場合

# 運動量保存則～例題

**例題**

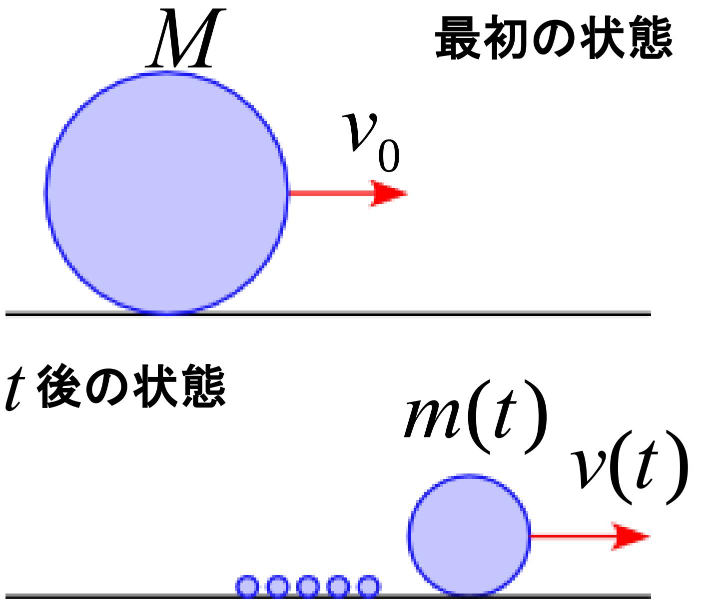
**滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたり $m_0$ の物質を噴出しながら運動する物体がある。物体の初期質量を $M$ 、初速度を $v_0$ とし、噴出物質の速度は常に 0 になるように噴出されるものとする。**
**以下の問いに答えよ。**

1. 時間 $t$ 後の質量 $m(t)$ を記述せよ。

2. この運動の運動方程式を記述せよ。

3. 時間 $t$ 後の速度 $v(t)$ を求めよ。

4. 時間 $t$ 後の移動距離 $x(t)$ を求めよ。



# 運動量保存則～例題

**例題**

**床の上に線密度 $\rho$ の鎖が置いてある。**
**この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。**
**重力加速度を $g$ として以下の問いに答えよ。**

**引き上げた部分の長さが $x$ 、速度が $v$ 、加速度が $a$ となったとき**

**1. 引き上げた部分の質量 $m$ を記述せよ。**

**2. この時の運動方程式を記述せよ。**

**3. 引き上げる力 $F$ の大きさを求めよ。**

**4. 一定の速度 $v$ で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。**