運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $m\vec{a} = \vec{F}$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

仕事とエネルギーの関係

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}dt$$

モーメントと角運動量の関係

回転運動と角運動量

質点の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

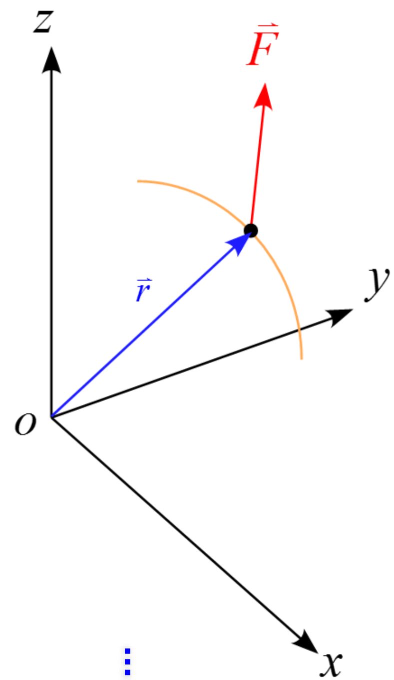
両辺に左から位置ベクトル $\vec{r}$ をかけると(外積)

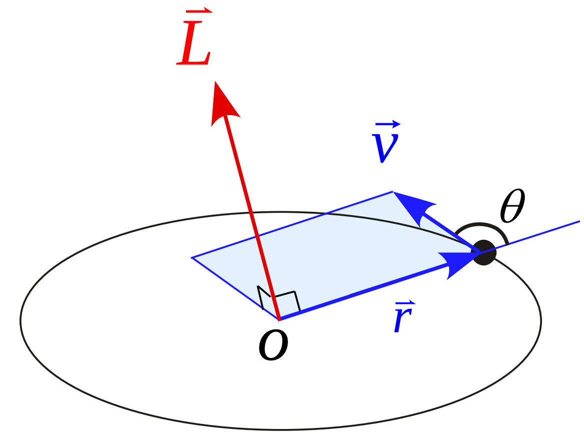
$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$





$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

角運動量　力のモーメント

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

回転運動と角運動量

途中の式変形について　(何故、$\vec{r}$ が微分の中に入るのか？)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$\dfrac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\,//\,m\vec{v}$ より

$$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\vec{0}$$

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

角運動量とモーメント

角運動量 $\vec{L}$ と力のモーメント $\vec{M}$ の関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

質点が点 O まわりを回転する勢いを表している

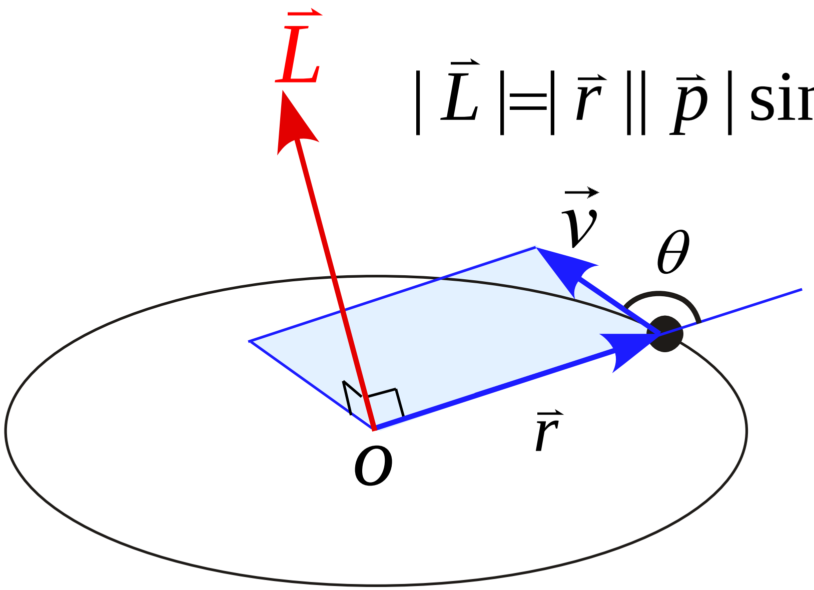
$$[L][M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T]}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

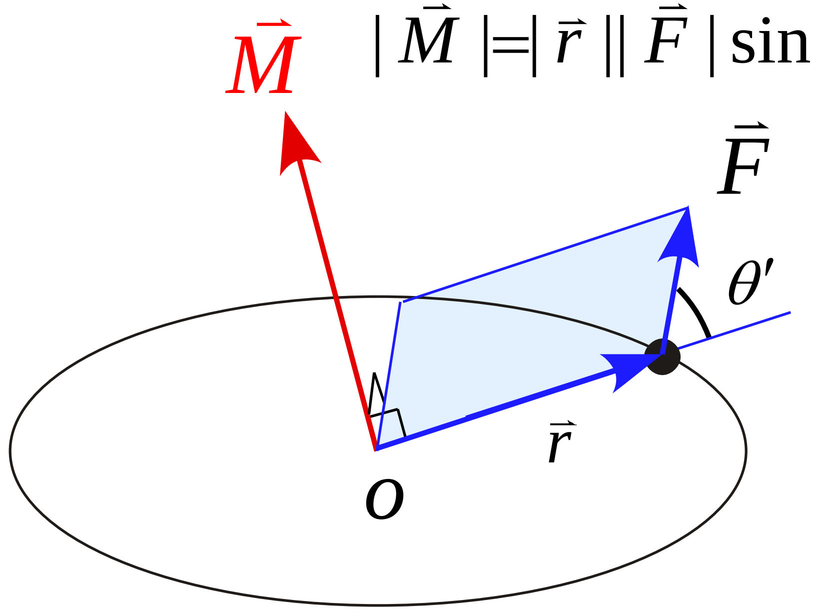
点 O まわりの力のモーメント (トルク)

$$[L][M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

$$|\vec{L}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin\theta$$



$$|\vec{M}| = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta'$$



角運動量保存則

角運動量 $\vec{L}$ と力のモーメント $\vec{M}$ の関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

ある質点の点 O まわりの
角運動量 $\vec{L}$ の変化は
この質点に働く点 O まわりの
力のモーメント $\vec{M}$ に等しい

もし、モーメント $\vec{M} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

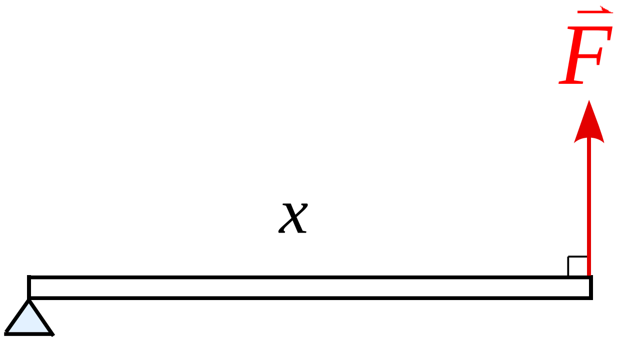
外力によるモーメントの総和 $\vec{M}$ が
$\vec{0}$ のときは、内力が働いていたとしても、
系の角運動量 $\vec{L}$ は変化しない

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

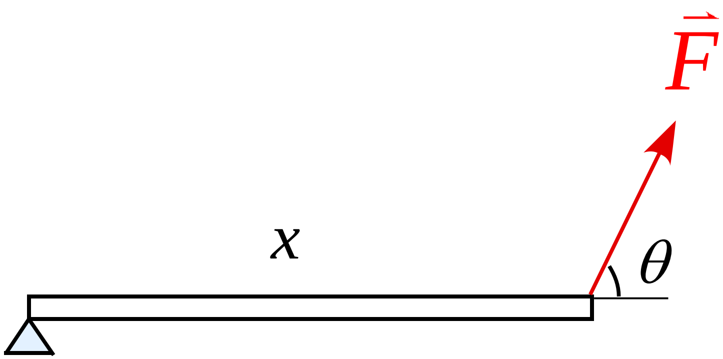
力のモーメント～例題

以下の図の力のモーメント $\vec{M}$ 及びその大きさ $|\vec{M}|$ を計算せよ。
但し、棒の質量は無視できるとする。

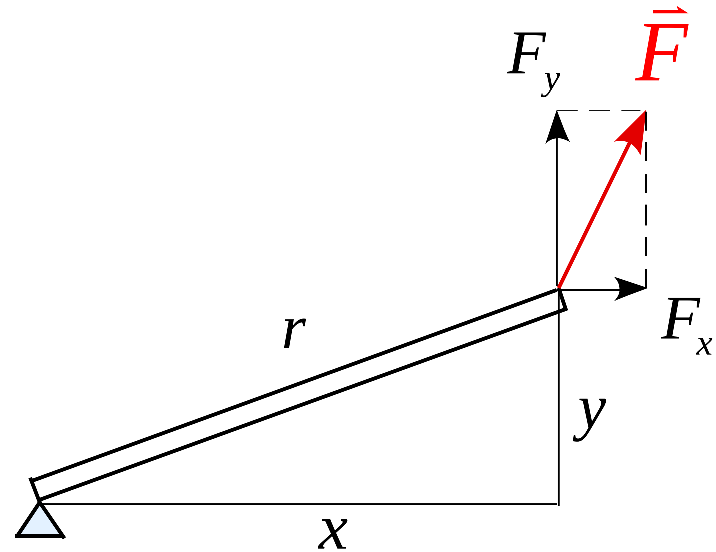
1.



2.



3.

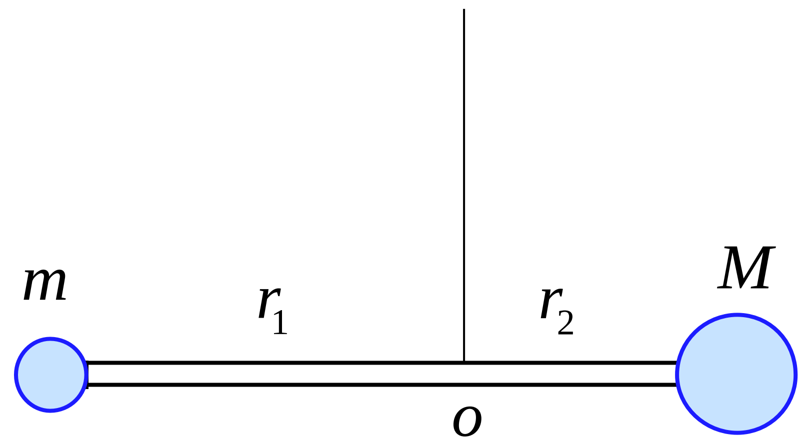


力のモーメント～例題

例題

軽い棒の両端に質量 m の物体と質量 M の物体が図のように取り付けられていて点 O で糸につるされている。この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒に作用する力を書き込め。
2. 棒の運動方程式を記述せよ。
3. 棒の回転の運動方程式を記述せよ。
4. 棒が回転しない条件 $\frac{r_1}{r_2}$ を求めよ。



力のモーメント～例題

例題

図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点が取り付けられ、糸でつるされている。
この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

2. 棒の質量が m の場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。